Položme
$$\Omega_T = \bigcup \{\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ T = 0 \text{ na } \Omega\}$$
$$\operatorname{supp} T = \mathbb{R}^n - \Omega_T$$

Lze dokázat

Lemma 5.15

$$\mathcal{E}' = \{T \in \mathcal{D}';\ \operatorname{supp} T \text{ je kompaktní}\}$$

Proto se prvky $\mathcal{E}'$ nazývají distribuce s kompaktním nosičem.

Zobecněné derivace

Zobrazení $\quad \partial^\alpha : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D} \quad (\mathcal{S} \to \mathcal{S},\ \mathcal{E} \to \mathcal{E})$ je spojité. Jeho duál $(\partial^\alpha)^* : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ je rovněž spojité zobrazení.

Lemma 5.16 Nechť $A \in \mathcal{L}(X, Y)$, kde X, Y jsou LKP. Potom duální zobrazení
$$A^* : Y' \longrightarrow X' \qquad A^* g = g A$$
je rovněž spojité.

Důkaz: Okolí 0 v X' je
$$U_{M,\varepsilon} = \{f \in X' : \sup_M |f(x)| < \varepsilon\}$$
kde M je ohraničená v X. Potom $A(M)$ je ohraničená v Y a platí

$$(A^*)^{-1}(U_{M,\varepsilon}) = \{g \in Y' ; \sup_{x\in M} |g\, A(x)| < \varepsilon\}$$
$$= \{g \in Y' ; \sup_{y\in A(M)} |g(y)| < \varepsilon\}. \quad \blacksquare$$

Definujme <u>derivaci distribuce</u>

$$D^\alpha T = (-1)^{|\alpha|}(\partial^\alpha)^* T, \text{ tj.}$$

$$D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\, T(\partial^\alpha \varphi).$$

Je-li $f \in C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$, pak platí

$$D^\alpha T_f = T_{\partial^\alpha f}$$

<u>Násobení distribuce ~~[illegible]~~ funkcí z $\mathcal{E}$</u>

$A : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{D}$ $\quad A(\varphi) = a\varphi$ kde $a \in \mathcal{E}$

$A^* : \mathcal{D}' \longrightarrow \mathcal{D}'$ $\quad (A^*T)\varphi = T(A\varphi) = T(a\varphi)$

Jestliže $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$, pak

$$A^*(T_f) = T_{af}$$

Píšeme

$$aT.$$

Jestliže $a \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ a všechny derivace mají nejvýše polynomiální růst, pak

$$T \longmapsto aT$$

je spojité zobrazení $\mathcal{S}' \longrightarrow \mathcal{S}'$.

Fourierova transformace distribucí

$$(\mathcal{F}u)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi x} u(x)\, dx$$

je definována pro $u \in L^1(\mathbb{R}^n)$, tedy pro všechna $u \in \mathcal{S}$. Ukázali jsme, že

$$\mathcal{F}/_{\mathcal{S}} : \mathcal{S} \longrightarrow \mathcal{S}$$

je spojité zobrazení.

$\mathcal{F}(D^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(u)$

$D^\alpha \mathcal{F}(u) = \mathcal{F}((-ix)^\alpha u)$

Inverzní Fourierova transformace $\mathcal{F}^{-1} : \mathcal{S} \to \mathcal{S}$

$$(\mathcal{F}^{-1}\varphi)(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\xi x} \varphi(\xi)\, d\xi$$

Fourierovu transformaci na $\mathcal{S}'$ definujeme jako duální zobrazení $\mathcal{S}' \to \mathcal{S}'$. Jde opět o izomorfismus, značíme jej opět $\mathcal{F}$.

