<u>Věta 5.3</u> Nechť X je normovaný vekt. prostor.

(a) je-li X separabilní a $M \subset X'$ ohraničená, pak je (M, w^*) metrizovatelný top. prostor.

(b) je-li X' separabilní a $M \subset X$ ohraničená, pak je (M, w) metrizovatelný top. prostor.

<u>Důkaz (a)</u> Stačí dokázat pro $M = B' = \{ f \in X', \|f\| \leq 1\}$.

Nechť $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ je hustá v X. Položme

$$\rho(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{|f(x_k) - g(x_k)|}{1 + |f(x_k) - g(x_k)|}$$

Potom ρ je translačně invariantní metrika na X'. Ukážeme, že na B' zadává topologii w^*.

Nechť $x \in X$, $\varepsilon > 0$ a

$$U_{x,\varepsilon} = \{ f \in X' : |f(x)| < \varepsilon \}$$

je typické okolí 0 ve w^*-topologii. Zvolme k tak, že $\|x_k - x\|_X < \varepsilon/4$ a $\delta < \frac{1}{2^k} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}}$.

Dokážeme, že

$$\{ f \in X', \rho(f, f_0) < \delta \} \subseteq U_{x,\varepsilon} + f_0$$

Platí totiž: je-li $\rho(f, 0) < \delta$ je $|f(x)| < \varepsilon$.

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(x_k)| + |f(x_k)| \leq \frac{\varepsilon}{4}\|f\| + |f(x_k)|$$

přitom $\frac{1}{2^k} \frac{|f(x_k)|}{1 + |f(x_k)|} < \delta < \frac{1}{2^k} \frac{\frac{\varepsilon}{2}}{1 + \frac{\varepsilon}{2}} \Rightarrow |f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Obrácené: Nechť

$$U = \{f \in X' : \rho(f,0) < \delta\}$$

je typické okolí 0 v metrice ρ. Zvolme k tak, že $\frac{1}{2^k} < \frac{\delta}{2}$ a položme

$$\tilde{U} = \{f \in X', \ |f(x_i)| < \frac{\delta}{2} \text{ pro } i = 1, 2, \dots k\}$$

Potom

$$\rho(f,0) \leq \sum_{i=1}^{k} 2^{-i} \frac{\delta}{2} + \sum_{i=k+1}^{\infty} 2^{-i} < \frac{\delta}{2} + 2^{-k} < \delta.$$

(b) Můžeme předpokládat, že $M \subset X \subseteq X''$ a použít tvrzení (a). ∎

Všimněte si, že jsme v první části důkazu tvrzení (a) použili ohraničenost B'!

Příklady:

$$\ell^p = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ \sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|^p < \infty\}$$

$$\|f\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |f(i)|^p\right)^{1/p}$$

$$c_0 = \{f; \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ \lim_{i \to \infty} f(i) = 0\} \quad \|f\|_0 = \sup_i |f(i)|$$

$$\ell^\infty = \{f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \ f(i) \text{ je omezená posloupnost}$$

$$\|f\|_\infty = \sup_i |f(i)|$$

$$(\ell^1)' = \ell^\infty \qquad u(v) = \sum_{i=1}^{\infty} u(i) v(i)$$

$$(c_0)' = \ell^1$$

$e_i \in \ell^1$ $e_i = (0,0,\dots,0,\underset{i}{1},0,\dots,0,\dots)$

(a) $e_i \to 0$ ve w^* topologii prostoru ℓ^1

$e_i \not\to 0$ ve w-topologii prostoru ℓ^1

(b) $e_i \to 0$ ve slabé topologii ℓ^2

$e_i \not\to 0$ v silné topologii ℓ^2

(c) Jestliže v ℓ^1 $f_n \to 0$ slabě, pak $f_n \to 0$ silně.

(d) 0 patří do slabého uzávěru sféry S^1 v ℓ^1.

