$$\hat{\Phi}(g_n)x \longrightarrow \hat{\Phi}(g)x$$

pro všechna $x \in X$.

(4) $g \geq 0 \Rightarrow \langle \hat{\Phi}(g)x, x \rangle \geq 0$

(5) Jestliže omezenou borelovskou funkci g lze napsat jako bodovou limitu spojitých funkcí, tj. $f_n(\lambda) \longrightarrow g(\lambda)$ pro všechna $\lambda \in \Sigma$, pak

$$Ax = \lambda x \Rightarrow \hat{\Phi}(g)x = g(\lambda)x$$

Poznámka ke konstrukci na straně 40

Konvergenci s.v. k mírám μ_{x+y}, μ_{x-y}, μ_{x+iy}, μ_{x-iy} zajistíme tím, že vezmeme konvergenci s.v. vzhledem k jejich součtu, což je opět nezáporná míra.

Důkaz věty 4.10

Jednoznačnost $\hat{\Phi}$ plyne z (2) a (3).

(2) Plyne z konstrukce míry μ_x podle Rieszovy věty.

(3) $\hat{\Phi}$ je $*$-homomorfismus

$$\hat{\Phi}(1) = \Phi(1) = Id$$

f, g omezené borelovské. Linearita

$$\langle \hat{\Phi}(\alpha f + \beta g)x, x \rangle = \int (\alpha f + \beta g)\, d\mu_x = \alpha \int f\, d\mu_x + \beta \int g\, d\mu_x = \alpha \langle \hat{\Phi}(f)x, x \rangle + \beta \langle \hat{\Phi}(g)x, x \rangle$$

Jestliže g aproximujeme posloupností f_n, pak $\bar{g}$ aproximujeme posloupností $\bar{f}_n$. Pak

$$\langle \hat{\Phi}(\bar{g})x, x\rangle = \int \bar{g}\, d\mu_x = \lim_{n\to\infty} \int \bar{f}_n\, d\mu_x =$$

$$= \lim \langle \Phi(\bar{f}_n)x, x\rangle = \lim \langle \Phi^*(f_n)x, x\rangle =$$

$$= \lim \langle x, \Phi(f_n)x\rangle =$$

$$= \lim \overline{\langle \Phi(f_n)x, x\rangle} = \lim \overline{\int f_n\, d\mu_x} =$$

$$= \overline{\int g\, d\mu_x} = \overline{\langle \Phi(g)x, x\rangle} = \langle x, \Phi(g)x\rangle =$$

$$= \langle \Phi^*(g)x, x\rangle.$$

Důkaz, že $\hat{\Phi}(fg) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g)$.

Platí pro f a g spojitou. Nechť nyní f spojitá, g omezená borelovská. Pro $x \in H$, $y = \hat{\Phi}(\bar{f})x$ uvažujme posloupnost spojitých stejně omezených funkcí $g_n \to g$ s.v. vzhledem k mírám μ_x, $\mu_{x\pm y}$, $\mu_{x\pm iy}$. Potom platí:

$$\langle \hat{\Phi}(fg)x, x\rangle = \lim \int f g_n\, d\mu_x = \lim \langle \Phi(f g_n)x, x\rangle =$$

$$= \lim \langle \Phi(f)\Phi(g_n)x, x\rangle = \lim \langle \Phi(g_n)x, \Phi(\bar{f})x\rangle =$$

$$= \lim \langle \Phi(g_n)x, y\rangle = \lim \left\{ \int g_n\, d\mu_{x+y} - \cdots\cdots \right\}$$

$$= \left\{ \int g\, d\mu_{x+y} - \cdots\cdots \right\} = \langle \hat{\Phi}(g)x, \Phi(\bar{f})x\rangle =$$

$$= \langle \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g)x, x\rangle \implies \hat{\Phi}(fg) = \hat{\Phi}(f)\hat{\Phi}(g).$$

Nyní dokážeme pro f a g borelovské omezené.
CVIČENÍ (je to analogické předchozímu, které se v tomto důkazu využívá).

