Označení: $A \in \mathcal{L}(X)$

$\mathcal{F}(A)$ funkce $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorfní na nějakém okolí $\sigma(A)$

Pro $f \in \mathcal{F}(A)$, která je holomorfní na $U \supset \sigma(A)$ uvažujme systém Γ uzavřených křivek po částech C^1 v U takových, že

$\mathrm{ind}_\Gamma \lambda = 1$ pro všechna $\lambda \in \sigma(A)$

$\mathrm{ind}_\Gamma \lambda = 0$ pro všechna $\lambda \in \mathbb{C} \setminus U$.

Definujme

$$f(A) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma f(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda \in \mathcal{L}(X).$$

Integrál má smysl a je nezávislý na výběru Γ.

Věta 3.5 Zobrazení $\mathcal{F}(A) \to \mathcal{L}(X) : f \mapsto f(A)$ je lineární a má následující vlastnosti:

(i) $(f \cdot g)(A) = f(A)\, g(A)$.

(ii) Pro $f(\lambda) = \lambda^n$ je $f(A) = A^n$.

(iii) Jsou-li f_n holomorfní na U a $f_n \rightrightarrows f$ na U, pak $f_n(A) \to f(A)$ v $\mathcal{L}(X)$.

(iv) Pro $f \in \mathcal{F}(A)$ je

$$\sigma(f(A)) = f(\sigma(A))$$

(v) Nechť $f \in \mathcal{F}(A)$, $g \in \mathcal{F}(f(A))$. Potom

$$g(f(A)) = (g \circ f)(A).$$

<u>Důkaz:</u>

(i) Γ_1, Γ_2 dva systémy křivek v U

$$\operatorname{ind}_{\Gamma_2} \lambda = 1 \quad \text{pro } \lambda \in \Gamma_1$$

$$\operatorname{ind}_{\Gamma_1} \lambda = 0 \quad \text{pro } \lambda \in \Gamma_2$$

S využitím resolventní identity

$$f(A)g(A) = \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda\right)\left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} g(\mu) R(\mu, A)\, d\mu\right)$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} f(\lambda) g(\mu) R(\lambda, A) R(\mu, A)\, d\mu\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{(2\pi i)} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} \frac{g(\mu)}{\mu - \lambda}\, d\mu\right) R(\lambda, A)\, d\lambda$$

$$- \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_2} g(\mu) \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} \frac{f(\lambda)}{\mu - \lambda}\, d\lambda\right) R(\mu, A)\, d\mu =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_1} f(\lambda) g(\lambda) R(\lambda, A)\, d\lambda - 0 = (f \cdot g)(A)$$

(ii) Dokázali jsme v důkaze věty 3.3.

(iii)

$$\| f_n(A) - f(A) \| \le \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |f_n(\lambda) - f(\lambda)| \, \|R(\lambda, A)\| \, d\lambda$$

$\downarrow$

0 pro $n \to \infty$.

(iv) Nejprve dokážeme, že $\sigma(f(A)) \subseteq f(\sigma(A))$.

$\lambda \notin f(\sigma(A))$. Definujme $g(\mu) = \dfrac{1}{\lambda - f(\mu)}$

$$(\lambda - f(A))\, g(A) = g(A)(\lambda - f(A)) = (g(\lambda - f))A$$

$$= 1(A) = id$$

$g(A) = (\lambda - f(A))^{-1} \in \mathcal{L}(X)$, proto $\lambda \notin \sigma(f(A))$ ✓

Důkaz $f(\sigma(A)) \subseteq \sigma(f(A))$.