(e) $A = \{ u_{mn} \in \ell^2,\ m,n \in \mathbb{N}$, kde

$$u_{mn} = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & i=m,\ i\neq n \\ m & i=n \\ 0 & \text{jinak} \end{array} \right\}$$

Potom $0 \in$ slabý uzávěr množiny A v ℓ^2, ale neexistuje posloupnost $f_j \in A$ taková, že $f_j \to 0$.

OHRANIČENOST V LKP

Nechť X je LKP s topologií generovanou pseudonormami $\{p_\alpha\}_{\alpha \in A}$. Množina $M \subset X$ je <u>ohraničená</u>, jestliže pro každé $\alpha \in A$ je $p_\alpha(M)$ ohraničená v $\mathbb{R}$. Množina M je totálně ohraničená, jestliže pro každé otevřené okolí ~~U~~ U vektoru 0 existuje konečná množina $K \subset X$ tak, že $M \subset K + U$.

<u>Lemma 5.4</u> $M \subset X$ je ohraničená právě když pro každou posloupnost $\{x_n\} \subset M$ a každou posloupnost $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{K}$ platí: jestliže $\lambda_n \to 0$, pak $\lambda_n x_n \to 0$.

<u>Dk</u>: $\Rightarrow$ Nechť je M ohraničená, $x_n \in M$ a $\lambda_n \to 0$. Pro libovolné $\alpha \in A$ je $\{p_\alpha(x_n)\}$ ohraničená, takže
$p_\alpha(\lambda_n x_n) = |\lambda_n|\, p_\alpha(x_n) \to 0$. Odtud $\lambda_n x_n \to 0$.

$\Leftarrow$ Předpokládejme, že M není ohraničená. Pak existuje $\alpha \in A$ a prvky $x_n \in M$ tak, že $p_\alpha(x_n) > n$. Pro $\lambda_n = \frac{1}{n}$ potom platí $\lambda_n \to 0$, ale $p_\alpha(\lambda_n x_n) > 1$, takže $\lambda_n x_n \not\to 0$. ∎

<u>Příklad</u> V LKP X platí:
Je-li M relativně kompaktní $\Rightarrow$ M je totálně ohraničená.
Je-li M totálně ohraničená $\Rightarrow$ M je ohraničená.
Je-li M ohraničená, pak je pohlcována každým okolím nuly. ($\exists \lambda > 0$ tak, že $M \subset \lambda U$.)

<u>Lemma 5.5</u>
Nechť X je LKP. Množina $M \subset X$ je ohraničená, právě když je ohraničená ve slabé $\sigma(X, X')$ topologii.

Důkaz: Prvně předpokládejme, že X je NLP.
Předpokládejme, že M je ohraničená ve slabé topologii, ale existují $x_k \in M$, že $\|x_k\| \to \infty$. Uvažujme lin. zobrazení
$$Q_k : X' \to \mathbb{K} \qquad Q_k(f) = f(x_k).$$

Potom $\{Q_k(f)\}$ je ohraničená pro každé $f \in X'$, takže podle Banach-Steinhausovy věty je i posloupnost $\|Q_k\| = \|x_k\|$ ohraničená, spor.

Nechť je X obecný LKP. $M \subset X$ ohraničená ve slabé topologii. Zvolme polonormu p_α, která generuje silnou topologii na X. Ukážeme, že $p_\alpha(M)$ je ohraničená.

$$\operatorname{Ker} p = \{x \in X,\ p(x) = 0\}$$

je uzavřený lin. podprostor v X a faktorprostor $X/_{\operatorname{Ker} p} = \hat{X}$ je ~~t~~ normovaný lin. prostor s normou $\|\hat{x}\| = p(x)$. Stačí dokázat, že $\hat{M} = \{\hat{x} \in \hat{X},\ x \in M\}$ je ~~omezená v této normě~~ ohraničená v $\hat{X}$ ve slabé topologii. Nechť $\hat{f} \in \hat{X}'$. Definujeme-li $f(x) = \hat{f}(\hat{x})$ je $f \in X'$. Takže $f(M)$ je ohraničená, tj. $\hat{f}(\hat{M})$ je ohraničená tj. $\hat{M}$ je ohraničená v $\hat{X}$ a proto $p_\alpha(M)$ je ohraničená.

