Důkaz: Nechť $\beta = \inf_{x \in T} f(x)$. (Může být teoreticky i $\beta = -\infty$.) Položme

$$M_\alpha = \{ x \in T,\ f(x) \leq \alpha \}.$$

Kdyby f nenabývala svého minima na T, pak

$$\bigcap_{\alpha > \beta} M_\alpha = \emptyset.$$

Množiny M_α jsou uzavřené a neprázdné, tedy množiny $T - M_\alpha$ jsou otevřené a platí

$$\bigcup_{\alpha > \beta} (T - M_\alpha) = T.$$

Z kompaktnosti T plyne existence konečného podpokrytí

$$\bigcup_{i=1}^{k} (T - M_{\alpha_i}) = T$$

Potom

$$\bigcap_{i=1}^{k} M_{\alpha_i} = \emptyset.$$

To ovšem znamená

$$M_{\min\{\alpha_i\}} = \emptyset$$

a protože $\min\{\alpha_i\} > \beta$, dostáváme spor s definicí β. ∎

DŮSLEDEK 6.9

Nechť X je NLP, $M \subset X$ a $f : M \to \mathbb{R}$. Jestliže M je slabě kompaktní a f slabě zdola polospojitá, pak f nabývá na M svého minima.

<u>Definice</u> $f: X \to \mathbb{R}$ kde X je NLP je sekvenciálně slabě zdola polospojitá, jestliže
$$x_n \rightharpoonup x \text{ implikuje } \underline{\lim}\, f(x_n) \geq f(x).$$

<u>Věta 6.10</u>

Nechť X je NLP, $M \subset X$ a $f: M \to \mathbb{R}$.

Jestliže je splněn jeden z následujících tří předpokladů

(i) X' je separabilní, M je ~~omezená~~ slabě kompaktní ~~uzavřená~~ a f je sekvenciálně slabě zdola polospojitá,

(ii) X je reflexivní, M je omezená a slabě uzavřená a f je sekvenciálně ~~zdola~~ slabě zdola polospojitá,

(iii) X je reflexivní, M omezená, konvexní a uzavřená v normové topologii a f je sekvenciálně slabě zdola polospojitá,

pak existuje $\min\limits_{x \in M} f(x)$.

Důkaz: (i) Jestliže X' je separabilní, pak (M, w) je metrizovatelný topologický prostor podle věty 5.3(b). Nechť $x_n \in M$ je minimizující posloupnost, tj.

$$\lim_{x \to \infty} f(x_n) = \inf_{x \in M} f(x) = \beta$$

Protože M je ve slabé topologii kompaktní metrický prostor, lze vybrat podposloupnost

$$x_{n_k} \longrightarrow x \in M .$$

Protože f je sekvenciálně slabě zdola polospojitá, tak

$$\beta = \underline{\lim}\, f(x_{n_k}) \geq f(x).$$

Tedy f nabývá v x svého minima β. ■

(ii) K důkazu použijeme následující věty:

VĚTA 6.11 (Eberlein, Šmuljan)

Je-li X reflexivní Banachův prostor, pak z každé omezené posloupnosti lze vybrat slabě konvergentní.

Nechť $(x_n) \subset M$ je minimizující posloupnost pro funkci f. Potom podle Eberleinovy-Šmuljanovy věty existuje podposloupnost

$x_{n_k} \longrightarrow x \in M$. Protože f je sekvenciálně slabě zdola polospojitá, tak $f(x) = \lim f(x_{n_k}) = \min_M f$. ∎

(iii) V tomto případě stačí ukázat, že M omezená, konvexní a uzavřená v normové topologii, je uzavřená i ve slabé topologii a použít (ii).
Skutečnost, že M je slabě uzavřená, je důsledkem následující věty:

Věta 6.12 Je-li M v NLP X uzavřená a konvexní a $x \in X \setminus M$, pak existuje $f \in X'$ tak, že

$$f(M) < \alpha < f(x).$$

(Jde o důsledek Hahnovy-Banachovy věty.)

Je-li tedy $x \in X \setminus M$, pak jeho slabé okolí

$$\{y \in Y,\ \alpha < f(y)\}$$

nemá průnik s M. Tedy M je slabě uzavřená. ∎

Poznámka Je-li f konvexní a zdola polospojitý v normě funkcionál $X \to \mathbb{R}$, pak je slabě zdola polospojitý.

Dk: Množina $\{x \in X,\ f(x) \le \alpha\}$ je uzavřená v normě a konvexní. Podle věty 6.12 je slabě uvaněna. Tedy f je slabě zdola polospojitý.

<u>Definice</u> Funkcionál se nazývá <u>slabě koercivní</u>, jestliže
$$\lim_{\|x\|\to\infty} f(x) = \infty .$$

<u>Důsledek 6.13</u>

Je-li X reflexivní Banachův prostor a funkcionál $f: X \to \mathbb{R}$ je slabě koercivní a ~~slabě~~ sekvenciálně slabě zdola polospojitý, pak f nabývá na X svého minima.

<u>Důkaz:</u> Minimizující posloupnost $\{x_n\}$ je omezená. Dále stejně jako v důkazu věty 6.10 (ii). ∎

<u>Věta 6.14</u>

Nechť X je reálný reflexivní Banachův prostor. Nechť funkcionál $f: X \to \mathbb{R}$ má v každém ~~bodě~~ X druhou Gâteauxovu derivaci $D^2 f(x)$, která je pozitivně definitní, tj. existuje $\alpha > 0$ tak, že
$$D^2 f(x)\,(h,h) \geq \alpha \|h\|^2 .$$
Pak existuje jediné $x_0 \in X$ tak, že
$$f(x_0) = \inf_{x\in X} f(x)$$
a každá minimizující posloupnost konverguje k x_0.