(3) Zde se využívá (2): Nechť $g_n \to g$ bodově na Σ. Potom

$$\|\hat{\Phi}(g)x - \hat{\Phi}(g_n)x\|^2 = \langle(\hat{\Phi}(g)x - \hat{\Phi}(g_n))x, (\hat{\Phi}(g) - \hat{\Phi}(g_n))x\rangle$$
$$= \langle \hat{\Phi}(|g-g_n|^2)x, x\rangle = \int |g-g_n|^2 d\mu_x \longrightarrow 0$$

(4) Stejně jako pro Φ.

(5) Pro spojité funkce platí

$$Ax = \lambda x \quad \text{pak} \quad f(A)x = f(\lambda)x$$

Nejdřív se to dokáže pro polynomy a potom pro spojité funkce. Nechť nyní f_n spojité a $f_n(\lambda) \to g(\lambda)$, f_n stejně omezené. Potom podle (3) je

$$\begin{array}{ccc} f_n(A)x & = & f_n(\lambda)x \\ \downarrow & & \downarrow \\ g(A)x & & g(\lambda)x \end{array} .$$

∎

<u>Důsledek 4.11</u> Ke každému spojitému samoadjungovanému operátoru A na Hilbertově prostoru X existuje ~~[illegible]~~ omezený rozklad jednotky $\{P(\Omega)\}$ takový, že

$$P(\Omega) = \hat{\Phi}(\chi_\Omega) = \chi_\Omega(A).$$

Přitom platí

$$\langle Ax, x\rangle = \int \lambda \, d\langle P(\Omega)x, x\rangle .$$

<u>Poznámka</u>: K A jsme zkonstruovali pro každé $x \in H$ nezápornou míru μ_x. Dále jsme definovali $P(\Omega)$ předpisem

$$\langle P(\Omega)x, x\rangle = \int \chi_\Omega \, d\mu_x = \mu_x(\Omega)$$

Tedy míra

$$\nu_x(\Omega) = \langle P(\Omega)x, x\rangle = \mu_x(\Omega).$$

Toto využijeme v dalším.

OPAČNÁ KONSTRUKCE

Nechť $\{P(\Omega)\}$ je omezený rozklad jednotky, tj $P(\Omega) = Id$ pro nějakou omezenou množinu $\Omega \subseteq \mathbb{R}$. Potom pro každé x je

$$\nu_x(\Omega) = \langle P(\Omega)x, x\rangle$$

nezáporná konečná míra na $\mathbb{R}$.

Ukážeme, že pro každou omezenou borelovskou funkci g existuje $P(g) \in \mathcal{L}(X)$ tak, že

$$(*) \qquad \int_{\mathbb{R}} g(\lambda)\, d\nu_x(\lambda) = \langle P(g)x, x\rangle$$

pro všechna $x \in X$.

Pro jednoduchou funkci $g = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{\Omega_i}$, Ω_i borelovské, klademe

$$P(g) = \sum_{i=1}^{n} a_i P(\Omega_i) \in \mathcal{L}(X)$$

a lehce ověříme, že $(*)$ platí.

Nechť g je borelovská a $0 \le g \le 1$.

Položme

$$\Omega_1 = \{x \in \mathbb{R},\ g(x) \ge \tfrac{1}{2}\}, \quad g_1(x) = \tfrac{1}{2}\chi_{\Omega_1}$$

$$\Omega_n = \{x \in R \quad g(x) - \sum_{i=1}^{n-1} g_i(x) \ge \tfrac{1}{2^n}\}, \quad g_n(x) = \tfrac{1}{2^n}\chi_{\Omega_n}$$

Potom platí, že

$$\sum_{i=1}^{n} g_i \rightrightarrows g \quad \text{na omezené } \Omega, \text{ kde } P(\Omega) = id$$

