Tedy $\mu \notin \rho(A_1)$. Proto $\sigma(A_1) \subseteq \sigma_1$.
Analogicky ukážeme $\sigma(A_2) \subseteq \sigma_2$. Odtud ~~plyne~~ a z $\sigma(A) = \sigma_1 \cup \sigma_2 = \sigma(A_1) \cup \sigma(A_2)$ plyne

$$\sigma(A_1) = \sigma_1, \quad \sigma(A_2) = \sigma_2. \qquad \blacksquare$$

4. OPERÁTORY NA HILBERTOVĚ PROSTORU

Základní vlastnosti Hilbertových prostorů najdete ve skriptech O. Došlého str. 14–20

Nechť X je Hilbertův prostor. Připomeneme si, jak se reprezentují spojité lineární funkcionály na X.

<u>Věta 4.1 (Rieszova věta o reprezentaci)</u>

Zobrazení $X \longrightarrow X'$ definované předpisem

$$x \longmapsto \langle -, x \rangle$$

je antilineární izomorfismus X na X'.
Jinými slovy, ke každému $f \in X'$ existuje

platí jedno $x \in X$ tak, že
$$f(y) = \langle y, x \rangle .$$

Důkaz Dosly, str 42(F).

<u>Adjungované zobrazení</u> Nechť $A : X \to Y$ je lineární zobrazení mezi Hilbertovými prostory X a Y s hustým definičním oborem $\mathcal{D}(A)$ v X. Adjungované zobrazení $A^* : Y \longrightarrow X$ má definiční obor
$$\mathcal{D}(A^*) = \{ y \in Y, \ x \longmapsto \langle Ax, y \rangle \text{ je spojité zobrazení } X \to \mathbb{C} \}$$
a je definováno rovností
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, A^* y \rangle$$
pro všechna $x \in \mathcal{D}(A)$, $y \in \mathcal{D}(A^*)$.

Operátor $A : X \to X$ s hustým definičním oborem je samoadjungovaný, jestliže
$$\mathcal{D}(A) = \{ y \in X, \ x \longmapsto \langle Ax, y \rangle \text{ je spojité} \}$$
a platí
$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle \quad \forall x, y \in \mathcal{D}(A).$$

Věta 4.2 Nechť A je samoadjungovaný spojitý lineární operátor. Potom jeho spektrální poloměr je
$$r(A) = \|A\|.$$

Důkaz: Platí
$$\|A^2\| = \sup_{\|x\|\le 1} \|A^2 x\| = \sup_{\|x\|,\|y\|\le 1} |\langle A^2 x, y\rangle| \ge \sup_{\|x\|\le 1} |\langle A^2 x, x\rangle|$$
$$= \sup_{\|x\|\le 1} |\langle Ax, Ax\rangle| = \|A\|^2$$

Proto
$$r(A) = \lim_{n\to\infty} \|A^n\|^{\frac{1}{n}} = \lim_{k\to\infty} \|A^{2^k}\|^{\frac{1}{2^k}} = \lim \left(\|A\|^{2^k}\right)^{\frac{1}{2^k}} = \|A\|.$$ ∎

Lemma 4.3 Nechť A je samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru nad $\mathbb{C}$. Potom

(1) $\sigma_p(A) \subseteq \mathbb{R}$ přičemž vlastní vektory k různým vlastním číslům jsou navzájem kolmé

(2) $\sigma_r(A) = \emptyset$

(3) $\sigma(A) \subseteq \mathbb{R}$.

Důkaz: (1) Nechť x je vlastní vektor k vl. číslu λ
$$\lambda\langle x,x\rangle = \langle Ax, x\rangle = \langle x, Ax\rangle = \bar{\lambda}\langle x,x\rangle$$

Odtud plyne že $\lambda = \bar{\lambda}$, tedy $\lambda \in \mathbb{R}$.

