Zvolme m, n tak, že $\frac{2}{m} < \varepsilon_1$, $2/n < \varepsilon_m$

$\frac{2}{m}\varphi_1 \in U \cap X_1 \qquad \frac{2}{n}\varphi_m \in U \cap X_m$

$\varphi_{m,n} = \frac{1}{2}\left(\frac{2}{m}\varphi_1 + \frac{2}{n}\varphi_m\right) \in U$

Pokud $\varphi_{m_k,n_k} \to 0$, potom $\varphi_{m_k,n_k} \in X_M$

Tedy $m_k \leq M$, odkud $\varphi_{m_k,n_k}(0) > \frac{1}{M}$, spor.

Lineární zobrazení v LKP

X, Y LKP $\qquad A : \mathcal{D}(A) \subset X \to Y$ lineární

A je spojité právě když je spojité v 0.

Prostor spojitých lin. zobrazení s $\mathcal{D}(A) = X$ značíme $\mathcal{L}(X,Y)$.

$A : X \to Y$ ohraničené, jestliže zobrazuje ohraničené množiny v X na ohraničené v Y.

Lemma 5.8 Je-li $A \in \mathcal{L}(X,Y)$, pak je A ohraničené.

Důkaz: Nechť $M \subset X$ je ohraničená. Nechť $\{x_n\} \subseteq M$, $\{Ax_n\} \subseteq A(M)$ a $\lambda_n \in K$, $\lambda_n \to 0$.

Protože M je ohraničená, je

$$\lambda_n x_n \to 0$$

a protože A je spojité, tak také

$$\lambda_n A x_n = A(\lambda_n x_n) \to 0$$

tedy je i $A(M)$ ohraničená.

<u>Bornologický LKP</u> je LKP, kde každá absolutně konvexní množina, která pohlcuje všechny ohraničené množiny je okolím 0.

<u>Věta: 5.9</u> Nechť X, Y jsou LKP a X navíc bornologický. Pak každé ohraničené zobrazení $A : X \to Y$ je spojité.

<u>Důkaz</u> Nechť V je absolutně konvexní okolí 0 v Y. Potom $U = A^{-1}(V)$ je absolutně konvexní. K tomu, aby to bylo okolí 0 v X stačí dokázat, že pohlcuje ohraničené množiny.

$M \subset X$ ohraničená $\Rightarrow$ $A(M)$ ohraničená v Y
$\Rightarrow \exists \lambda$ tak, že $A(M) \subseteq \lambda V$. Potom

$$M \subseteq A^{-1}(A(M)) \subseteq A^{-1}(\lambda V) = \lambda A^{-1}(V) = \lambda U.$$

$\blacksquare$

<u>Poznámka 5.10</u> Každý F-prostor je bornologický, každý LF-prostor je bornologický.

<u>Důkaz:</u> X je F-prostor. $U \subset X$ absolutně konvexní a pohlcuje ohraničené množiny. Protože je X

metrizovatelný, existuje spočetná báze okolí O. Označme ji $\{V_n\}$. $V_{n+1} \subset V_n$

Kdyby U nebyla okolím O, potom by ani kU nebyla okolím O, tedy by existovaly

$$x_k \in V_k \setminus kU .$$

Potom $x_k \to O$. Tedy $\{x_k\}$ je omezená množina, ale U ji nepohlcuje, spor.

X je LF prostor, $X = \lim X_k$. $U \subseteq X$ absolutně konvexní a pohlcuje ohraničené množiny. Potom $U \cap X_k$ je absolutně konvexní a pohlcuje ohraničené množiny. Tedy $U \cap X_k$ je okolí O v X_k, a definice topologie na X je U okolí O v X.

