5. LOKÁLNĚ KONVEXNÍ PROSTORY

Nechť X je lineární prostor nad tělesem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.
Polonorma na X je zobrazení $p : X \to [0,\infty)$ takové, že

(1) $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$

(2) $p(\lambda x) = |\lambda|\, p(x)$ pro $\lambda \in \mathbb{K}$.

Systém polonorem $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$ se nazývá oddělitelný, jestliže pro každé $x \in X \setminus \{0\}$ existuje p_α tak, že $p_\alpha(x) > 0$.

Pro každou konečnou množinu $L \subset A$ a $\varepsilon > 0$ položíme
$$U_{K,\varepsilon} = \{x \in X,\ p_\alpha(x) < \varepsilon \text{ pro } \alpha \in L\}$$

Pro množinu $U_{K,\varepsilon}$ platí

(1) $0 \in U_{K,\varepsilon}$

(2) $U_{K,\varepsilon}$ je konvexní ($x, y \in U$, pak $tx + (1-t)y \in U$ pro $t \in [0,1]$)

(3) $U_{K,\varepsilon}$ je absolutně konvexní, tj je konvexní a navíc z $x \in U_{K,\varepsilon}$ plyne $\lambda x \in U_{K,\varepsilon}$ pro $|\lambda| \leq 1$

(4) $U_{K,\varepsilon}$ je pohlcující, tj pro každé $x \in G$ existuje $\lambda > 0$ tak, že $\lambda x \in U_{K,\varepsilon}$.

V prostoru X definujeme topologii generovanou systémem polonorem takto: $G \subset X$ je otevřená pokud $G = \emptyset$ nebo ~~ta~~ pro každé $x \in G$ existuje $L \subset A$ konečná a $\varepsilon > 0$ tak, že

$$x + U_{L,\varepsilon} \subseteq G.$$

Množiny $x + U_{L\varepsilon}$ tvoří bázi okolí bodu x. Topologie na X je Hausdorffova.

Lemma 5.1 (i) Operace sčítání $X \times X \to X$ a násobení skalárem $\mathbb{K} \times X \to X$ jsou spojité.

(ii) $x = 0$ má bázi okolí tvořenou z absolutně konvexních a pohlcujících množin

(iii) pološormy $p_\alpha : X \to [0, \infty)$ jsou spojité.

Důkaz je jednoduchý - nebude jej provádět.

Nechť obráceně: X je lineární prostor s T_2-topologií, kde sčítání a násobení jsou spojité a existuje báze $\{U_\alpha\}$ okolí 0 tvořená absolutně konvexními a pohlcujícími množinami.

Pak na X existuje systém polonorem p_α

$$p_\alpha(x) = \inf\{\lambda > 0,\ x \in \lambda U_\alpha\}$$

(Minkowského funkcionál množiny U_α).

Tento systém polonorem určuje na X stejnou topologii. (Speciálně je oddělitelný.)

LOKÁLNĚ KONVEXNÍ PROSTOR X je lineární prostor, jehož topologie je dána oddělitelným vytvořeným polonormou. Duál X' lokálně konvexního prostoru je tvořen spojitými lin. zobrazeními $f : X \to \mathbb{K}$.

<u>Příklady</u>:

(1) Normovaný vekt. prostor je LKP s polonormou $\|x\|$.

(2) $X = C(\mathbb{R})$ s polonormami $p_k(u) = \sup_{x\in[-k,k]} |u(x)|$.
Topologie lokálně stejnoměrné konvergence.

(3) $X = L^p_{loc}(\mathbb{R})$ s polonormami $p_k(u) = \int_{-k}^{k} |u|^p \, dx$.

(4) $X = \{ f : M \to \mathbb{K} \}$ s polonormami
$$p_x(f) = |f(x)| \text{ pro každé } x \in M.$$
Jde o topologii bodové konvergence.

(5) X je normovaný lineární prostor. Pro každé $f \in X'$ vytvoříme polonormu
$$p_f(x) = |f(x)|.$$
Topologie tvořená polonormami (pro oddělitelné) je ~~topologie~~ slabá topologie na X a označuje se $\sigma(X, X')$ nebo též w-topologie.
Konvergence ve w-topologii $x_n \longrightarrow x$ znamená $f(x_n) \longrightarrow f(x)$ pro všechna $f \in X'$.

(6) Pro každý LKP X lze definovat $\sigma(X, X')$ topologii.

(7) Nechť X je LKP (speciálně X je normovaný), pak na X' můžeme definovat pseudonormy

$$p_x(f) = |f(x)|$$

pro každé $x \in X \setminus \{0\}$. Tato topologie se označuje jako slabá hvězdičková topologie, w^*-topologie nebo $\sigma(X', X)$ topologie.

(8) V $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ definujeme pseudonormy

$$p_{\alpha, K}(\varphi) = \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

pro každou K kompaktní a α multiindex. Prostor $C^\infty(\mathbb{R}^n)$ s příslušnou normou budeme označovat jako $\mathcal{E}$. Platí

$$\varphi_k \to \varphi \text{ v } \mathcal{E}$$

právě když všechny derivace funkcí φ_k konvergují k příslušným derivacím φ lokálně stejnoměrně na $\mathbb{R}^n$. Tato topologie se dá zavést pomocí spočetného systému pseudonorem

$$p_{\alpha, B_j}$$

kde $B_j = \{x \in \mathbb{R}^n;\ \|x\| \le j\}$.

(9) $\mathcal{D}_K = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n);\ \operatorname{supp} \varphi \subseteq K\}$, kde $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní s topologií určenou pseudonormami

$$p_\alpha(\varphi) = \sup_{x \in K} |\partial^\alpha \varphi(x)|$$

(10) $\mathcal{S} = \{ \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) ; \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| (1+|x|)^k < \infty \}$

s topologií určenou pololnormami

$$q_{\alpha,k}(\varphi) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\partial^\alpha \varphi(x)| (1+|x|)^k .$$

Věta 5.2 LKP je metrizovatelný, právě tehdy když jeho topologie je zadána spočetným systémem polonorem.

Důkaz: Existuje-li v X translačně invariantní metrika ρ, pak

$$U_n := \{ x \in X ; \rho(x,0) < \tfrac{1}{n} \}$$

je báze okolí 0. Současně je X zadána polonormami $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Pro každé n existuje $K_n \subset A$ konečná a $\varepsilon_n > 0$ tak, že

$$U_{K_n, \varepsilon_n} = \{ x \in X ; p_\alpha(x) < \varepsilon_n ; \alpha \in K_n \} \subseteq U_n .$$

K určení topologie na X stačí vzít polonormy

$$\{ p_\alpha , \alpha \in \bigcup_{n=1}^\infty K_n \}$$

a to je spočetný systém.

Obráceně: Nechť je topologie na X zadána spočetným systémem polonorem p_n. Potom ekvivalentní translačně invariantní metrika je definována

$$\rho(x,y) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{2^k} \frac{p_k(x-y)}{1+p_k(x-y)} .$$ ∎