Nechť x_1, x_2 jsou vlastní vektory k $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Potom

$$\lambda_1 \langle x_1, x_2 \rangle = \langle A x_1, x_2 \rangle = \langle x_1, A x_2 \rangle = \bar{\lambda}_2 \langle x_1, x_2 \rangle$$

Tedy $\quad (\lambda_1 - \bar{\lambda}_2) \langle x_1, x_2 \rangle = (\lambda_1 - \lambda_2) \langle x_1, x_2 \rangle = 0$

Odtud $\quad \langle x_1, x_2 \rangle = 0$.

(2) Nechť $\lambda \in \sigma_r(A)$. Označme $X_\lambda = \overline{\mathcal{R}(\lambda - A)}$

Protože $\lambda \in \sigma_r(A)$, existuje $0 \neq y \in X_\lambda^\perp$.

Pro $x \in \mathcal{D}(A)$ pak platí

$$0 = \langle y, (\lambda - A) x \rangle$$

Zobrazení $\quad x \longmapsto \langle A x, y \rangle = \langle \bar{\lambda} x, y \rangle$

je potom spojité a proto $y \in \mathcal{D}(A^*) = \mathcal{D}(A)$.

$$\langle (\bar{\lambda} - A) y, x \rangle = \langle y, (\lambda - A) x \rangle = 0$$

Tedy (z hustoty $\mathcal{D}(A)$) plyne

$$(\bar{\lambda} - A) y = 0 \quad a \quad \bar{\lambda} \in \sigma_p(A).$$

Podle (1) $\bar{\lambda} = \lambda$, takže $\lambda \in \sigma_p(A) \cap \sigma_r(A)$, spor.

(3) Nechť $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Potom podle (1) a (2) je $\lambda \in \rho(A) \cup \sigma_c(A)$. Pro $x \in \mathcal{D}(A)$ dokážeme

$$\|(\lambda - A) x\|^2 = \langle \lambda - A x, \lambda x - A x \rangle = |\lambda|^2 \|x\|^2 - \lambda \langle A x, x \rangle$$
$$- \bar{\lambda} \langle A x, x \rangle + \|A x\|^2 = \left((\mathrm{Re}\,\lambda)^2 + (\mathrm{Im}\,\lambda)^2 \right) \|x\|^2 - 2 \mathrm{Re}\,\lambda$$
$$\langle A x, x \rangle + \langle A x, A x \rangle$$

$$= (\operatorname{Im}\lambda)^2\|x\|^2 + \|\operatorname{Re}\lambda\, x - Ax\|^2 \geq (\operatorname{Im}\lambda)^2\|x\|^2$$

Tedy $(\lambda - A)^{-1}$ je spojité a tedy $\lambda \in \rho(A)$.
Proto $\sigma_c(A) \subseteq \mathbb{R}$. ■

Věta 4.4 (Spektrum kompaktního operátoru)

Nechť X je Banachův prostor a $A \in \mathcal{L}(X)$ kompaktní operátor. Potom

(1) je-li $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$, pak $\lambda \in \sigma_p(A)$ a $\dim \operatorname{Ker}(\lambda - A) < \infty$.

(2) je-li $\delta > 0$, pak $\{\lambda \in \sigma(A), |\lambda| > \delta\}$ je konečná.

Viz také skripta O. Došlého, str. 60-62.

Důkaz: (1) $\lambda \in \sigma(A) \setminus \{0\}$. Je-li $\lambda \notin \sigma_p(A)$, potom $\lambda - A$ je prosté a podle Fredholmovy alternativy (Nastane právě jeden z případů $R(\lambda - A) = X$ nebo $\operatorname{Ker}(\lambda - A) \neq \{0\}$. Důkaz viz věta 4.32 z Došlého.) je $R(\lambda - A) = X$. Podle věty o otevřeném zobrazení je $(\lambda - A)^{-1}$ spojité, proto $\lambda \in \rho(A)$. Zbývající tvrzení byla dokázána ve skriptech O. Došlého.