∎

Topologie na $\mathcal{L}(X, Y)$

Nechť P_Y je systém polonorem definující topologii na Y. Potom pro každou M ohraničenou v X a každou polonormu $q \in P_Y$ můžeme definovat polonormu na $\mathcal{L}(X, Y)$

$$p_{M,q}(A) = \sup_{x \in M} q(Ax) .$$

b-topologie na $\mathcal{L}(X,Y)$

je generovaná systémem polonorem

$$\{p_{M,q} \,;\, M \subset X \text{ ohraničená}, \; q \in \mathcal{P}_Y\}$$

s-topologie na $\mathcal{L}(X,Y)$

je generovaná systémem polonorem

$$\{p_{M,q} \,;\, M \subset X \text{ konečná}, \; q \in \mathcal{P}_Y\}$$

Báze okolí nuly je dána množinami

$$U_{M,V} = \{A \in \mathcal{L}(X,Y) \,;\, A(M) \subset V\}$$

kde M je ohraničená nebo konečná a V je okolí 0 v Y.

__Příklady__ X, Y normované. Pak b-topologie je dána normou

$$\|A\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|Ax\|_Y$$

Je-li X normovaný a $Y = \mathbb{K}$, pak s-topologie na $\mathcal{L}(X, \mathbb{K}) = X'$ je w^*-topologie.

b-ohraničené a s-ohraničené množiny v $\mathcal{L}(X,Y)$. Evidentně platí:

Tvrzení: Každá b-ohraničená množina v $\mathcal{L}(X,Y)$ je s-ohraničená.

Za jistých podmínek lze toto tvrzení obrátit.

Barel v LKP X je absolutně konvexní, pohlcující a uzavřená množina.
LKP je nazýván **barelovaný**, jestliže každý barel je okolím 0.

Lemma 5.11

Každý F-prostor je barelovaný. Každý LF-prostor je barelovaný.

Důkaz: Nechť X je F-prostor a $U \subset X$ barel. Potom $X = \bigcup_{k=1}^{\infty} kU$. Proto $\bigcap_{k=1}^{\infty} (X - kU) = \emptyset$. Proto z Baireovy věty plyne ($X - kU$ jsou otevřené), že pro některé k $X - kU$ není hustá, tedy ani $X - U$ není hustá. Tedy existuje x a okolí nuly V tak, že $x + V \subset U$. Můžeme předpokládat, že V je absolutně konvexní. Z abs. konvexvosti U plyne $-x-U \subset U$. Pro $v \in V$ platí

$$v = \frac{1}{2}(x+v) + \frac{1}{2}(-x+v) \in \frac{1}{2}(x+V) + \frac{1}{2}(-x-V) \subseteq U.$$

Tedy $V \subset U$ a U je okolím O.

Nechť X je LF-prostor. Nechť U je barel v X. Pak $U \cap X_k$ je barel v X_k pro každé k. Tedy je to okolí O v X_k a podle definice topologie na X, je U okolí O v X. ∎

<u>Věta 5.12</u> Nechť X a Y jsou LKP a X je barelovaný.

(i) Je-li $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ s-ohraničená, je také b-ohraničená.

(ii) Jestliže $A_n \in \mathcal{L}(X,Y)$ a $A_n x \to Ax$ pro každé x, pak $A \in \mathcal{L}(X,Y)$.

Jde o zobecnění principu stejnoměrné omezenosti (Banachovy-Steinhausovy věty)

<u>Důkaz (i)</u> Nechť V je uzavřené absolutně konvexní okolí O v Y. Potom

$$U = \bigcap_{A \in \mathcal{A}} A^{-1}(V)$$

je absolutně konvexní a uzavřená. Je-li $x \in X$, pak z s-omezenosti $\mathcal{A}$ plyne existence $\lambda > 0$ tak, že $Ax \in \lambda V$ pro každé $A \in \mathcal{A}$.

Tedy $x \in \lambda U$, U je pohlcující, tedy barel a okolí O v X.

Nechť $M \subset X$ je omezená. Potom

$$M \subset \lambda U$$

pro vhodné $\lambda > 0$, takže $A(M) \subset \lambda V$ pro všechna $A \in \mathcal{A}$. Tedy $\mathcal{A}$ je b-omezená.

