6. DIFERENCIÁLNÍ POČET V NLP

<u>Definice</u> X, Y jsou NLP; $f : X \to Y$, $a \in X$, $h \in X$.
Jestliže existuje

$$\lim_{t \to 0} \frac{f(a+th) - f(a)}{t} = \delta f(a,h)$$

nazývá se <u>derivací ve směru</u> h.
Jestliže $\delta f(a,h)$ existuje pro všechna h a zobrazení

$$Df(a) : X \to Y \quad h \longmapsto \delta f(a,h)$$

je spojité a lineární, nazývá se <u>slabou</u> nebo <u>Gâteauxovou derivací</u> funkce f v bodě a.

<u>Věta 6.1</u> Nechť X, Y jsou NLP, $f : X \to Y$, $a \in X$, $h \in X$ a f má derivaci ve směru h v každém bodě úsečky spojující body $a, a+h$. Potom

(i) $\displaystyle \| f(a+h) - f(a) \| \leq \sup_{t \in (0,1)} \| \delta f(a+th, h) \|$

(ii) $\displaystyle \| f(a+h) - f(a) - \delta f(a,h) \| \leq \sup_{t \in (0,1)} \| \delta f(a+th, h) - \delta f(a,h) \|$

<u>Důkaz:</u> Podle Hahnovy-Banachovy věty existuje $\varphi \in Y'$ tak, že $\| f(a+h) - f(a) \| = \varphi(f(a+h) - f(a))$

a $\|\varphi\| = 1$. Položme

$$w(t) = \varphi(f(a+th))$$

Funkce $w : [0,1] \to \mathbb{R}$ má derivaci

$$w'(t) = \varphi(\delta f(a+th, h))$$

Podle věty o střední hodnotě pro reálné funkce je

$$\|f(a+h) - f(a)\| = w(1) - w(0) \le \sup_{t\in(0,1)} w'(t) =$$

$$= \sup \|\delta(a+th, h)\|$$

(ii) Provedeme totéž pro funkci

$$g(t) = f(a+th) - t\,\delta f(a,h).$$ ■

Věta 6.2 (o střední hodnotě v integrálním tvaru)

Za stejných předpokladů jako ve větě 6.1 předpokládejme navíc, že funkce

$$t \longmapsto \delta f(a+th, h)$$

má Bochnerův integrál na $[0,1]$. ~~Platí~~ (Speciálně Y je Banachův prostor a $t \mapsto \delta f(a+th, h)$ spojitá.)

Potom

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 \delta f(a+th, h)\,dt$$

Dk: Pro $\varphi \in Y'$ ~~platí~~ položme $w(t) = \varphi f(a+th)$.
Platí $w(1) - w(0) = f(a+h) - f(a) = \int_0^1 w'(t)\,dt = \int_0^1 \delta f(a+th, h)\,dt$

Frechetův diferenciál

Nechť X a Y jsou NLP, $f: X \to Y$, $a \in X$.
Zobrazení $f: X \to Y$ má v bodě $\underline{a}$ Frechetovu derivaci, jestliže existuje $f'(a) \in \mathcal{L}(X,Y)$ tak, že

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - f'(a)h\|}{\|h\|} = 0$$

Frechetovou derivací je lineární zobrazení $f'(a)$.

Pozn. 1 Existuje-li $f'(a)$, je f spojitá v a.

Pozn 2. Existuje-li $f'(a)$, existuje $\delta f(a,h) = f'(a)h$, tj. existuje Gâteauxova derivace $Df(a) = f'(a)$.

Věta 6.3 Nechť $f: X \to Y$ má na okolí bodu $a \in X$ Gâteauxovu derivaci a funkce $x \longmapsto Df(x)$ je spojitá z X do $\mathcal{L}(X,Y)$ v bodě a. Potom existuje $f'(a)$.

