Důsledek 2.2 Pro každou holomorfní funkci $u : \Omega \to X$ platí Cauchyův vzorec

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi$$

pro každou uzavřenou křivku φ v Ω, která má index vůči z roven 1.

Důsledek 2.3 Je-li $u : \Omega \to X$ holomorfní v Ω a φ je uzavřená křivka v Ω stažitelná do bodu, pak

$$\int_{\varphi} u(\xi)\, d\xi = 0 .$$

Důsledek 2.4 Funkce $u : \Omega \to X$ je holomorfní, právě když pro každé $z_0 \in \Omega$ existuje $r > 0$ tak, že pro všechna $z \in B_r(z_0)$ je

$$u(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

kde $a_n \in X$ a řada konverguje lokálně stejnoměrně.

Důkaz: Nechť je u holomorfní. Pak pro $\varphi = z_0 + re^{2\pi i t}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{u(\xi)}{\xi - z}\, d\xi = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varphi} \frac{u(\xi)}{\xi - z_0 + z_0 - z}\, d\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{u(\xi)}{(\xi - z_0)\left(1 - \frac{z - z_0}{\xi - z_0}\right)} \, d\xi =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} u(\xi) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\gamma} \frac{u(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} \, d\xi \right) (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n .$$

Je-li $u(z) = \sum a_n (z - z_0)^n$ je $\varphi(u)(z) = \sum \varphi(a_n)(z - z_0)^n$ také holomorfní, tedy u je holomorfní. ■

$\varphi \in X'$

Důsledek 2.5 (Liouvillova věta)

Je-li $u : \mathbb{C} \to X$ holomorfní a omezená, pak je konstantní.

Důkaz: Za předpokladů věty je pro každé $\varphi \in X'$ rovněž $\varphi(u)$ omezená. Podle Liouvillovy věty je $\varphi(u)$ konstantní. Tedy i u musí být konstantní. (Dokažte proč. Užije se Hahnova - Banachova věta.) ■

3. Spektrální teorie

Nechť X je komplexní Banachův prostor a A je uzavřený lineární ~~[illegible]~~ operátor na X s definičním oborem $D(A)$. Operátor $\lambda id - A$ zapisujeme jako $\lambda - A$.

Rezolventní množina operátoru A – značíme $\rho(A)$ – je množina všech $\lambda \in \mathbb{C}$ takových, že

(1) $\lambda - A$ je prosté

(2) obor hodnot $\lambda - A$ je hustý v X

(3) inverzní zobrazení $(\lambda - A)^{-1}$ je spojité

Spektrum operátoru A je množina

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A),$$

skládá se

- z bodového spektra $\sigma_p(A)$

  $\lambda - A$ není prosté, $\ker(\lambda - A)$ vlastní vektory

  λ vlastní čísla

- ze spojitého spektra $\sigma_c(A)$

  $\lambda - A$ prosté, obor hodnot $\lambda - A$ hustý v X, ale $(\lambda - A)^{-1}$ není spojité

- ze zbytkového spektra $\sigma_r(A)$

  $\lambda - A$ prosté, obor hodnot $\lambda - A$ není hustý v X

<u>Lemma</u> Je-li $\lambda \in \rho(A)$, pak $\lambda - A$ je na. Tedy definiční obor $(\lambda - A)^{-1}$ je celé X a $(\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$ (spojité lin. operátory na X).

<u>Důkaz:</u> Nechť $y \in X$. Existují $x_n \in X$ tak, že $(\lambda - A)x_n \longrightarrow y$. Tedy posloupnost $(\lambda - A)x_n$ je cauchyovská. Ze spojitosti $(\lambda - A)^{-1}$ plyne, že x_n je rovněž cauchyovská. Proto $x_n \longrightarrow x$ a $(\lambda - A)x_n \longrightarrow y$. Z uzavřenosti $\lambda - A$ plyne, že $x \in \mathcal{D}(A)$ a $(\lambda - A)x = y$. Tedy y je v oboru hodnot operátoru $\lambda - A$. ∎

<u>Definice:</u> Resolventa operátoru A je zobrazení

$$R(-, A) : \rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

$$R(\lambda, A) = (\lambda - A)^{-1}.$$

<u>Věta 3.1</u> Množina $\rho(A)$ je otevřená a resolventa je holomorfní funkce $\rho(A) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$. Pro $\lambda, \mu \in \rho(A)$ platí

(1) $R(\lambda, A)\, R(\mu, A) = R(\mu, A)\, R(\lambda, A)$

(2) $R(\lambda, A) - R(\mu, A) = (\mu - \lambda)\, R(\lambda, A)\, R(\mu, A)$

Identita (2) se nazývá Hilbertova resolventní identita.

<u>Důkaz:</u> Pro 3 komplexní čísla $\lambda, \lambda_0, a \neq \lambda, \lambda_0$ platí

$$\frac{1}{\lambda - a} = \frac{1}{\lambda_0 - a - (\lambda_0 - \lambda)} = \frac{1}{\lambda_0 - a} \, \frac{1}{1 - \frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - a}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_0 - a} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_0 - \lambda}{\lambda_0 - a} \right)^k .$$

Řada konverguje pokud $|\lambda_0 - \lambda| < |\lambda_0 - a|$.