Nechť $f(\lambda) \notin \sigma(f(A))$

$$h(\mu) = \frac{f(\lambda) - f(\mu)}{\lambda - \mu} \quad \text{pro } \mu \ne \lambda$$

$$h(\lambda) = f'(\lambda)$$

Potom $h(\mu) \in \mathcal{F}(A)$, neboť

$$\boxed{\begin{aligned} f(\mu) &= \sum_0^\infty a_n (\mu - \lambda)^n \\ h(\mu) &= \frac{\sum_1^\infty a_n (\mu-\lambda)^n}{\mu - \lambda} \\ &= \sum_{n=0}^\infty a_{n+1} (\mu - \lambda)^n \end{aligned}}$$

$$h(A)(\lambda - A) = h(\lambda - \mu)(A) = (f(\lambda) - f)(A)$$

$$= f(\lambda) - f(A)$$

Existuje $(f(\lambda) - f(A))^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

$$(f(\lambda) - f(A))^{-1} h(A)(\lambda - A) = id$$

tedy $(\lambda - A)$ je prosté

$$(\lambda - A)\, h(A) \left(f(\lambda) - f(A)\right)^{-1} = id$$

$\lambda - A$ je surjektivní a

$$\left(f(\lambda) - f(A)\right)^{-1} h(A) = (\lambda - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Tedy $\lambda \notin \sigma(A)$. ∎

Nechť A je nyní uzavřený operátor na Banachově prostoru X. Podmnožinu $\sigma_1 \subseteq \sigma(A)$ nazveme <u>spektrální množinou</u>, je-li uzavřená, ohraničená a současně otevřená v $\sigma(A)$. Takovou množinu lze oddělit konečnou soustavou po částech C^1-křivek Γ od množiny $\sigma_2 = \sigma(A) \setminus \sigma_1$ tak, že

$$\begin{aligned} \operatorname{ind}_\Gamma \lambda &= 1 \quad \text{pro } \lambda \in \sigma_1 \\ \operatorname{ind}_\Gamma \lambda &= 0 \quad \text{pro } \lambda \in \sigma_2 . \end{aligned}$$

<u>Věta 3.6</u> Nechť A je uzavřený operátor na Banachově prostoru X. $\sigma_1 \subseteq \sigma(A)$ spektrální množina a Γ odděluje σ_1 od $\sigma_2 = \sigma(A) \setminus \sigma_1$. Potom

$$P = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma R(\lambda, A)\, d\lambda$$

je spojitá projekce v X, $P(X) \subset \mathcal{D}(A)$ a prostory $X_1 = P(X)$ a $X_2 = (Id-P)X$ jsou A-invariantní, $A_1 := A/X_1$ je spojité a $A_2 := A/X_2$ uzavřené zobrazení, $\sigma(A_1)=\sigma_1$, $\sigma(A_2) = \sigma_2$.

<u>Důkaz:</u> Z definice P pomocí integrálu

$$P = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda,A)\,d\lambda$$

lze shora odhadnout normu P. Tedy P je spojitý operátor.

Stejně jako ve větě 3.5(i) dokážeme

$$P^2 = P \qquad (\text{neboť } 1\cdot 1 = 1).$$

To znamená, že P je projekce na $P(X)$.

Pro $x \in X$ je $R(\lambda,A)x \in \mathcal{D}(A)$ a $AR(\lambda,A)x$ je integrovatelná. Proto

$$APx = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma AR(\lambda,A)x\,d\lambda$$

a tedy $P(X) \subset \mathcal{D}(A)$.

Pro $x \in \mathcal{D}(A)$ navíc platí

$$APx = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma AR(\lambda,A)x\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma R(\lambda,A)Ax\,d\lambda$$

$$= PAx.$$

Proto je $X_1 = P(X)$ A-invariantní a $A_1 = A/X =$

$$= AP/X_1 \text{ je spojitý.}$$

Dále
$$A(\mathrm{Id}-P)x = (\mathrm{Id}-P)Ax$$
pro $x \in \mathcal{D}(A)$, je i $X_2 = (I-P)X$ A-invariantní.
Z ~~uzavřenosti~~ uzavřenosti A plyne uzavřenost A_2.
Z rovnosti $A = A_1 \oplus A_2$ plyne, že pro
$\lambda \in \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$ je
$$R(\lambda, A) = R(\lambda, A_1) \oplus R(\lambda, A_2).$$

