také zřejmá. Zbývá dokázat (4) a (5).

(4) $\langle f(A)x, x\rangle = \langle (\sqrt{f}\cdot\sqrt{f})(A)x, x\rangle = \langle \sqrt{f}(A)x, \sqrt{f}(A)x\rangle \geq 0$

(5) Nejprve dokážeme $\sigma(f(A)) \subseteq f(\sigma(A))$. Je-li $\lambda \notin f(\sigma(A))$, pak $\frac{1}{\lambda - f(u)} = g(u)$ spojitá funkce na $\sigma(A)$.

Pak $g(A)\cdot(\lambda - f(A)) = id$, a proto $\lambda \notin \sigma(f(A))$.

Dále dokážeme $f(\sigma(A)) \subseteq \sigma(f(A))$. Nechť $\lambda \in \Sigma = \sigma(A)$ a $f(\lambda) \notin \sigma(f(A))$. Potom existuje

$$(f(\lambda) - f(A))^{-1} \in \mathcal{L}(X).$$

Zvolme polynom p tak, že $\|p - f\|_{C(\Sigma)} \leq \frac{1}{2}\|(f(\lambda) - f(A))^{-1}\|$.

Potom existuje $(p(\lambda) - p(A))^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ podle následujícího lemmatu.

Položme $h(u) = \frac{p(\lambda) - p(u)}{\lambda - u}$, $\ell(\lambda) = p'(\lambda)$

h je zřejmě polynom. Proto

$$(\lambda I - A)\, h(A) = p(\lambda) - p(A)$$

Tedy $(\lambda I - A)^{-1}$ existuje, spor s tím, že $\lambda \in \sigma(A)$. ∎

Ještě k důkazu Lemmatu 4.6

Pro reálné polynomy p jsme dokázali

$$\|p(A)\| = \|p\|_{C(\Sigma)}$$

neboť pro A samoadjungovaný je $p(A)$ rovněž samoadjungovaný.

Pro spojitý operátor na Hilbertově prostoru platí

$$\|B^*\cdot B\| = \|B\|^2$$

Je totiž $\|B^*\cdot B\| \le \|B^*\|\cdot\|B\| = \|B\|^2$

a

$$\|B^*B\| = \sup_{\substack{\|x\|\le 1\\ \|y\|\le 1}} \langle B^*Bx, y\rangle \ge \sup_{\|x\|\le 1} \langle B^*Bx, x\rangle$$

$$= \sup_{\|x\|\le 1} \langle Bx, Bx\rangle = \|B\|^2$$

Nyní aplikuji na $B = p(A)$, kde p je komplexní polynom:

$$\|p(A)\|^2 = \|p(A)\,\bar{p}(A)\| = \|(p\bar{p})(A)\| =$$

$$= \|p\bar{p}\|_{C(\Sigma)} = \|p\|^2_{C(\Sigma)}$$

neboť $p\bar{p}$ je reálný polynom. $\blacksquare$

<u>Banachova algebra</u> A ... Banachův prostor s násobením a jednotkovým prvkem, ve kterém platí

$$\|x\cdot y\| \le \|x\|\cdot\|y\|$$

<u>Involuce $*$</u>: $x, y \in A$, $\lambda \in C$

$(x+y)^* = x^* + y^*$, $(\lambda x)^* = \bar{\lambda} x^*$, $(x\cdot y)^* = y^* x^*$,

$(x^*)^* = x\,, \quad 1^* = 1\,.$

<u>C^*- algebra</u> (někdy B^*- algebra = Banachova algebra s involucí) je Banachova algebra s involucí, pro kterou platí

$$\| x\, x^* \| = \| x \|^2$$

Pro X Hilbertův a Σ kompaktní jsou $\mathcal{L}(X)$ a $C(\Sigma)$ C^*- algebry. $C(\Sigma)$ je navíc komutativní. Předchozí věta hovoří o izometrickém vnoření $C(\Sigma)$ do $\mathcal{L}(X)$.

<u>Další postup</u> : Nechť A je spojitý samoadj. operátor na Hilbertově prostoru X se spektrem $\Sigma = \sigma(A)$. Pro $f \in C(\Sigma)$ umíme jednoznačně definovat $f(A) \in \mathcal{L}(X)$. Nyní tuto definici rozšíříme i na funkce z $\mathcal{L}^\infty(\Sigma)$ (= borelovské omezené funkce). Potom pro každou borelovskou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$ budeme definovat

$$P(\Omega) = \chi_\Omega (A).$$

$\{P(\Omega)\}$ bude tvořit rozklad jednotky v X.

