Idea důkazu stručně

Mějme nejprve neomezený rozklad jednotky $P(\Omega)$ a f spojitou. Potom pro $x \in \mathcal{R}\, P([-n,n])$ je definován integrál

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 \, d\langle P_\lambda x, x\rangle = \int_{-n}^{n} |f(\lambda)| \, d\langle P_\lambda x, x\rangle$$

Položme $\mathcal{D}(f) = \{x \in X, \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\langle P_\lambda x, x\rangle < \infty\}$.
Zřejmě $X_n = \mathcal{R}(P[-n,n]) \subset \mathcal{D}(f)$ a tedy $\mathcal{D}(f)$ je hustá v X.

Obráceně: Mějme A samoadjungovaný a položme

$$R(\pm i) = (A \mp i\,Id)^{-1}.$$

Pak

$$B = \frac{R(i) - R(-i)}{2i}$$

$$C = \frac{R(i) + R(-i)}{2}$$

jsou samoadjungované a lze o nich ukázat, že

(1) komutují $BC = CB$,

(2) ~~[illegible]~~ $AB = C$

(3) $0 \le B \le Id$, B je prosté, $\|C\| \le 1$.

Tedy spektrum $\sigma(B) \subseteq \langle 0, 1]$. Nechť $Q(\Omega)$

je rozklad jednotky pro B. Položme

$$X_n = \mathcal{R}\, Q\left(\left(\tfrac{1}{n+1}, \tfrac{1}{n}\right]\right)$$

Potom $X = \bigoplus_{n=1}^{\infty} X_n$, $A_n = A/_{X_n} : X_n \to X_n$

je spojitý samoadjungovaný

Pro každé A_n máme rozklad jednotky $P^n(\Omega)$.

Budeme definovat $P(\Omega) = P^n(\Omega)$ na X_n.

Pak $P(\Omega)$ bude neomezený rozklad jednotky pro A. ∎

Lze dokázat následující větu

<u>Věta 4.15</u> (Spektrální věta ve tvaru operátoru násobení)

Nechť A je samoadjungovaný operátor na separabilním Hilbertově prostoru X. Pak existuje unitární zobrazení $U : X \to L_2(\sigma(A), \mu)$ kde μ je reálná σ-konečná míra na $\sigma(A)$ a funkce F na $\sigma(A)$ tak, že

$$U A U^{-1} f = F \cdot f .$$

<u>Normální operátor na Hilbertově prostoru</u>

je operátor B takový, že $B^* B = BB^*$.

Samoadjungované a unitární operátory jsou

zvláštní případy normálních operátorů.
Každý normální operátor lze rozložit jako
součet samoadjungovaných:

$$(*) \quad B = \frac{B+B^*}{2} + i\,\frac{B-B^*}{2i}$$

Věta 4.16

Nechť B je omezený normální operátor na Hilbertově prostoru. Pak existuje rozklad jednotky $(P(\Omega))_{\Omega \in \mathcal{B}}$ tak, že
$$\langle Bx,x\rangle = \int \lambda \, d\langle P_\Omega x, x\rangle .$$

Unitární operátor $U \in \mathcal{L}(X)$

$$U^* U = \mathrm{Id} = U U^*$$

To je ekvivalentní s tím, že
$$\mathcal{R}(U) = X \quad a \quad \langle Ux, Uy\rangle = \langle x, y\rangle .$$

Věta 4.17

Spektrum unitárního operátoru U leží na jednotkové kružnici v $\mathbb{C}$.

Dk: $\|U\| = 1$, proto $r(U) \le 1$ a tedy
$\sigma(A)$ leží v jednotkovém kruhu.
Pro $|\lambda| < 1$ platí $\lambda\,\mathrm{Id} - U = -U(\mathrm{Id} - \lambda U^*)$
kde U^{-1} existuje a ~~[illegible]~~ $(\mathrm{Id} - \lambda U^*)^{-1}$ existuje.

CVIČENÍ - POUŽITÍ FOURIEROVY TRANSFORMACE

Fourierova transformace na $\mathbb{R}^n$

$$\mathcal{F}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(x)\,dx \qquad \xi \in \mathbb{R}^n$$

je definována na $L^1(\mathbb{R}^n)$. ~~...~~ $\mathcal{F}u \in C_0(\mathbb{R}^n)$ (spojitá funkce taková, že $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} = 0$).