Obráceně pro $\lambda \in \rho(A)$ je
$$R(\lambda, A_1) = P\,R(\lambda, A)/X_1 .$$
$$R(\lambda, A_2) = (\mathrm{Id}-P)\,R(\lambda, A)/X_2 .$$
Tedy $\rho(A) = \rho(A_1) \cap \rho(A_2)$, což implikuje
$$\sigma(A) = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2).$$

Nechť $\mu \notin \sigma_1$. Pak existuje Γ tak, že
$$\mathrm{ind}_\Gamma \lambda = 1 \quad \text{pro } \lambda \in \sigma_1$$
$$\mathrm{ind}_\Gamma \mu = 0 .$$
Pro $B = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{R(\lambda, A)}{\mu - \lambda}\, d\lambda \in \mathcal{L}(X)$

platí pro $x \in X_1$:
$$(\mu - A)Bx = B(\mu - A)x = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma (\mu - A)\frac{R(\lambda, A)}{\lambda - \mu}\, x\, d\lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma (\mu - \lambda + \lambda - A)\frac{R(\lambda, A)}{\lambda - \mu}\, x\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int \left(R(\lambda, A) + \frac{1}{\lambda - \mu}\right)$$
$$= Px = x .$$

Tedy $\mu \notin \rho(A_1)$. Proto $\sigma(A_1) \subseteq \sigma_1$. Analogicky ukážeme $\sigma(A_2) \subseteq \sigma_2$. Odtud ~~plyne~~ a z $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ plyne

$$\sigma(A_1) = \sigma_1, \quad \sigma(A_2) = \sigma_2 . \qquad \blacksquare$$

4. OPERÁTORY NA HILBERTOVĚ PROSTORU

Základní vlastnosti Hilbertových prostorů najdete ve skriptech O. Došlého str. 14–20

~~[illegible]~~ Nechť X je Hilbertův prostor. Připomeneme si, jak se reprezentují spojité lineární funkcionály na X.

Věta 4.1 (Rieszova věta o reprezentaci)

Zobrazení $X \longrightarrow X'$ definované předpisem

$$x \longmapsto \langle -, x \rangle$$

je anti~~sym~~lineární izomorfismus X na X'. Jinými slovy, ke každému $f \in X'$ existuje

$\boxed{\text{CVIČENÍ}}$ $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ otevřená, $u : \Omega \to \mathbb{K} (= \mathbb{R}, \mathbb{C})$ lebesgueovsky integrovatelná. Pro $1 \le p < \infty$ označme

$$\|u\|_p = \|u\|_{p,\Omega} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

$$\|u\|_\infty = \|u\|_{\infty,\Omega} := \operatorname{ess\,sup} |u(x)| =$$

$$= \inf_{\mu A = 0} \sup_{x \in \Omega - A} |u(x)|$$

$u \sim v$ jestliže $u(x) = v(x)$ s.v. Pak

$$\|u - v\|_p = \|u - v\|_\infty = 0.$$

$L^p = L^p(\Omega)$ jsou třídy ekvivalence funkcí u takových, že $\|u\|_p < \infty$.

$C_c(\Omega)$ spojité funkce $u : \Omega \to \mathbb{K}$, jejichž nosič

$$\operatorname{supp} u := \overline{\{x,\ u(x) \neq 0\}}$$

je kompaktní množina. Norma v $C_c(\Omega)$ je supremová.

<u>Tvrzení</u>: Pro $1 \le p < \infty$ je $C_c(\Omega)$ hustý v $L^p(\Omega)$.