Rieszova věta o reprezentaci nezáporných spojitých funkcionálů na $C_c(T)$ - Rudin: Reálná a komplexní analýza, věta 2.41

Věta 4.8 Nechť T je Hausdorffův lokálně kompaktní topologický prostor a $C_c(T)$ Banachův prostor spojitých funkcí s kompaktním nosičem v T. Nechť $\varphi \in C_c'(T)$ je nezáporný lineární funkcionál na $C_c(T)$, tj

$$\text{pro } f \geq 0 \text{ je } \varphi(f) \geq 0.$$

Potom na T existuje σ-algebra $\mathcal{M}$ obsahující všechny borelovské množiny a ~~míra~~ nezáporná míra μ na $\mathcal{M}$, která reprezentuje φ, tj

$$\varphi(f) = \int_T f \, d\mu .$$

~~[illegible]~~ Dále platí:

(i) $\forall K \subset T$ kompaktní, je $\mu(K) < \infty$.

(ii) Pro každou $E \in \mathcal{M}$ je

$$\mu(E) = \inf \{ \mu(V),\ V \supseteq E \text{ otevřená} \}$$

(iii) Pro každou $E \in \mathcal{M}$ takovou, že $\mu(E) < \infty$, platí

$$\mu(E) = \sup \{ \mu(K),\ K \subseteq E \text{ kompaktní} \}$$

(iv) μ je úplná míra: $A \subseteq E \in \mathcal{M}$ a $\mu(E) = 0 \Rightarrow A \in \mathcal{M}$.

Idea důkazu:

Pro každou otevřenou V položíme

$$\mu(V) = \sup\{\varphi(f),\ \text{nosič } f \text{ leží ve } V,\ 0 \le f \le 1\}$$

Pro každou $E \subset \mathbf{T}$ položíme

$$\mu(E) = \inf\{\mu(V),\ E \subseteq V \text{ otevřená}\}$$

Označíme $\mathcal{M}_F$ množinu všech $E \subseteq \mathbf{T}$ takových, že $\mu(E) < \infty$ a

$$\mu(E) = \sup\{\mu(K),\ K \subseteq E,\ K \text{ kompaktní}\}$$

$$\mathcal{M} = \{E \subseteq \mathbf{T},\ E \cap K \in \mathcal{M}_F \text{ pro každou } K \text{ kompaktní}\}$$

Dokáže se, že $\mathcal{M}$ a μ mají požadované vlastnosti. ■

Lemma 4.9 Nechť X je Hilbertův prostor a $C \in \mathcal{L}(X)$. Položme

$$b(x,y) = \langle Cx, y\rangle$$

a

$$\beta(x) = \langle Cx, x\rangle.$$

Potom

$$4b(x,y) = \beta(x+y) - \beta(x-y) + i\beta(x+iy) - i\beta(x-iy).$$

Důkaz: Výpočet.

KONSTRUKCE Nechť $\Sigma = \sigma(A)$. Pro $A \in \mathcal{L}(X)$ samoadjungovaný je Σ omezená uzavřená množina. Pro pevné $x \in X$ je $\varphi : C(\Sigma) \to \mathbb{C}$

$$\varphi(f) = \langle f(A)x, x \rangle$$

nezáporný spojitý lineární funkcionál. Podle Rieszovy věty o reprezentaci existuje na Σ borelovská míra μ_x tak, že

$$\langle f(A)x, x \rangle = \int_\Sigma f(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