(ii) Nechť V je absolutně konvexní uzavřené okolí O v Y. Z (i) plyne, že

$$U = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n^{-1}(V)$$

je okolí O v X. Jestliže $x \in U$, potom $A_n x \in V$ pro každé n. Z uzavřenosti V plyne $Ax \in V$. Tedy $U \subset A^{-1}(V)$ a A je spojité. ∎

<u>Totálně ohraničená množina</u> $M \subseteq X$ je množina taková, že pro každé okolí U nuly v X existuje konečná množina K tak, že

$$M \subseteq K + U$$

Topologie τ rovnoměrné konvergence na totálně ohraničených množinách v $\mathcal{L}(X,Y)$ je dána systémem polonorem

$$\{ p_{M,q} \; ; \; M \text{ totálně ohraničená v } X, \; q \in \mathcal{P}_Y \}$$

b-topologie je silnější než τ-topologie a ta je silnější než s-topologie, neboť konečné množiny $\subseteq$ totálně ohraničené $\subseteq$ ohraničené

Navíc platí, že každá relativně kompaktní množina v X je totálně ohraničená. Následující tvrzení budeme používat dále.

<u>Lemma 5.13</u>

Je-li X barelovaný a $\mathcal{A} \subset \mathcal{L}(X,Y)$ s-ohraničená, pak na $\mathcal{A}$ splývá s-topologie s topologií τ.

<u>Důkaz:</u> Bez újmy na obecnosti lze předpokládat, že $0 \in \mathcal{A}$ a že každé

typické τ-okolí O v $\mathcal{A}$ je menší s-okolím O v $\mathcal{A}$.

Typické okolí O v τ je

$$\mathcal{U}_{M,V} = \{ A \in \mathcal{A},\ A(M) \subset V \}$$

kde M totálně omezená a V ~~uzavřená~~ okolí v Y.

Pro každé okolí O v X, označme jej U, existuje konečná množina K tak, že

$$M \subset K + U$$

Zvolme W okolí O v Y tak, že $W + W \subset V$.

Uvažujme s-okolí O v $\mathcal{A}$

$$\mathcal{U}_{K,W} = \{ A \in \mathcal{A},\ A(K) \subset W \}$$

Z důkazu věty 5.12 (i) plyne existence U okolí O v X tak, že

$$A(U) \subset W$$

pro všechna $A \in \mathcal{A}$. K tomuto U zvolíme konečnou množinu K. Potom

$$\mathcal{U}_{K,W} \subset \mathcal{U}_{M,V}$$

neboť $\forall A \in \mathcal{U}_{K,W}$ je

$$A(M) \subset A(K) + A(U) \subset W + W \subset V.$$

∎

Distribuce

Uvažujme prostory $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ a $\mathcal{E}$ a jejich duální prostory $\mathcal{D}'$, $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{E}'$.

Prvky prostoru $\mathcal{D}'$ se nazývají <u>distribuce</u>

$\mathcal{S}'$ <u>temperované distribuce</u>

$\mathcal{E}'$ <u>distribuce s komp. nosičem</u>

Lemma 5.14

Nechť X je jeden z prostorů $\mathcal{D}$, $\mathcal{S}$ a $\mathcal{E}$.

(i) Nechť $f_k, f \in X'$. Potom $f_k \to f$ v X' právě když $f_k(\varphi) \to f(\varphi)$ pro každé $\varphi \in X$.

(ii) Jestliže $f_k \in X'$, $f_k(\varphi) \to f(\varphi)$ pro každé $\varphi \in X$, potom $f \in X'$.

<u>Poznámka</u> (i) říká, že konvergence v b topologii je stejná jako konvergence v s-topologii.