Pro $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ je

$$\mathcal{F}T_f = T_{\mathcal{F}f}$$

Opět platí

$$\mathcal{F}(D^\alpha T) = a_\alpha \cdot \mathcal{F}(T) \quad \text{kde } a_\alpha(\xi) = (i\xi)^\alpha$$

Konvoluce distribucí

$f, g \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)'$

Přímý součin distribucí f a g je distribuce $f \times g \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^{2n})$ definovaná na $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ takto

$$(f \times g)(\psi) = f(\Phi)$$

kde $\Phi(x) = g(\psi(x, \cdot)) \qquad \Phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$

Je-li $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ a pro každou posloupnost $\eta_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^{2n})$ a $\psi(x,y) = \varphi(x+y)$ platí

$$\lim (f \times g)(\eta_k \psi) =: (f \times g)\psi$$

existuje (obecně $\psi(x,y)$ nemá kompaktní nosič)

definujeme

$$(f * g)\varphi = (f \times g)(\psi)$$

Distribuce vždy existuje, když množina

$$\{x+y,\ x \in \operatorname{supp} f,\ y \in \operatorname{supp} g,\ |x+y| < R\}$$

je omezená pro každé $R > 0$.

Tvrzení 5.16 Nechť existuje $f * g$. Potom existují $g * f = f * g$ a $(D^\alpha f) * g = f * (D^\alpha g) = D^\alpha (f * g)$. $\operatorname{supp}(f*g) \subset \overline{\operatorname{supp} f + \operatorname{supp} g}$

jestliže $f, g, f*g \in L^1(\mathbb{R}^n)$, pak

$$T_f * T_g = T_{f*g}.$$

Jestliže $f \in \mathcal{E}'$, $g \in \mathcal{S}'$, potom je definována $f*g$, $\mathcal{F}f$ má všechny derivace polynomiálně omezené a platí

$$\mathcal{F}(f*g) = (2\pi)^{n/2}\, \mathcal{F}(f)\cdot\mathcal{F}(g).$$

Diracova distribuce $\delta \in \mathcal{D}'$, $\delta(\varphi) = \varphi(0)$.

$\operatorname{supp}\delta = \{0\}$, δ je distribuce s kompaktním nosičem.

$$(\mathcal{F}\delta)(\varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx$$

$$(D^\alpha\delta)(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\, D^\alpha\varphi(0)$$

$$\delta * f = f$$

Řešení dif. rovnic

$L = \sum_{|\alpha|\le k} a_\alpha D^\alpha$ je dif. operátor s a_α konstantami. Předpokládejme, že existuje distribuce $G \in \mathcal{D}'$ s vlastností

$$L G = \delta \quad (\text{Diracova distribuce})$$

G se nazývá fundamentální řešení. Pokud $f \in \mathcal{D}'$ je taková distribuce, že existuje konvoluce $G * f$ platí

$$L(G*f) = LG * f = \delta * f = f$$

Tedy $G*f$ je řešením dif. rovnice

$$Lu = f$$

v $\mathbb{R}^n$ ve smyslu distribucí.

<u>Hörmanderova věta</u> Rovnice $Lu = f$ má pro každé $f \in \mathcal{S}'$ řešení $u \in \mathcal{S}'$.

Speciálně pro δ existuje fundamentální řešení $G \in \mathcal{S}'$.

<u>Nalezení fundamentálního řešení</u> pomocí Fourierovy transformace

$$L G = \delta$$

$$\mathcal{F}(LG) = \mathcal{F}(\delta)$$

$$P_L \, \mathcal{F}(G) = (2\pi)^{-n/2}$$

kde P_L je polynom $P_L(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha (i\xi)^\alpha$.

$$G = \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{1}{(2\pi)^{n/2}} P_L\right)$$

Speciálně pro $L = \Delta$ a $n = 3$ platí

$$G(x) = \mathcal{F}^{-1}\left(-(2\pi)^{-3/2}|\xi|^{-2}\right)$$

$$= -\frac{1}{4\pi|x|}.$$

Jestliže f je C^1 funkce s kompaktním nosičem, pak

$$Lu = f$$

má řešení $G * T_f$ v distribucích, které je dáno funkcí

$$-\frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^3}\frac{f(y)}{|x-y|}\,dy$$

a to je klasickým řešením dané rovnice.