1. Integrace vektorových funkcí - Bochnerův integrál

(T, Σ, μ) je prostor se σ-konečnou (nezápornou) mírou μ, Σ je σ-algebra měřitelných množin.
X Banachův prostor, $f : T \to X$ funkce.

f je jednoduchá
$$f = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{M_i}$$
kde $M_i \in \Sigma$ mají konečnou míru a $a_i \in X$

Bochnerův integrál z jednoduché funkce je
$$\int_T f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(M_i)$$
Platí $\| \int_T f d\mu \| \le \int_T \|f\| d\mu$.

f je měřitelná, jestliže existují jednoduché funkce f_k tak, že $f_k(t) \to f(t)$ pro s.v. $t \in T$.
Potom také platí, že $\|f_k(t)\| \to \|f(t)\|$ pro s.v. t, tedy $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ je měřitelná.

f je bochnerovsky integrovatelná, jestliže existuje posloupnost jednoduchých funkcí f_k tak, že $f_k(t) \to f(t)$ skoro všude a platí
$$\int_T \|f_k - f\| d\mu \to 0.$$

Potom je posloupnost $\int_T f_k d\mu$ cauchyovská, má tedy v X limitu a my definujeme

$$\int_T f\,d\alpha = \lim_{k\to\infty} \int_T f_k\,d\alpha .$$

$\boxed{\text{Cvičení}}$ (A) Dokažte, že posloupnost $\int_T f_k\,d\alpha$ je cauchyovská.

f je <u>slabě měřitelná</u>, jestliže $\varphi\circ f : T \to \mathbb{R}(\mathbb{C})$ je měřitelná pro každé $\varphi \in X'$ (duál k X).

<u>Věta 1.1</u> Je-li X separabilní Banachův prostor, pak $f : T \to X$ je měřitelná, právě když je slabě měřitelná.

Důkaz: Implikace $\Rightarrow$ je jednoduchá a platí pro každý Banachův prostor. Opačnou implikaci nebudeme dokazovat (viz P. Q. str 16–18).

<u>Věta 1.2</u> (Bochner)

Nechť $f : T \to X$ je měřitelná. Potom f je bochnerovsky integrovatelná, právě když je $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ lebesgueovsky integrovatelná. V tomto případě platí

$$\left\| \int_T f\,d\alpha \right\| \le \int_T \|f\|\,d\alpha .$$

Důkaz: Nechť f je B-integrovatelná, tj: $f_k \to f$ s.v. a $\int \|f_k - f\| \to 0$.
Již víme, že $\|f\|$ je měřitelná a platí

$$\int \|f\| \, d\mu \le \int \|f - f_k\| + \int \|f_k\| < \infty$$

neboť pro dostatečně velká k je $\int \|f - f_k\| < 1$ a $\int \|f_k\| < \infty$.

Nechť $\|f\| : T \to \mathbb{R}$ je Lebesgueovsky integrovatelná a $f : T \to X$ je měřitelná, tj existují jednoduché funkce $f_k \to f$ s.v.
Položme

$$g_k(t) = \begin{cases} f_k(t) & \|f_k(t)\| \le (1+\varepsilon)\|f\| \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

g_k jsou jednoduché a $g_k \to f$ s.v.
Navíc, podle Lebesgueovy věty o konvergenci platí

$$\int \|g_k - f\| \longrightarrow 0.$$

Je totiž

$$\|g_k - f\| \le \|g_k\| + \|f\| \le (2+\varepsilon)\|f\| \in L^1.$$

Tedy f je B-integrovatelná a $\int_T f = \lim \int g_k$.
Z nerovnosti $\|\int g_k\| \le \int \|g_k\| < (1+\varepsilon) \int \|f\|$
plyne $\|\int f\| \le \int \|f\|$. ■

Prostor B-integrovatelných funkcí z T do X značíme

$$L^1(T, X).$$

<u>Věta 1.3</u> Nechť $f : T \longrightarrow X$ je B-integrovatelná a Y je Banachův prostor.

(i) Je-li $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, potom $Af : T \longrightarrow Y$ je integrovatelná a platí

$$\int_T Af = A \int_T f .$$

(ii) Je-li $A : X \longrightarrow Y$ lineární uzavřené zobrazení takové, že $f(T) \subset D(A)$ a Af je integrovatelná, pak $\int f \in D(A)$ a

$$\int_T Af = A \int_T f .$$

<u>Důkaz (i)</u> Je-li f B-integrovatelná, existují jednoduché funkce $f_k \longrightarrow f$ s.v. a $\int \| f_k - f \| \longrightarrow 0$. Potom jsou Af_k rovněž jednoduché, $Af_k \longrightarrow Af$ s.v. a

$$\int \| Af_k - Af \| \le \int \|A\| \, \|f_k - f\| = \|A\| \int \|f_k - f\| \to 0$$

Tedy $\int Af = \lim \int Af_k = A \lim \int f_k = A \int f$.

(ii) nebudeme dokazovat. ■

<u>Věta 1.4</u> Nechť T je kompaktní metrický prostor, μ konečná borelovská míra na T a $f: T \to X$ spojitá. Potom je f B-integrovatelná.