Frechetovy prostory

LKP X se nazývá Frechetův (F-prostor), jestliže je metrizovatelný a jako metrický prostor úplný.

LKP X se nazývá <u>tavelovaný</u>, jestliže každá absolutně konvexní, pohlcující a uzavřená množina (= tavel) je okolím O.

LKP X se nazývá <u>bornologický</u>, jestliže každá absolutně konvexní množina U, která pohlcuje všechny ohraničené množiny, je okolím O.

Věta 5.6

Každý Frechetův prostor je bornologický i tavelovaný.

Příklady Frechetových prostorů

(1) Všechny Banachovy prostory.

(2) Prostory $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{S}$ jsou zadány spočetným systémem polonorem. Tedy jsou metrizovatelné. Cauchyovské posloupnosti

v metrice jsou konvergentní. Plyne z této věty z analýzy:
Jestliže $f_n \rightrightarrows f$ a $f_n' \rightrightarrows g$, pak $f' = g$.

~~[illegible]~~

Definice LF-prostorů

Nechť $\{X_k\}$ je posloupnost F-prostorů taková, že
$$X_k \subset X_{k+1}, \quad X_k \neq X_{k+1}, \quad \tau_{k+1}/X_k = \tau_k$$
(τ_{k+1} je topologie na X_{k+1}, τ_k je topologie na X_k).
Na $X = \bigcup X_k$ definujeme bázi okolí nuly jako všechny absolutně konvexní množiny U s vlastností, že $U \cap X_k$ je okolí O v X_k.
Prostor X je limitou Frechetových prostorů - zkráceně LF-prostor.

Věta 5.7 Nechť X je LF-prostor. Potom platí
(i) je-li U_k absolutně konvexní okolí O v X_k, existuje U absolutně konvexní okolí O v X tak, že
$$U \cap X_k = U_k.$$
(ii) Množina $M \subset X$ je omezená, právě když existuje k tak, že $M \subset X_k$ a M je omezená

v X_k.

(iii) X je bornologický a tažený.

<u>Důkaz:</u> (i) Z podmínky $\tau_{j+1}|U_j = \tau_j$ plyne, že pro každé $j > k$ existuje U_j abs. konvexní okolí 0 v X_j tak, že

$$U_j \cap X_{j-1} \subset U_{j-1}.$$

Nechť $U = \text{konv. obal} \bigcup_{j \geq k} U_j$. Potom U je abs. konvexní, $U_j \subset U \cap X_j$ pro $j \geq k$.

Pro $j \leq k$ je

$$U \cap X_j = (U \cap X_k) \cap U_j \supset U_k \cap X_j \in \text{okolí } 0 \text{ v } X_j.$$

Tedy U je okolí 0 v X.

Dokážeme, že $U \cap X_k = U_k$.

Platí $U_k \subset U \cap X_k$.

$x \in U \cap X_k$. $x = \sum_{i=k}^{m} \lambda_i x_i$ $x_i \in U_i$, $\lambda_i \geq 0$,

$\sum \lambda_i = 1$. Předpokládejme, že $m > k$ a $\lambda_m \neq 0$.

$$x_m = \frac{1}{\lambda_m}\left(x - \sum_k^{m-1} \lambda_i x_i\right) \in U_m \cap X_{m-1} \subset U_{m-1}.$$

Takže $x = \sum_k^{m-1} \tilde{\lambda}_i \tilde{x}_i$, kde $\tilde{\lambda}_i = \lambda_i$, $\tilde{x}_i = x_i$ $i < m-1$

$\tilde{\lambda}_{m-1} = \lambda_{m-1} + \lambda_m$ a $\tilde{x}_{m-1} = (\lambda_{m-1} x_{m-1} + \lambda_m x_m) / (\lambda_{m-1} + \lambda_m)$.

Tedy $x \in U_{m-1}$. Indukcí dostaneme $x_k \in U$. ∎

(ii) $M \subset X_k$ ohraničená v X_k a $U \in \mathcal{U}_X$ (okolí v X).
Potom existuje $U_k = U \cap X_k$ okolí O v X_k. Protože je M ohraničená v X_k existuje $\alpha > 0$ tak, že

$$M \subset \alpha U_k .$$

Potom platí $M \subset \alpha U$.