Dále [illegible] definice P na jednoduchých funkcích plyne, že $P(\sum g_i)$ je cauchyovská posloupnost operátorů v $\mathcal{L}(X)$. Tedy

$$P\Big(\sum_{i=1}^{n} g_i\Big) \longrightarrow P(g).$$

Tedy $P(g)$ splňuje $(*)$, neboť pro všechna $x \in X$ je

$$\langle P(g)x, x\rangle = \lim \Big\langle P\Big(\sum_1^n g_i\Big)x, x\Big\rangle = \lim \int \Big(\sum g_i\Big)\, d\nu_x$$

$$= \int g\, d\nu_x.$$

Potom také existuje operátor $A = P(id)$, pro který platí

$$\langle Ax, x\rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda\, d\nu_x.$$

Tento operátor je samoadjungovaný, neboť

$$\langle x, Ax\rangle = \overline{\langle Ax, x\rangle} = \overline{\int \lambda \, d\nu_x} = \int \overline{\lambda} \, d\overline{\nu_x} =$$
$$= \int \lambda \, d\nu_x = \langle Ax, x\rangle .$$

~~2 Z toho, že $\{P(\Omega)\}$ je omezený rozklad jednotky, plyne, že $\nu_x(\Omega) \leq \|x\|^2$ a~~

$$\cancel{|\langle Ax, x\rangle| \leq \max_{\lambda \in \text{nosič míry } P(\Omega)} |\lambda| \cdot \|x\|^2}$$

Tedy $A = P(\lambda)$ je spojitý samoadj. operátor. K němu můžeme sestrojit zobrazení $\hat{\Phi}$ splňující větu 4.10. Dokážeme, že

$$\hat{\Phi} = P .$$

K tomu stačí dokázat, že P splňuje (1)–(3) z věty 4.10 a $P(\lambda) = A$.

(1) P je $*$-homomorfismus. Dokáže se prvně pro jednoduché funkce, pak se rozšíří pomocí limitního přechodu jako v definici $P(g)$.

(2) Pomocí toho, že P je $*$-homomorfismus se ukáže, že $P(\text{polynom } p) = p(A)$. Potom se limitním přechodem dokáže, že

$$P(f) = \Phi(f)$$

pro f spojité.

(3) ~~Φ definuje pro každé x míru μ_x takovou, že~~

$$\cancel{\langle \Phi(f)x, x\rangle = \int f \, d\mu_x}$$

jestliže $f_n \to f$ a f_n jsou stejně omezené, pak

$$\langle (P(f_n) - P(f))x, x \rangle = \int (f_n - f)\, d\nu_x \longrightarrow 0.$$

Tím jsme dokázali následující

Věta 4.12 (o spektrálním rozkladu)

Nechť X je Hilbertův prostor. Potom existuje vzájemně jednoznačná korespondence mezi spojitými samoadjungovanými lin. operátory na X a omezenými rozklady jednotky na X. Tato korespondence je dána formulemi

$$A \longmapsto \{ P(\Omega) = \hat{\Phi}(\chi_\Omega) = \chi_\Omega(A) \}$$

$$\{P(\Omega)\} \longmapsto \{ A, \langle Ax, x \rangle = \int \lambda\, d\langle P(\Omega)x, x \rangle \}.$$

Věta 4.13 Nechť A je samoadj. spojitý lin. operátor na Hilb. prostoru X, $\{P(\Omega)\}$ příslušný rozklad jednotky. Položme $P(\lambda) = P((-\infty, \lambda])$.

(1) $\lambda_0 \in \sigma_p(A)$ právě když $P(\lambda_0) \neq P(\lambda_0 -)$.