Důkaz. Pro každé $\varepsilon > 0$ existuje okolí bodu a tak, že $\|Df(a+h) - Df(a)\| \le \varepsilon$. Podle věty 6.1.(ii) platí
$\|f(a+h) - f(a) - Df(a)h\| \le \sup \|Df(a+th)[h] - Df(a)h\| \le \varepsilon \|h\|$.
Tedy limita z definice $f'(a)$ je rovna 0. ∎

Věta 6.4 (derivování složené funkce)

$f : X \to Y$, $g : Y \to Z$. Nechť f má v $a \in X$ derivaci ve směru h a nechť g má Fréchetovu derivaci $g'(b)$ v $b = f(a) \in Y$. Pak $\varphi = g \circ f$ má derivaci ve směru h v bodě a

$$\delta\varphi(a,h) = g'(b)\,\delta f(a,h)$$

(resp. ekvivalentně $D\varphi(a) = g'(b) \circ Df(a)$, resp. $\varphi'(a) = g'(b) \circ f'(a)$).

Příklady

(1) $f(x) = Ax$, kde $A \in \mathcal{L}(X,Y)$. Potom
$f'(x) = A$

(2) X prostor funkcí definovaných na Ω s hodnotami v $\mathbb{R}^n$
Y prostor funkcí definovaných na Ω s hodnotami v $\mathbb{R}^m$
Nechť $g : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$. Definujme operátor

$$G : X \to Y \qquad G(x)(t) = g(t, x(t))$$

$t \in \Omega$, $x \in X$. (Tzv. Němyckého operátor).

nechť g má spojité parciální derivace podle $x_1, x_2, \dots x_n$. Spočítáme $\delta G(x,h)$:

$$\delta G(x,h)(t) = \lim_{\tau \to 0} \frac{G(x+\tau h)(t) - G(x)(t)}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{g(t, x(t) + \tau h(t)) - g(t, x(t))}{\tau} =$$

$$= \lim_{\tau \to 0} \frac{1}{\tau} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k} (t, x(t) + \vartheta h(t)) \cancel{\tau} h_k(t) \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial g}{\partial x_k} (t, x(t))\, h_k(t)$$

Konvergenci jsme počítali v $\mathbb{R}^m$, aby skutečně $\delta G(x,h)$ existovalo tak konvergence musí být v normě prostoru Y.

(3) V předchozím volme $X = Y = C[0,1]$

$g(t) = \sin t$

$G : C[0,1] \to C[0,1] \qquad G(x)(t) = \sin x(t)$

zřejmě $\delta G(x,h)$ existuje, je rovna $h(t) \cos x(t)$.

Dokážeme, že je to Frechetova derivace:

$$\|G(x+h) - G(x) - \delta G(x,h)\|_{C[0,1]} = \max_{t \in [0,1]} |\sin(x(t) + h(t))$$

$$- \sin x(t) - h(t) \cos x(t)| = \max_{t \in [0,1]} |\sin x(t) \cos h(t) +$$

$$+ \cos x(t) \sin h(t) - \sin x(t) - h(t) \cos x(t)| =$$

$$\left| \sin x(t)\,(\cos h(t) - 1) + \cos x(t)\,(\sin h(t) - h(t)) \right|$$

$$\leq C \|h\|^2$$

neboť
$$\lim_{y \to 0} \frac{\cos y - 1}{y^2} = -\frac{1}{2}.$$

$$\lim_{y \to 0} \frac{\sin y - y}{y^2} = 0.$$

Tedy G má Frechetovu derivaci.

Parciální diferenciály

Nechť $f : X_1 \times X_2 \to Y$, kde X_1, X_2, Y jsou NLP. Nechť $f(-, a_2) : X_1 \to Y$ má Fr. derivaci v bodě a_1. Pak tento diferenciál nazýváme první parciální diferenciál funkce f v bodě $[a_1, a_2]$ a značíme $f_1'(a_1, a_2)$.

Na přednášce jsem nedělal.

Věta 6.4 Nechť $f : X_1 \times X_2 \to Y$ je definována na otevřené množině $G \subset X_1 \times X_2$. Pak f má spojitou Frechetovu derivaci na G právě když

(i) Pro každé $(a_1, a_2) \in G$ existuje $f_1'(a_1, a_2)$, $f_2'(a_1, a_2)$.