Tedy M je ohraničená v X.

Nechť M je ohraničená v X. Předpokládejme, že $M \not\subset X_k$ pro žádné k. Existuje posloupnost prvků $x_j \in M$, $x_j \in X_{k_{j+1}} \setminus X_{k_j}$.

Protože $Y_j := X_{k_j}$ je uzavřený v $Y_{j+1} = X_{k_{j+1}}$.
Proto existuje $U_{j+1} \in \mathcal{U}^a_{Y_{j+1}}$ (abs. konvexní okolí O)

$$\left(\frac{1}{j} x_j + U_{j+1}\right) \cap Y_j = \emptyset \qquad (*)$$

$$U_{j+1} \cap Y_j \subset U_j$$

Nechť U je konvexní obal $\bigcup_{j \geq 2} U_j$. Potom je U abs. konvexní

$$U \cap X_k \in \mathcal{U}_{X_k} \quad (\text{neb } U \cap Y_j \in \mathcal{U}_{Y_j})$$

tedy U je okolí O v X. Z ohraničenosti M plyne $\frac{1}{j} x_j \longrightarrow 0$. Pro j dostatečně velké je $\frac{1}{j} x_j \in U$, tj. $\frac{1}{j} x_j = \sum_{i=2}^{m} \lambda_i z_i$ $\quad z_i \in U_i$
$\lambda_i \geq 0$, $\sum \lambda_i = 1$, $\lambda_m \neq 0$.

Protože $U_{j+1} \cap Y_j \subset U_j$. Můžeme předpokládat
$$z_i \notin Y_{i-1}$$
Musí být $m = j+1$. Pak
$$Y_{j+1} \ni \frac{1}{j} x_j = \sum_{i=2}^{j} \lambda_i z_i + \lambda_{j+1} z_{j+1} \in Y_j + U_{j+1},$$
což je spor s $(*)$. Existuje tedy k tak, že $M \subseteq X_k$. Zvolme $U_k \in \mathcal{U}^a_{X_k}$. Podle (i) existuje $U \in \mathcal{U}^a_X$ tak, že $U \cap X_k = U_k$. Z omezenosti M v X plyne $M \subset \alpha U$ pro nějaké α. Protože $M \subset X_k$ plyne $M \subset \alpha (U \cap X_k) = \alpha U_k$. Tedy M je omezená v X_k.

(iii) Nechť U je barel v X. Pak $U_k = U \cap X_k$ je barel v X_k, takže U_k je okolím O v X_k, tedy U je okolím O v X. Prostor X je tedy barelovaný. ■

Příklady LF-prostorů

① $C_c(\Omega)$ spojité funkce s kompaktním nosičem v Ω je limitou Banachových prostorů $C_0(\Omega_k)$ spojitých funkcí s kompaktním nosičem v
$$\Omega_k = \{x \in \Omega,\ \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > \tfrac{1}{k},\ |x| < k\} \subset \Omega.$$

② $\mathcal{D}(\Omega)$ hladké funkce s kompaktním nosičem v Ω je limitou Frechetových prostorů $\mathcal{D}_{\overline{\Omega_k}}$

kladných funkcí s kompaktním nosičem v $\overline{\Omega}_k$.

Příklad LF-prostory nejsou metrizovatelné.

Pokud by byly, existovala by v nich spočetná báze okolí O v X, $U_1 \supset U_k \supset U_{k+1} \supset \dots$.