V tomto případě je
$$\operatorname{Ker}(A - \lambda_0 \, id) = \mathcal{R}\,(P(\lambda_0) - P(\lambda_0 -))$$

(2) $\lambda_0 \in \sigma(A)$ právě když $(\forall \lambda_1, \lambda_2)(\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2 \Rightarrow P(\lambda_1) \neq P(\lambda_2))$

Důkaz: $\|\lambda_0 x - Ax\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda_0 - \lambda|^2 d\langle P_\lambda x, x\rangle$.
$\mu_x = \nu_x$

(1) Z formule plyne
$$Ax = \lambda_0 x \iff \lambda = \lambda_0 \text{ skoro všude k } \mu_x$$
$$\iff \mu_x = \|x\|^2 \delta_{\lambda_0}$$

Je-li $x \in \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 \mathrm{Id})$, pak
$$\|(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-))x - x\|^2 = \int |\chi_{\lambda_0} - 1|^2 d\mu_x = 0$$
Tedy $x = (P(\lambda_0) - P(\lambda_0-))x \in \mathcal{R}(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-))$.
Dále platí
$$\|(A - \lambda_0 \mathrm{Id})(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-))x\|^2 = \int |\lambda - \lambda_0|^2 \chi^2_{\lambda_0} d\mu_x = 0$$
Tedy $\mathcal{R}(P(\lambda_0) - P(\lambda_0-)) \subseteq \mathrm{Ker}(A - \lambda_0 \mathrm{Id})$.

(2) $\lambda_0 \in \rho(A) \iff (\exists k > 0)(\forall x \in X)(\|Ax - \lambda_0 x\| \geq k\|x\|)$
$\lambda_0 \in \sigma(A) \iff (\forall \varepsilon > 0)(\exists x \in X)(\|x\| = 1 \text{ a } \|Ax - \lambda_0 x\| < \varepsilon)$
Plyne z toho, že zbytkové spektrum operátoru A je prázdné.

(a) Nechť pro nějaká $\lambda_1 < \lambda_0 < \lambda_2$ je $P(\lambda_1) = P(\lambda_2)$.
Zvolme $\alpha > 0$ tak, že $\lambda_1 + \alpha < \lambda_0 < \lambda_2 - \alpha$. Potom
$$\|\lambda_0 x - Ax\|^2 = \int_{\mathbb{R}} |\lambda_0 - \lambda|^2 d\langle P_\lambda x, x\rangle = \int_{(-\infty, \lambda_1\rangle \cup (\lambda_2, \infty)} |\lambda_0 - \lambda|^2 d\langle P_\lambda x, x\rangle \geq$$
$$\geq \alpha^2 \int d\langle P_\lambda x, x\rangle = \alpha^2 \|x\|^2$$
Tedy $\lambda_0 \in \rho(A)$.

(b) Nechť P je nekonstantní v bodě λ_0, pak pro každé $\varepsilon > 0$ existuje $\|x\| = 1$ tak, že
$$(P(\lambda_0 + \varepsilon) - P(\lambda_0 - \varepsilon))x = x$$

Potom

$$\|\lambda_0 x - Ax\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda-\lambda_0|^2 \, d\langle P_\lambda x, x\rangle = \int_{(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon]} |\lambda-\lambda_0|^2 \, d\langle P_\lambda x, x\rangle$$

$$\leq \varepsilon^2 \int d\langle P_\lambda x, x\rangle = \varepsilon^2 \|x\|^2$$

Proto $\lambda_0 \in \sigma(A)$.

Větu o spektrálním rozkladu lze dokázat i pro nespojité samoadjungované operátory

Věta 4.14 (o spektrálním rozkladu)

Nechť X je Hilbertův prostor.

(1) Jestliže A je samoadjungovaný operátor na X, pak existuje rozklad jednotky $\{P(\Omega)\}$ tak, že

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda$$

Pro f spojitou na $\mathbb{R}$ je zobrazení

$$f(A) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda) \, dP_\lambda$$

definováno na husté množině $\{x \in X;\ \int |f(\lambda)|^2 d\langle P_\lambda x, x\rangle < \infty\}$ a pro f omezenou a spojitou má zobrazení

$$f \longmapsto f(A)$$

vlastnosti z věty 4.7.

(2) Jestliže $\{P(\Omega)\}$ je rozklad jednotky, pak zobrazení $A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda$ je samoadjungované s $\mathcal{D}(A) = \{x \in X;\ \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d\langle P_\lambda x, x\rangle < \infty\}$ a rozklad jednotky příslušný tomuto A je $\{P(\Omega)\}$.