(1) $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(\xi) = i\xi^j \mathcal{F}(u)(\xi)$ per partes pro $u \in \mathcal{D}$

(2) $\mathcal{F}(u)(\xi) \in C_0(\mathbb{R}^n)$

$$\xi_k = (\xi_k^1, \dots \xi_k^n) \longrightarrow \infty \qquad |\xi_k^j| \longrightarrow \infty$$

$$\mathcal{F}(u)(\xi_k) = \frac{1}{i\xi_k^j} \cdot \mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)(\xi_k) \longrightarrow 0$$

(3) Inverzní Fourierova transformace

$$\mathcal{F}^{-1}u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} u(x)\,dx$$

(později)

(4) je-li $v(x) = e^{i\alpha x} u(x)$, pak

$$\mathcal{F}v(\xi) = \mathcal{F}u(\xi - \alpha)$$

(jednoduché)

(5) je-li $v(x) = u(x-\alpha)$, pak

$$\mathcal{F}v(\xi) = e^{-i\alpha\xi} \mathcal{F}u(\xi)$$

(jednoduché)

(6) $\mathcal{F}(u * v) = (2\pi)^{n/2} \mathcal{F}(u) \cdot \mathcal{F}(v)$ (jednoduché)

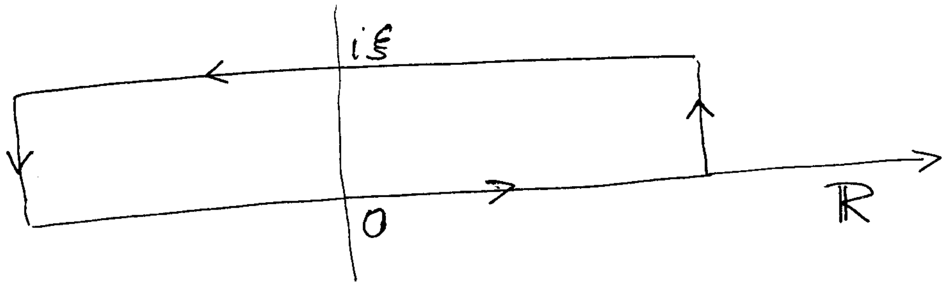
(7) $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$

Dk(7) pro $n = 1$.

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-ix\xi} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-(x+i\xi)^2/2} dx$$

podle Cauchyovy věty

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\xi^2/2} \int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = e^{-\xi^2/2}.$$



Integrál přes tuto křivku je nulový.

Pro $n \geq 1$ je $\mathcal{F}\varphi = \varphi$ pro $\varphi(x) = e^{\frac{-x_1^2 - \dots - x_n^2}{2}}$.

Důkaz (3) Definujme

$$\mathcal{S} = \{u \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \forall \alpha\ \forall k\ \sup |\partial^\alpha u| (1 + \|x\|^k) < \infty\}$$

$\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset L^1(\mathbb{R}^n)$

Dále $\mathcal{F}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$.

Definujme na $\mathcal{S}$

$$\mathcal{F}^{-1} u(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} u(x) dx$$

$\mathcal{F}$ je izomorfismus $\mathcal{S}$ na $\mathcal{S}$ a $\mathcal{F}^{-1}$ je inverze.

Pro $\varphi, \psi \in \mathcal{S}$ platí

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}(\mathcal{F}\varphi)(\xi)\,\psi(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi(x-y)}\varphi(y)\,\psi(\xi)\,dy\,d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)\,(\mathcal{F}\psi)(y-x)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}(\psi))(y)\,\varphi(x+y)\,dy.$$

Protože $\mathcal{F}\left(e^{-\frac{|x|^2}{2}}\right) = e^{-\frac{|\xi|^2}{2}}$, platí

$$\mathcal{F}\left(e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\right)(y) = \varepsilon^{-n} e^{-\frac{y^2}{2\varepsilon^2}}$$

Položme $\psi(\xi) = e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}(\mathcal{F}\varphi)(\xi)\,e^{-\varepsilon^2\frac{\xi^2}{2}}\,d\xi$$

$$\cancel{\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)(\mathcal{F}\psi)(y-x)\,dy} = \int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}\psi)(y)\,\varphi(x+y)\,dy$$

substituce $z = \frac{y}{\varepsilon}$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{z^2}{2}}\,\varphi(x+\varepsilon z)\,dz$$

$\varepsilon \to 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x}(\mathcal{F}\varphi)(\xi)\,d\xi = (2\pi)^{n/2}\varphi(x).$$

(8) Pro φ a $\psi \in \mathcal{S}$ platí

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi\rangle = \langle\varphi,\psi\rangle.$$