<u>Důsledek 4.5</u> (Hilbert-Schmidt) Nechť A je kompaktní samoadjungovaný operátor na Hilbertově prostoru X. Pak existuje ortonormální množina $S \subset X$ tvořená vlastními vektory operátoru A taková, že $\overline{\operatorname{Lin} S} = X$.

<u>Důkaz</u> $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots$ nenulová vlastní čísla $e_1, e_2, \dots e_n$ vlastní vektory

$$\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$$

$X_0 = \{e_i\}^\perp$. Pro $x_0 \in X_0$ je

$$\langle Ax, e_n \rangle = \langle x, Ae_n \rangle = \lambda_n \langle x, e_n \rangle = 0$$

takže $A(X_0) \subset X_0$. Operátor $B = A/X_0$ je kompaktní a samoadjungovaný. B nemá nenulové vlastní čísla, proto

$$\|B\| = r(B) = 0$$

Tedy $X_0 = \operatorname{Ker} A$. Doplníme e_n o ortonormální bázi X_0. ∎

Platí
$$x = \sum_{n=1}^{\infty} \langle x, e_n \rangle e_n + P_0 x \leftarrow \text{kolmá projekce na } X_0$$

$$Ax = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \langle x, e_n \rangle e_n$$

je-li P_λ kolmá projekce na $\operatorname{Ker}(\lambda - A)$, pak

$$x = \sum_{\lambda \in \sigma(A)}' P_\lambda x$$

$$Ax = \sum_{\lambda \in \sigma(A)}' \lambda P_\lambda x$$

Pro každou borelovskou množinu Ω definujeme projekci

$$P_\Omega = \sum_{\lambda \in \Omega \cap \sigma(A)}' P_\lambda$$

Toto je míra s hodnotami v množině

$$\{ P \in \mathcal{L}(X),\ P = P^*,\ P^2 = P \}$$

(spojité kolmé projekce).

Naším cílem bude zobecnit toto tvrzení pro obecné samoadjungované operátory na Hilbertově prostoru.

<u>Rozklad jednotky</u> v Hilbertově prostoru X je systém kolmých projekcí přiřazených borelovským množinám v $\mathbb{R}$

$$\Omega \in \mathcal{B} \longmapsto P_\Omega \in \mathcal{L}(X)$$

takový, že

(1) $P(\emptyset) = 0,\quad P(\mathbb{R}) = Id$

(2) $P(\Omega_1 \cap \Omega_2) = P(\Omega_1) \circ P(\Omega_2)$

(3) $P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\Omega_n)$ jsou-li Ω_n disjunktní

Hlavní věta celé teorie stanoví korespondenci mezi samoadjungovanými operátory A na X a rozklady jednotky na X.

Přiřazení $\quad A \longmapsto \{P(\Omega)\}$

pro A spojité spočívá v tom, že definujeme $g(A)$ pro každou omezenou borelovskou funkci g na spektru $\Sigma = \sigma(A)$. Potom

$$P(\Omega) = \chi_\Omega(A).$$

Přiřazení $\quad \{P(\Omega)\} \longmapsto A$ je dána pomocí integrálu

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP(\Omega)$$

neboli

$$\langle Ax, y\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\underbrace{\langle P(\Omega)x, y\rangle}_{\mu_{x,y}}$$

kde $\mu_{x,y}$ je komplexní míra definovaná pomocí rozkladu jednotky.

<u>Lemma 4.6</u> Nechť p je ~~[illegible]~~ polynom a A spojitý samoadjungovaný ~~[illegible]~~ operátor na X. Potom

$$\|p(A)\|_{\mathcal{L}(X)} = \max_{\mu \in \sigma(A)} |p(\mu)|$$

<u>Důkaz</u> Nechť p je pouze reálný polynom. Potom $p(A)$ je samoadjungovaný, a proto platí

$$\|p(A)\| = r(p(A)) = \max_{\lambda \in \sigma(p(A))} |\lambda| =$$

$$= \max_{a \in \sigma(A)} |p(a)|. \qquad \blacksquare$$

Pro p komplexní je

$$\|p(A)\|^2 = \sup_{\|x\| \le 1} \langle p(A)x, p(A)x \rangle = \sup_{\|x\| \le 1} \langle \bar{p}(A) \cdot p(A)x, x \rangle$$

$$= \sup_{\|x\| \le 1} \langle (\bar{p}\, p)(A)x, x \rangle = |p|^2(A) = \max_{a \in \sigma(A)} |p|^2(a).$$

Všimněte si, že $|p|^2 = p\bar{p}$ je rovněž polynom.