<u>Důkaz:</u> f je stejnoměrně spojitá, tj

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall t_1, t_2 \quad \rho(t_1, t_2) < \delta \quad \|f(t_1) - f(t_2)\| < \varepsilon .$$

Nechť $\{t_1, t_2, \dots t_k\}$ je δ-síť pro T.
Definujme posloupnost měřitelných množin takto

$$A_1 = B_\delta(t_1), \quad A_2 = B_\delta(t_2) - A_1, \ \dots \ A_k = B_\delta(t_k) - A_{k-1}$$

Funkce $f_\varepsilon(t) = \sum_{j=1}^{k} \chi_{A_j} f(t_j)$ je jednoduchá

a navíc

$$\|f(t) - f_\varepsilon(t)\| = \|f(t) - f(t_j)\| < \varepsilon$$

kde j vybíráme v δ-okolí t.

Tedy

$$\int \|f - f_\varepsilon\| \leq \varepsilon \, \mu(T)$$

Proto $f_{1/n} \to f$ a $\int \|f_{1/n} - f\| \to 0$. ∎

Tedy f je B-integrovatelná.

<u>Křivkový integrál</u>

Nechť $\gamma : [0,1] \longrightarrow \mathbb{C}$ je křivka po částech třídy C^1. Nechť $f : \mathbb{C} \longrightarrow X$ je funkce do Banachova prostoru. Potom definujeme křivkový integrál funkce f přes křivku γ takto:

$$\int_\gamma f = \int_\gamma f(z)\,dz = \int_0^1 f(\gamma(t))\,\gamma'(t)\,dt$$

2. Holomorfní vektorové funkce

Nechť X je komplexní Banachův prostor. Nechť $\Omega \subset \mathbb{C}$ je otevřená množina. Funkce $u : \Omega \longrightarrow X$ je <u>silně holomorfní</u>, jestliže pro každé $z \in \Omega$ existuje derivace

$$u'(z) = \lim_{h \to 0} \frac{u(z+h) - u(z)}{h}.$$

Funkce $u : \Omega \longrightarrow X$ je <u>slabě holomorfní</u>, jestliže pro každé $\varphi \in X'$ je funkce $\varphi \circ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorfní.

Věta 2.1 (Dunford)

Nechť X je komplexní Banachův prostor a $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ otevřená. Funkce $u : \Omega \to X$ je holomorfní (= silně holomorfní), právě když je slabě holomorfní.

Důkaz: Implikace $\Rightarrow$ je zřejmá.

Nechť $u : \Omega \to X$ je slabě holomorfní. Nejprve dokážeme, že je spojitá.

Nechť $z_0 \in \Omega$ a zvolme $r > 0$ tak, aby $B_r(z_0) \subseteq \Omega$.

Nechť $\varphi \in X'$ je libovolné. Definujme funkci $g : B_r(0) \to \mathbb{C}$ předpisem

$$g(h) = \begin{cases} \dfrac{\varphi(u(z_0+h)) - \varphi u(z_0)}{h} & \text{pro } 0<|h|\leq r \\[2ex] (\varphi(u))'(z_0) & \text{pro } h=0 \end{cases}$$

g je spojitá na $B_r(0)$ a tedy omezená.

Tedy množina

$$M = \left\{ \frac{u(z_0+h) - u(z_0)}{h} \in X,\ 0<|h|<r \right\}$$

je slabě ohraničená (tj. $\varphi(M)$ je ohraničená pro každé $\varphi \in X'$).

Lemma

[redacted] Každá slabě ohraničená množina v Banachově prostoru je ohraničená.

Odtud plyne $\|u(z_0+h) - u(z_0)\| \le C|h|$, proto je u spojitá v z_0.

Nechť $\gamma(t) := z_0 + re^{it}$ je křivka ležící i se svým vnitřkem v Ω. Pro každé $\varphi \in X'$ platí Cauchyova formule

$$\varphi(u)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(u)(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

pro všechna z uvnitř $B_r(z_0)$. Protože u je spojitá, existuje integrál

$$\int_\gamma \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^k}\, d\xi$$

Podle věty 1.3 platí

$$\varphi\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^k}\, d\xi\right) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(u(\xi))}{(\xi - z)^k}\, d\xi$$

Proto $\varphi(u)(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{\varphi(u)(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \varphi\left(\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi\right)$

Tedy $$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi.$$

Teď už není těžké dokázat, že u má derivaci

1. CVIČENÍ Z FA II

(1) Pomocí Hahnovy-Banachovy věty dokažte, že pro každé x z NLP X existuje $\varphi \in X'$ tak, že

(i) $\|\varphi\| = 1$

(ii) $\varphi(x) = \|x\|$

(2) Je-li X Banachův prostor, dokažte, že pro každé x je

$$\|x\| = \sup_{\substack{\|\varphi\|=1 \\ \varphi \in X'}} |\varphi(x)|$$

(3) Pomocí předchozího a Banachovy-Steinhausovy věty dokažte, že ze slabé ohraničenosti množiny M v NLP X plyne její ohraničenost (v normě).

(4) Z Cauchyovy formule $u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$ odvozené na konci důkazu věty 2.1 odvoďte, že

$$u'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{u(\xi)}{(\xi - z)^2}\, d\xi .$$