Potom podle předchozího lemmatu je

$$\langle f(A)x, y \rangle = \frac{1}{4}\Big(\int f(\lambda)\, d\mu_{x+y}(\lambda) - \int f(\lambda)\, d\mu_{x-y}(\lambda)$$
$$+ i\int f(\lambda)\, d\mu_{x+iy}(\lambda) - i\int f(\lambda)\, d\mu_{x-iy}(\lambda) \Big)$$

pro všechny spojité funkce f na Σ. Nechť g je omezená borelovská funkce na Σ. Potom existují spojité funkce f_n na Σ tak, že $\|f_n\|_{C(\Sigma)} \le \|g\|_{C(\Sigma)}$ a $f_n \to g$ skoro všude vzhledem k mírám $\mu_{x+y}, \mu_{x-y}, \mu_{x+iy}, \mu_{x-iy}$. Potom

$$\lim_{n\to\infty} \langle f_n(A)(x\pm y), x\pm y \rangle = \lim_{n\to\infty} \int f_n(\lambda)\, d\mu_{x\pm y}(\lambda) = \int g(\lambda)\, d\mu_{x\pm y}$$

$$\lim \int f_n(\lambda)\, d\mu_{x\pm iy}(\lambda) = \int g(\lambda)\, d\mu_{x\pm iy}$$

Položme $\mathcal{B}(x\pm y) = \int g(\lambda)\, d\mu_{x\pm y} = \lim \mathcal{B}_n(x\pm y)$

$$\mathcal{B}(x\pm iy) = \int g(\lambda)\, d\mu_{x\pm iy} = \lim \mathcal{B}_n(x\pm iy)$$

Položme $b(x,y) = \frac{1}{4}\big(\mathcal{B}(x+y) - \mathcal{B}(x-y) + i\mathcal{B}(x+iy) - i\mathcal{B}(x-iy)\big)$

$b : X \times X \to \mathbb{C}$ je lineární v 1. složce, antilineární ve druhé složce a

$$|b(x,y)| \le \|g\|_{C(\Sigma)} \|x\| \|y\|$$

Zobrazení $y \longmapsto \overline{b(x,y)}$ je lineární a spojité pro každé x, tedy můžeme ho reprezentovat skalárním součinem

$$\overline{b(x,y)} = \langle y, Bx \rangle = \overline{\langle Bx, y \rangle}$$

~~[illegible]~~ Tedy

$$b(x,y) = \langle Bx, y \rangle.$$

Zobrazení B je spojité a lineární. ~~Tedy~~

Položme $B = g(A)$.

Potom platí

$$\langle g(A)x, x \rangle = \int g(\lambda)\, d\mu_x(\lambda)$$

Věta 4.10 Nechť A je spojité samoadjungované zobrazení se spektrem Σ na Hilbertově prostoru. Potom existuje jediné zobrazení

$$\hat{\Phi} : \cancel{[illegible]}\ \{\text{algebra omezených Borel. funkcí}\} \longrightarrow \mathcal{L}(X), \quad \hat{\Phi}(g) = g(A)$$

s vlastnostmi

(1) $\hat{\Phi}$ je $*$-homomorfismus

(2) $\hat{\Phi} | C(\Sigma) = \Phi$ z věty 4.7

(3) g_n posloupnost stejně omezených funkcí konvergujících bodově k g, potom

$$\hat{\Phi}(g_n)x \longrightarrow \hat{\Phi}(g)x \qquad (\, g_n(A)x \to g(A)x)$$

pro všechna $x \in X$.

(4) $g \geq 0 \implies \hat{\Phi}(g) \geq 0$

(5) $Ax = \lambda x \implies \hat{\Phi}(g)x = g(\lambda)x$.

Důkaz: Jednoznačnost plyne z (2) a (3).

Existence: definujeme $\hat{\Phi}(g) = g(A)$.

(2) zřejmé.

(1) $\hat{\Phi}(1) = \Phi(1) = Id$.

f, g omezené borelovské, linearita:

$$\langle \hat{\Phi}(\alpha f + \beta g)x, x\rangle = \int (\alpha f(\lambda) + \beta g(\lambda))\, d\mu_x(\lambda) =$$

$$= \dots\dots\dots \; = \alpha\langle \hat{\Phi}(f)x, x\rangle + \beta\langle \hat{\Phi}(g)x, x\rangle$$

Jestliže g aproximujeme posloupností f_n, pak $\bar{g}$ aproximujeme posloupností $\bar{f_n}$.

To dává

$$\hat{\Phi}(\bar{f}) = \Phi(f)^*.$$

$\hat{\Phi}$ zachovává násobení

(i) $\hat{\Phi}(fg) = \hat{\Phi}(f)\,\hat{\Phi}(g)$

nejprve pro f spojitou, g borelovskou

(ii) Potom pro f, g borelovskou. Stačí dokázat

$$\langle (\hat{\Phi}(fg) - \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g))x, x\rangle = 0.$$