(ii) Zobrazení $f_1' : G \to \mathcal{L}(X_1, Y)$ a $f_2' : G \to \mathcal{L}(X_2, Y)$ jsou spojitá na G.

jsou-li tyto podmínky splněny, pak

$$f'(a_1,a_2)\,(h_1,h_2) = f_1'(a_1,a_2)\,h_1 + f_2'(a_1,a_2)\,h_2 .$$

Frechetův diferenciál n-tého řádu

$f : X \to Y$ má v bodě a Frechetův diferenciál n-tého řádu

$$f^{(n)}(a) \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots \mathcal{L}(X,Y)))$$

právě když f má ~~[illegible]~~ na okolí bodu a Frechetův diferenciál řádu $n-1$ a platí

$$\| f^{(n-1)}(a+h) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)\,h \| = o(\|h\|)$$

Prostory $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \dots \mathcal{L}(X,Y)))$ (X n-krát) lze ztotožnit s n-lineárními spojitými zobrazeními

$$X \times X \times \dots \times X \to Y .$$

Konkrétně $\mathcal{B}(X,Y)$ = spojitá bilin. zobrazení $X \times X \to Y$ ztotožníme s $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$ takto: $B \in \mathcal{B}(X,Y)$ definuje $C \in \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X,Y))$

$$C(x)(h) = B(x,h)$$

a obráceně.

Věta 6.5

Nechť pro $f: X \to Y$ existuje $f''(a)$. Potom pro libovolné $h, k \in X$ je

$$f''(a)[h,k] = f''(a)[k,h].$$

Jinými slovy: $f''(a)$ je symetrická bilineární forma.

Důkaz nebudeme provádět.

Věta 6.6

Nechť $f: X \to \mathbb{R}$ má lokální extrém v bodě $a \in X$. Pak pro $h \in X$ je buď

$$\delta f(a,h) = 0$$

nebo tato derivace ve směru neexistuje.

Bod $a \in X$ se nazývá kritický bod funkce f jestliže $\delta f(a,h) = 0$ pro všechna $h \in X$.

Druhá Gateauxova derivace funkce $f: X \to Y$

Položme $\varphi(t_1, t_2) = f(a + t_1 h_1 + t_2 h_2)$

Existuje-li $\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial t_2 \partial t_1}(0,0) \underset{df}{=} \delta f(a, h_1, h_2)$

nazýváme ji 2. derivací ve směru h_1, h_2.
Existuje-li Df v okolí bodu a a je-li $(h_1, h_2) \longmapsto \delta^2 f(a, h_1, h_2)$ spojité bilineární zobrazení, značíme jej $D^2 f(a)$ a nazýváme 2. Gâteauxovou derivací.

Věta 6.7

Nechť $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$ je kritický bod funkce f a $D^2 f$ je spojitá na okolí bodu a jako zobrazení $X \to \mathcal{B}(X, \mathbb{R})$.
Jestliže existuje $\alpha > 0$ tak, že

$$D^2 f(a)(h, h) \geq \alpha \|h\|^2$$

pak f má v bodě a ostré lokální maximum.

Důkaz: Pro funkci $w(t) = f(a + th)$ platí tato verze Taylorovy věty

$$w(1) = w(0) + w'(0) + \int_0^1 (1-t)\, w''(t)\, dt$$

(Věta o střední hodnotě aplikovaná na $(1-t)\, w'(t)$.)

Proto

$$f(a+h) - f(a) = \int_0^1 (1-t)\, D^2 f(a+th)(h,h)\, dt =$$

$$= \int_0^1 (1-t)\, D^2 f(a)(h,h)\, dt - \int_0^1 (1-t)\, \| D^2 f(a+th) - D^2 f(a)\| \, \|h\|^2 dt$$

$$\geq \alpha \|h\|^2 - \| D^2 f(a+th) - D^2 f(a)\| \, \|h\|^2 \geq \frac{\alpha}{2} \|h\|^2$$

pro $\|h\|$ dostatečně malou. ■

Postačující podmínky pro globální extrémy

T topologický prostor, $f : T \to \mathbb{R}$ je polospojitá zdola v a, jestliže

$$\{x \in T;\ f(x) > f(a) - \varepsilon\}$$

je okolím a v T pro každé $\varepsilon > 0$.

$f : T \to \mathbb{R}$ je polospojitá zdola na T, jestliže f je polospojitá zdola v každém $a \in T$

$\iff \forall \alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in T;\ f(x) > \alpha\}$ otevřená v T

$\iff \forall \alpha \in \mathbb{R}$ je $\{x \in T;\ f(x) \leq \alpha\}$ uzavřená v T

Věta 6.8

Nechť T je kompaktní topologický prostor a $f : T \to \mathbb{R}$ zdola polospojitá. Pak f nabývá na T svého minima.