<u>Důkaz:</u> (ii) je okamžitý důsledek tvrzení (ii) věty 5.12 (zobecněného principu stejnoměrné konvergence)

Důkaz (i) Nechť $f_k(\varphi) \to f(\varphi)$ pro všechna φ, tj. $f_k \to f$ v s-topologii. Nechť $M \subset X$ je ohraničená. Z cvičení - příkladu na str. 75 víme, že M je relativně kompaktní, tedy M je totálně ohraničená. Podle lemmatu 5.13 konvergují f_k k f stejnoměrně na M (neboť $\{f_k, f\}$ je s-ohraničená). To znamená $f_k \to f$ v b-topologii prostoru X'.

Cvičení (i) Inkluze $\mathcal{D} \subset \mathcal{S} \subset \mathcal{E}$ jsou spojité, $\mathcal{D}$ je husté v $\mathcal{E}$.

(ii) Je-li $f \in \mathcal{E}'$, pak $f/\mathcal{S}$ je prvek $\mathcal{S}'$ a toto zobrazení je prosté. Obdobně $g \in \mathcal{S}'$, pak $g/\mathcal{D} \in \mathcal{D}'$.

(iii) ~~Na~~ Inkluze

$$\mathcal{E}' \subset \mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$$

jsou spojité.

Cvičení: Prostory $\mathcal{E}'$, $\mathcal{S}'$ a $\mathcal{D}'$ lze chápat jako zobecněné funkce.

1. Nechť $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$. Definujme

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\varphi(x)\,dx$$

pro všechna $\varphi \in \mathcal{D}$.

Platí $T_f \in \mathcal{D}'$.

Pro každé $\varepsilon > 0$ musíme ukázat, že

$$U = \{\varphi \in \mathcal{D} \,;\ |T_f(\varphi)| < \varepsilon\}$$

je okolí 0 v $\mathcal{D}$. U je určitě absolutně konvexní. Zvolme $K \subseteq \mathbb{R}^n$ kompaktní. Pak existuje c_K tak, že $\int_K |f(x)|\,dx < c_K$.

Položme

$$U_K = \{\varphi \in \mathcal{D}_K \,;\ \sup_{x \in K} |\varphi(x)| < \frac{\varepsilon}{c_K}\}$$

Potom U_K je otevřená v $\mathcal{D}_K$ a platí

$$U_K \subset U \cap \mathcal{D}_K$$

neboť pro $\varphi \in U_K$ je

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx \right| \le \frac{\varepsilon}{c_K} \int_K |f(x)|\,dx \le \varepsilon .$$

---

(2) Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ je měřitelná a

$$|f(x)| \le C(1+|x|)^m$$

pro nějaké m. Pak

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

pro $\varphi \in \mathcal{S}$ je prvkem $\mathcal{S}'$.

Ke spojitosti stačí dokázat: jestliže $\varphi_k \to 0$ v $\mathcal{S}$, pak $T_f(\varphi_k) \to 0$ v $\mathbb{R}$.

To plyne z odhadu

$$|T_f(\varphi)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx \right| \leq$$

$$\leq \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|f(x)|}{(1+\|x\|)^{m+n+1}}\,dx}_{C} \cdot \sup |\varphi(x)|\,(1+\|x\|)^{m+n+1}$$

$$= C \cdot p_{0,m+n+1}(\varphi)$$

$\longrightarrow$ pseudonorma

---

(3) Nechť $K \subset \mathbb{R}^n$ je kompaktní a $f \in L^1(K)$.

Potom

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,\varphi(x)\,dx$$

pro $\varphi \in \mathcal{E}$. Platí $T_f \in \mathcal{E}'$.

Důkaz:

$$|T_f(\varphi)| \leq \int_K |f(x)|\,dx \sup_{x \in K} |\varphi(x)|$$

$$\leq C \cdot p_{0,K}(\varphi).$$

Definice nosiče pro distribuci $T \in \mathcal{D}'$.
Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je otevřená. Řekneme, že $T = 0$ na Ω, jestliže $T(\varphi) = 0$ pro φ s kompaktním nosičem v Ω.