Analogicky dokážeme, že

$$R(\lambda, A) = R(\lambda_0, A) \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0, A)^k$$

pro $|\lambda - \lambda_0| < \dfrac{1}{\| R(\lambda_0, A) \|}$.

Za daných podmínek konverguje řada

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_0 - \lambda)^k \, \| R(\lambda_0, A) \|^k$$

Proto je posloupnost

$$R_n = R(\lambda_0, A) \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^k R(\lambda_0, A)^k$$

cauchyovská a konverguje k nějakému $R \in \mathcal{L}(X)$.

Chceme dokázat, že $R = R(\lambda, A)$.

Pro každé $x \in X$ je $R_n x \in \mathcal{D}(A)$. Proto

$$(\lambda - A) R_n x = (\lambda - \lambda_0 + \lambda_0 - A) R_n x =$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^{k+1} R^{k+1}(\lambda_0, A) x + \sum_{k=0}^{n} (\lambda_0 - \lambda)^{k} R^{k}(\lambda_0, A) x$$

$$= x - (\lambda_0 - \lambda)^{n+1} R^{n+1}(\lambda_0, A) x \longrightarrow x$$

Tedy platí $R_n x \longrightarrow R x$

$$(\lambda - A) R_n x \longrightarrow x$$

Proto $Rx \in \mathcal{D}(A)$ a $(\lambda - A) R x = x$.

Tím jsme dokázali, že $R = R(\lambda, A)$.

(Správně bychom měli ještě ukázat, že pro $x \in \mathcal{D}(A)$ je $R_n (\lambda - A) x \longrightarrow x$.)

Závěr: $\rho(A)$ je otevřená a $R(\lambda, A)$ je holomorfní.

Platí

$$(\mu - A)(\lambda - A) R(\lambda, A) R(\mu, A) = Id = (\lambda - A)(\mu - A) R(\lambda, A) R(\mu, A)$$

Aplikujme $R(\mu, A) R(\lambda, A)$ na druhou z rovností.

Tím dostaneme $R(\mu, A) R(\lambda, A) = R(\lambda, A) R(\mu, A)$.

Dále platí:

$$R(\lambda, A) - R(\mu, A) = R(\lambda, A)(\mu - A) R(\mu, A) -$$

$$- R(\lambda, A)(\lambda - A) R(\mu, A) = R(\lambda, A)(\mu - \lambda) R(\mu, A)$$
$$= (\mu - \lambda) R(\lambda, A) R(\mu, A). \qquad \blacksquare$$

Důsledek 3.2 Je-li A spojitý lineární operátor, pak spektrum $\sigma(A)$ je neprázdná kompaktní množina obsažená v

$$\{\lambda \in \mathbb{C}, \ |\lambda| \leq \|A\|\}.$$

Důkaz $\sigma(A) = \mathbb{C} - \rho(A)$ je uzavřená množina. Pro $\lambda > \|A\|$ dokážeme podobně jako v předch. větě, že

$$R(\lambda, A) = \frac{1}{\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k} \in \mathcal{L}(X).$$

Tedy $\sigma(A)$ je omezená a tudíž kompaktní. Pokud by $\sigma(A) = \emptyset$, pak pro $|\lambda| > \|A\|$ platí

$$\|R(\lambda, A)\| \leq \frac{1}{|\lambda|} \sum \frac{\|A\|^k}{|\lambda|^k} = \frac{1}{|\lambda|\left(1 - \frac{\|A\|}{|\lambda|}\right)} =$$

$$= \frac{1}{|\lambda| - \|A\|} \longrightarrow 0 \text{ pro } |\lambda| \to \infty.$$

Tedy $R(\lambda, A) : \mathbb{C} \to \mathcal{L}(X)$ by byla omezená, tedy podle Liouvilleovy věty konstantní tedy $R(\lambda, A) \equiv 0$, což je spor s tím, že

~~[illegible]~~ $\mathcal{D}(A) = X$. ■

<u>Definice</u> Pro $A \in \mathcal{L}(X)$ definujeme <u>spektrální poloměr</u>

$$r(A) = \max \{ |\lambda|,\ \lambda \in \sigma(A) \}.$$

V předchozím důsledku jsme dokázali

$$r(A) \leq \|A\|.$$

<u>Věta 3.3 (Gelfand)</u>

Nechť $A \in \mathcal{L}(X)$. Potom existuje

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}$$

a rovná se $r(A)$.