Nechť $\Sigma = \sigma(A)$ a $\mathcal{P}$ je systém polynomů zúžený na kompaktní množinu Σ. Máme homomorfismus algebry $\mathcal{P}$ do $\mathcal{L}(X)$, který navíc splňuje

(1) $\Phi(1) = id$

(2) $\Phi(\bar{p}) = \Phi(p)^*$

(3) $\|\Phi(f)\|_{\mathcal{L}(X)} = \|f\|_{C(\Sigma)}$

P odděluje body v Σ, proto podle Stoneovy - Weierstrassovy věty je hustý v $C(\Sigma)$. Vzhledem k tomu, že Φ je izometrie do Banachova prostoru, lze ji rozšířit na $C(\Sigma)$.

<u>Věta 4.7</u> Nechť X je komplexní Hilbertův prostor, $A \in \mathcal{L}(X)$ samoadjungované. Potom existuje jediné zobrazení

$$\Phi : C(\Sigma) \longrightarrow \mathcal{L}(X)$$

s vlastnostmi

(1) Φ je $*$-homomorfismus algebry $C(\Sigma)$ do algebry $\mathcal{L}(X)$, tj. Φ je lineární,

$\Phi(f \cdot g) = \Phi(f) \circ \Phi(g)$

$\Phi(1) = id$

$\Phi(\bar{f}) = \Phi(f)^*$

(2) $\Phi(id_\Sigma) = A$

(3) Φ je izometrie

(4) je-li $f \geq 0$, je $\langle \Phi(f)x, x \rangle \geq 0$.

(5) $f(\sigma(A)) = \sigma(f(A))$.

<u>Důkaz</u> Konstrukce Φ splňujícího (1), (2) a (3) zřejmá z předchozího. Jednoznačnost při splnění (1), (2), (3) je

také zřejmá. Zbývá dokázat (4) a (5).

(4) $\langle f(A)x, x\rangle = \langle (\sqrt{f}\cdot\sqrt{f})(A)x, x\rangle = \langle \sqrt{f}(A)x, \sqrt{f}(A)x\rangle \geq 0$

(5) Nejprve dokážeme $\sigma(f(A)) \subseteq f(\sigma(A))$. Je-li $\lambda \notin f(\sigma(A))$, pak $\frac{1}{\lambda - f(u)} = g(u)$ spojitá funkce na $\sigma(A)$.

Pak $g(A)\cdot(\lambda - f(A)) = id$, a proto $\lambda \notin \sigma(f(A))$.

Dále dokážeme $f(\sigma(A)) \subseteq \sigma(f(A))$. Nechť $\lambda \in \Sigma = \sigma(A)$ a $f(\lambda) \notin \sigma(f(A))$. Potom existuje

$$(f(\lambda) - f(A))^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Zvolme polynom p tak, že $\|p - f\|_{C(\Sigma)} \leq \frac{1}{2}\|(f(\lambda) - f(A))^{-1}\|$.

Potom existuje $(p(\lambda) - p(A))^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ podle následujícího lemmatu.

Položme $h(u) = \frac{p(\lambda) - p(u)}{\lambda - u}$, $l(\lambda) = p'(\lambda)$

h je zřejmě polynom. Proto

$$(\lambda I - A)\, h(A) = p(\lambda) - p(A)$$

Tedy $(\lambda I - A)^{-1}$ existuje, spor s tím, že $\lambda \in \sigma(A)$. ∎