Důkaz pro $p = 1$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. $C_c(\Omega) \subset L^p(\Omega)$.
Pro $u \in L^1$ a $\varepsilon > 0$ musíme najít $\varphi \in C_c$ tak, že

$$\|u - \varphi\|_1 < \varepsilon.$$

Lze předpokládat, že u je nezáporná. $u(x) \ge 0$,

$$\int_\Omega u(x)dx = \sup \left\{ \int s(x)\,dx,\ s \text{ jednoduchá},\ 0 \le s \le u \right\}$$

Stačí tedy uvažovat

$$u = \sum_{i=1}^{n} a_i \cdot \chi_{A_i}$$

Stačí uvažovat $\quad u = \chi_{A} \quad \mu(A) < \infty$, A měřitelná

$$A_k = \{ x \in A : |x| < k , \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \tfrac{1}{k} \}$$

$u_k = \chi_{A_k} \qquad u_k \nearrow u \qquad$ podle Leviho věty

$$\lim \int u_k = \int u .$$

Můžeme předpokládat, že

$u = \chi_A \qquad A \subset \Omega$ omezená měřitelná

$\operatorname{dist}(A, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) > \delta$ pro vhodné $\delta > 0$.

$$x \in A \Rightarrow \|x\| < K$$

Z vlastností Lebesgueovy míry v $\mathbb{R}^n$ existuje $F \subset A$ uzavřená, $G \supset A$ otevřená tak, že

$$\mu(G \setminus F) < \varepsilon$$

$$\tilde{G} = \{ x \in G \cap \Omega : |x| < K , \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \Omega) < \delta \}$$

Pak je $\tilde{G}$ otevřená, omezená a v Ω.

$$F \subset A \subset \tilde{G} \subset \Omega$$

$$\mu(\tilde{G} \setminus F) < \varepsilon .$$

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \tilde{G})}{\operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^n \setminus \tilde{G}) + \operatorname{dist}(x, F)}$$

$$\varphi(x) = 1 = u(x) \quad \text{pro} \quad x \in F$$

$$\varphi(x) = 0 = u(x) \quad \text{pro} \quad x \notin \tilde{G}$$

$$\varphi(x) \in [0,1]$$

$$\|u - \varphi\|_1 = \int_{\tilde{G} \setminus F} |u(x) - \varphi(x)| \, dx \leq \lambda(\tilde{G} \setminus F) < \varepsilon.$$

4. CVIČENÍ

$\mathcal{D}(\Omega)$ prostor C^∞ funkcí s kompaktním nosičem v Ω. Dokážeme, že jsou husté v $L^p(\Omega)$ pro $1 \leq p < \infty$. Budeme opět dělat jen pro $p = 1$.

$$w \in \mathcal{D}(B_1) \qquad \int_{B_1} w = 1$$

$$w_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} w\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \qquad \text{Potom} \qquad \int_{B_\varepsilon} w_\varepsilon = 1.$$

Je-li $u \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ (integrovatelná na okolí každého bodu) položíme

$$w_\varepsilon * u(x) = R_\varepsilon u(x) = \int_{\mathbb{R}^n} w_\varepsilon(x-y)\, u(y)\, dy$$

$$= \varepsilon^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} w\left(\frac{x-y}{\varepsilon}\right) u(y)\, dy =$$

$$= \int_{B_1} w(z)\, u(x - \varepsilon z)\, dz$$

Tato funkce má derivace všech řádů, $R_\varepsilon u \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$.

TVRZENÍ $u \in L^1(\Omega)$, $\|R_\varepsilon u\|_1 \le \|u\|_1$

$\|R_\varepsilon u - u\|_p \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$.

Dk

$$\|R_\varepsilon u\|_1 \le \int_{B_1} w(z) \int_\Omega |u(x-\varepsilon z)|\,dx\,dz \le$$

$$\le \int_{B_1} w(z) \int_\Omega |u(y)|\,dy\,dz = \|u\|_1$$

$\|R_\varepsilon u - u\| \to 0$ nejprve pro $u \in C_c(\Omega)$.

TVRZENÍ $\mathcal{D}(\Omega)$ je hustá v $L^p(\Omega)$

$w(x) = e^{-\frac{1}{1-\|x\|^2}}$ pro $|x| < 1$, $w(x) = 0$ má požadované vlastnosti

---

Příklad $C[0,1]$ není hustý v $L^\infty[0,1]$.