<u>Důkaz:</u>

$$\langle \mathcal{F}\varphi, \mathcal{F}\psi\rangle = \int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}\varphi)(\xi)\overline{(\mathcal{F}(\psi))}(\xi)\,d\xi = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\mathcal{F}(\varphi)(\xi)\,e^{i\xi x}\,\overline{\psi(x)}\,dx\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}(\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\varphi)(x)\,\overline{\psi}(x)\,dx = \langle\varphi,\psi\rangle.$$

$\mathcal{S}$ je hustá v $L^2(\mathbb{R}^n)$. Na $\mathcal{S}$ s topologií L^2 je $\mathcal{F}$ izometrie, tedy $\mathcal{F}$ lze definovat jako lineární izometrii L^2 na L^2.

Navíc platí $\mathcal{F}^* = \mathcal{F}^{-1}$.

(8) $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ je unitární operátor.

(9) Spektrum $\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$ je $\{1, i, -1, -i\}$. Jde o bodové spektrum. Vlastní podprostory mají nekonečnou dimenzi.

<u>Důkaz</u>: Platí
$$(\mathcal{F}^{-1}u)(-\xi) = (\mathcal{F}u)(\xi)$$
Odtud
$$u(-\xi) = (\mathcal{F}^2 u)(\xi)$$
$$u(\xi) = (\mathcal{F}^2 u)(-\xi) = \mathcal{F}^2(\mathcal{F}^2 u)(\xi)$$
Tedy $\mathcal{F}^4 = \mathrm{Id}$. Proto
$$\sigma(\mathcal{F}^4) = \sigma(\mathrm{Id})$$
$$\sigma(\mathcal{F})^4 = \sigma(\mathrm{Id}) = \{1\}$$
$$\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \{\pm 1, \pm i\}$$
Už víme, že $\mathcal{F}(\varphi) = \varphi$ pro $\varphi(x) = e^{-\frac{|x|^2}{2}}$.

$\mathcal{F}(x_j \varphi) = i\,\xi_j \varphi(\xi)$ $\qquad$ $\mathcal{F}((x_j^2 - 1/2)\varphi) = -(\xi_j^2 - 1/2)\varphi$

$\mathcal{F}((x_j^3 - 3x_j/2)\varphi) = -i(\xi_j^3 - 3x_j/2)\varphi$

Použití Fourierovy transformace pro hledání spektra

<u>ÚLOHA 1</u> $A : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$$Au = \frac{\partial u}{\partial x_j}$$

Potom $\mathcal{F}(Au) = i\,\xi_j\, \mathcal{F}(u)$

Proto pro $u = \mathcal{F}^{-1} f$ je

$$(\mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1})(f) = i\,\xi_j\, f = M_\varphi f$$

kde $\varphi(\xi) = i\,\xi_j$. Spektrum operátoru M_φ známe $\sigma(M_\varphi) = \sigma_c(M_\varphi) = i\,\mathbb{R}$. To je spojité spektrum i operátoru A.

<u>ÚLOHA 2</u> $A : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$$Au = -\Delta u$$

Potom $\mathcal{F}(Au) = (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \dots + \xi_n^2)\, \mathcal{F}(u)$

Tedy A má pouze spojité spektrum a to se rovná $\mathbb{R}^+ = [0, \infty)$.

<u>ÚLOHA 3</u> $A : L^2(\mathbb{R}^n) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^n)$

$f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ pevné

$$Au = f * u$$

Potom $\mathcal{F}(Au) = \cancel{\frac{1}{(2\pi)^n}}\,(2\pi)^{n/2}\, \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(u)$

Tedy $$(\mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1})(u) = (2\pi)^{n/2}\, \mathcal{F}(f)\cdot u$$

a $$\sigma(A) = \overline{\{(2\pi)^{n/2}(\mathcal{F}f)(\xi) : \xi \in \mathbb{R}^n\}}$$

ÚLOHA 4 $\quad A : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$

$$(A\varphi)(x) = \varphi(x+a)$$

$$(\mathcal{F} A \mathcal{F}^{-1})(u) = e^{ia\xi}\cdot u$$

ÚLOHA 5 $\quad A : \ell^2 \to \ell^2$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(0, x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

Dokažte, že A je ~~samoadjungovaný~~ kompaktní a $\sigma(A) = \sigma_r(A) = \{0\}$.

ÚLOHA 6 $\quad A : \ell^2 \to \ell^2$

$$A(x_1, x_2, \dots) = \left(x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \dots\right)$$

Dokažte, že A je samoadjungovaný kompaktní operátor. Najděte jeho spektrum.