Existují $x_k \in U_k \setminus X_k$. ($U_k$ jsou pohlcující a pohltí ~~nějaký~~ každý prvek $y \in X_{k+1} \setminus X_k$.) Tedy

$$x_k \to O.$$

Tedy $\{x_k\}$ je omezená množina. Podle věty 5.7 (ii) je však $\{x_k\} \subseteq X_\ell$, spor s výběrem x_k. ■

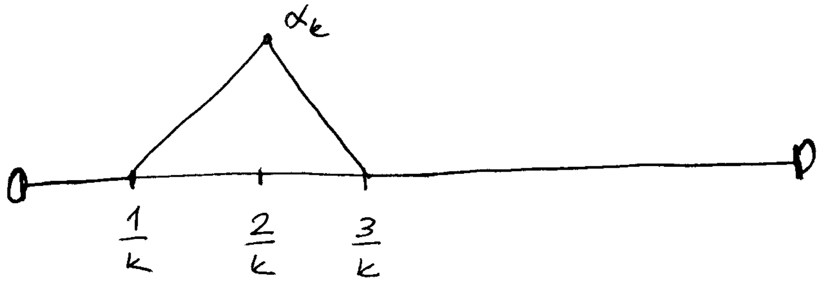
Příklad: $\mathcal{E}$, $\mathcal{D}_K$, $\mathcal{S}$: ohraničené množiny v nich jsou relativně kompaktní.

Ohraničené množiny v $\mathcal{D}(\Omega)$ jsou relativně kompaktní.

Relativní kompaktnost v $\mathcal{D}_K$ kde $K = [0,1] \subset \mathbb{R}^1$.
$\{\varphi_j\}$ ohraničená v $\mathcal{D}_K$. Ohraničenost $p_1(\varphi_j)$ a $p_0(\varphi_j)$ plyne stejnoměrná ohraničenost a spojitost φ_j. Podle Arzela-Ascoliho věty ~~jsou~~ existuje vybraná podposloupnost $\varphi_{j,0} \rightrightarrows \varphi$.
Dále se vybere $\varphi_{j,1} \rightrightarrows \cancel{\varphi^*} \Rightarrow \varphi' = \psi$, atd.

$M \subset \mathcal{D}(\Omega)$ ohraničená $\Rightarrow$ $M \subset \mathcal{D}(\Omega_k)$ ohraničená $\Rightarrow$ $M \subset \mathcal{D}(\Omega_k)$ relativně kompaktní $\Rightarrow$ M relativně kompaktní v $\mathcal{D}(\Omega)$.

<u>Příklad</u> $\Omega = (0,1) \subset \mathbb{R}$ $\quad \varphi_k : (0,1) \to \mathbb{R}$

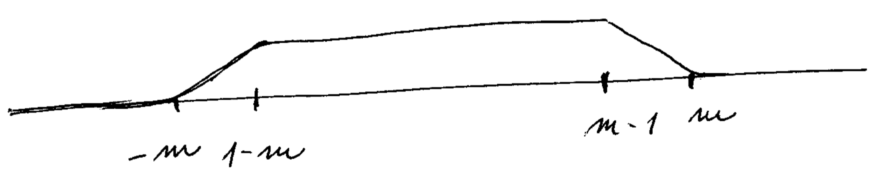


(i) $\varphi_k \to 0$ v F-prostoru $C(\Omega)$ s topologií lokálně stejnoměrné konvergence

(ii) $\varphi_k \to 0$ v B-prostoru $C_0(\Omega)$ právě tehdy když $\alpha_k \to 0$.

(iii) $\varphi_k \not\to 0$ v LF-prostoru $C_c(\Omega)$

<u>Příklad</u> $\varphi_m : \mathbb{R} \to [0,1]$



$\varphi_{m,n} = \frac{1}{m}\varphi_1 + \frac{1}{n}\varphi_m \qquad A = \{\varphi_{mn},\ m,n \in \mathbb{N}\}$

$0 \in \overline{A}$ v $C_c(\mathbb{R})$, ale neexistuje posloupnost $\{\varphi_{m_k,n_k}\} \subset A$ $\quad \varphi_{m_k,n_k} \to 0$.

U konv. okolí 0 v $X := C_c(\mathbb{R})$ $\quad X_k = C_0([-k,k])$

$U \cap X_k$ okolí 0 v X_k $\ \exists\, \varepsilon_k$ $\ \{\varphi \in X_k,\ |\varphi| \le \varepsilon_k\} \subset U \cap X_k$