<u>Důkaz:</u> Platí

$$\inf_n \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \liminf_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

K existenci limity stačí tedy dokázat, že

$$\limsup_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq \inf_n \{ \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \} = r.$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $m \in \mathbb{N}$ tak, že

$$\|A^m\|^{\frac{1}{m}} < r + \varepsilon$$

Pro $n = mp + q$, kde $q < m$ platí

$$\|A^n\| \leq \|A^{mp}\| \, \|A^q\| \leq \|A^m\|^p \, \|A^q\| \leq C\,(r+\varepsilon)^{mp}$$

kde $C = \max\{\|A^i\|^{\cancel{b}}, 0 \leq i < m\}$. Odtud

$$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq C^{\frac{1}{n}}\,(r+\varepsilon)^{\frac{mp}{n}} \longrightarrow r+\varepsilon \text{ pro } n \to \infty .$$

Takže $\limsup \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \leq r+\varepsilon$. Limitním přechodem $\varepsilon \to 0$ dostaneme požadovanou nerovnost.

Řada $\sum_{k=0}^{\infty} \|A^k\| z^k$ má poloměr konvergence

$$\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}}},$$ tedy řada

$$\frac{1}{\lambda}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^k}$$

konverguje pro $\lambda > \lim\limits_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r$

a je rovna $R(\lambda, A)$. Proto

$$r(A) \leq \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r .$$

Zvolme $\rho > r$ a křivku $\varkappa(t) = \rho e^{it}$, $t \in [0, 2\pi]$.

Potom

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa_\rho} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\varkappa_\rho} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\lambda^{k+1-n}}\, d\lambda$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_\rho} \frac{A^k}{\lambda^{k+1-n}}\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_\rho} \frac{A^n}{\lambda}\, d\lambda = A^n$$

Protože $\lambda^n R(\lambda, A)$ je holomorfní pro $|\lambda| > r(A)$ platí z Cauchyovy věty rovnost

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_{r_1}} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda$$

pro každé $r_1 > r(A)$. Tedy

$$\|A^n\| = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa_{r_1}} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda \right\| \le$$

$$\le \frac{1}{2\pi} r_1^n \max_{|\lambda| = r_1} \|R(\lambda, A)\| \cdot 2\pi r_1$$

$\|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le r_1^{n+1} C$ Limitním přechodem

$$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} \le r_1$$

Tedy $$\lim_{n \to \infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = r(A). \quad \blacksquare$$

<u>Důsledek 3.4</u> Nechť $A \in \mathcal{L}(X)$. Pro každou křivku $\varkappa$ v $\rho(A)$ takovou, že její index vůči bodům $\sigma(A)$ je 1, platí

$$A^n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\varkappa} \lambda^n R(\lambda, A)\, d\lambda.$$

2. CVIČENÍ Z FA II

ÚLOHA 1 Určete spektrum operátoru A na prostoru $X = C[0,1]$, jestliže

(1) $(Au)(t) = u'(t)$ a $D(A) = \{u \in C^1[0,1] : u(0) = 0\}$

(2) $A(u)(t) = u'(t)$ a $D(A) = C^1[0,1]$

(3) $A(u)(t) = u'(t)$ a $D(A) = \{u \in C^1[0,1],\ u(0) = u(1)\}$

Dokažte, že A je ve všech případech uzavřené.

Uzavřenost A: $u_n \rightrightarrows u$ a $u_n' \rightrightarrows f$

Pak u má derivaci a $u' = f$.

(1) $\lambda u - u' = 0$

$$u' = \lambda u \quad \text{a} \quad u(0) = 0$$

$$u(t) = u(0) e^{\lambda t} = 0.$$

Tedy A je prosté. Dále

$$\lambda u - u' = f$$

má řešení

$$u(t) = -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$$

Evidentně $f \longmapsto -\int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\,ds$ je spojité.

Tedy $\sigma(A) = \emptyset$.

2. CVIČENÍ ②

(2)

$u(t) = e^{\lambda t}$ je vlastní funkce pro každé λ

$$\sigma(A) = \mathbb{C}$$

(3) $u(t) = e^{\lambda t}$ je vlastní funkce pro

$\lambda = 2\pi i n \qquad \sigma(A) = \{2\pi i n : n \text{ celé}\}$

Pro ostatní λ je

$$\left[(\lambda - A)^{-1} f\right](t) = c\, e^{\lambda t} - \int_0^t e^{\lambda(t-s)} f(s)\, ds$$

kde $c = \frac{1}{e^{\lambda}-1} \int_0^1 e^{\lambda(1-s)} f(s)\, ds$

ÚLOHA 2 $\quad X = L^2(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ spojitá funkce. Operátor M

$M_\varphi u = \varphi \cdot u$ (multiplikativní operátor)

Definiční obor $\mathcal{D}(M_\varphi) = \{u \in L^2, \varphi u \in L^2\}$.

(1) M_φ je uzavřené a má hustý definiční obor.

(2) $\sigma(M_\varphi) = \overline{\varphi(\mathbb{R}^n)}$

$\sigma_r(M_\varphi) = \emptyset$

$\sigma_p(M_\varphi) = \{\lambda \in \mathbb{C}, \mu(\varphi^{-1}(\lambda)) > 0\}$

(3) Je-li φ reálné, je M_φ samoadjungované.