Důkaz: Označme $\varphi(t) = Df(a+t(x-a))(x-a)$ pro pevné $a, x \in X$. $\varphi(t)$ je spojitá (neboť existuje $D^2 f$) a platí

$$f(x) - f(a) = \int_0^1 Df(a+t(x-a))(x-a)\,dt = \int_0^1 \varphi(t)\,dt =$$

$$= \varphi(0) + \int_0^1 (\varphi(t) - \varphi(0))\,dt = \varphi(0) + \int_0^1 t\,\varphi'(\vartheta(t))\,dt$$

$$= Df(a)(x-a) + \int_0^1 t\, D^2 f(a+\vartheta(t)(x-a))(x-a, x-a)\,dt$$

$$\geq Df(a)(x-a) + \frac{\alpha}{2}\|x-a\|^2 \geq \|x-a\|\left(\frac{\alpha}{2}\|x-a\| - \|Df(a)\|\right)$$

Odtud plyne

① f je silně koercitivní, je-li $\|x-a\| \to \infty$, je $f(x) - f(a) \to \infty$.

② f je slabě polospojitá v normě

Jestliže $x_n \to a$, pak $f(x_n) - f(a) \geq \alpha_n \to 0$

Tedy $\underline{\lim}\, f(x_n) \geq f(a)$.

③ f je konvexní. Platí

$$f(x) - f(a) \geq Df(a)(x-a)$$

Pro $y_1, y_2 \in X$ položme $a = ty_1 + (1-t)y_2$

Dosazíme

$$f(y_1) - f(ty_1 + (1-t)y_2) \geq (1-t)\,Df(a)(y_1 - y_2)$$

$$f(y_2) - f(ty_1 + (1-t)y_2) \geq -t\,Df(a)(y_1 - y_2)$$

Vynásobíme první t, druhou $1-t$ a sečteme:

$$t\, f(y_1) + (1-t) f(y_2) \geq f(t y_1 + (1-t) y_2)$$

Podle důsledku 6.13 a poznámky na str. 110 nabývá f svého minima. Nechť je to v bodě x_0. V něm $Df(x_0) = 0$. Nechť x_n je minimizující posloupnost. Potom

$$f(x_n) - f(x_0) \geq \frac{\alpha}{2} \|x_n - x_0\|^2.$$

Protože levá strana konverguje k 0, musí

$$x_n \to x_0.$$

Z nerovnosti

$$f(x) - f(x_0) \geq \frac{\alpha}{2} \|x - x_0\|^2$$

plyne, že f nabývá svého minima v jediném bodě. ∎

7. LEREYŮV - SCHAUDERŮV STUPEŇ ZOBRAZENÍ

Nechť X je LKP. Nelineární operátor $f: X \to X$ se nazývá kompaktní, jestliže pro každou ohraničenou množinu $M \subset X$ je $\overline{f(M)}$ kompaktní.

Cílem této kapitoly je dokázat Schauderovu větu o pevném bodu

Věta 7.1 (Schauderova o pevném bodu)

Nechť X je Banachův prostor. Nechť $\emptyset \neq K \subset X$ je uzavřená, ohraničená a konvexní množina. Jestliže $f: X \to X$ je kompaktní operátor takový, že $f(K) \subset K$, pak existuje $x_0 \in K$ tak, že

$$f(x_0) = x_0 .$$

STUPEŇ ZOBRAZENÍ

V následujícím bude $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ohraničená otevřená množina. Nechť $f: \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$, $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ a $y \notin f(\partial\Omega)$. Bod $x \in f_{-1}(y)$ nazýváme regulární, jestliže $f'(x): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární izomorfismus, tj

$$J_f(x) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right) \neq 0 .$$

<u>Definice</u>: Nechť $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)$ a $f_{-1}(y)$ obsahuje pouze regulární body. Potom definujeme

$$\deg(f, \Omega, y) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \operatorname{sign} J_f(x) .$$

<u>Pozn.</u> Množina $f^{-1}(y)$ obsahující pouze reg. body je konečná.

Definici chceme postupně rozšířit na $f \in C(\overline{\Omega})$ a $y \notin f(\partial\Omega)$. ~~K~~ Tomu potřebujeme jedno technické lemma:

<u>Lemma o 7 epsilon</u>

Nechť $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $i = 1, 2$ a $z \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové, že

$$\operatorname{dist}(f_i(\partial\Omega), z) \geq 7\varepsilon$$

$$\| f_1(x) - f_2(x) \| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$$

a nechť $f_1^{-1}(z)$ i $f_2^{-1}(z)$ obsahují pouze regulární body. Potom

$$\deg(f_1, \Omega, z) = \deg(f_2, \Omega, z) .$$

Důkaz je založen na integrálním vyjádření stupně.

Funkci $\Phi : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ nazýváme regularizátorem v $\mathbb{R}^n$ jestliže

(1) $\Phi \in C[0,\infty) \cap C^\infty(0,\infty)$

(2) $\Phi(r) = 0$ pro $r = 0$ a $r \geq r_0$

(3) $\int_{\mathbb{R}^n} \Phi(\|x\|)\, dx = 1.$

Nechť $f \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \notin f(\partial\Omega)$ a $f^{-1}(y) = \{x_1, \dots, x_k\}$ obsahuje pouze regulární body. Potom ke každému x_i existuje okolí $U(x_i)$ tak, že

(i) $U(x_i) \subset \Omega$ $\quad U(x_i) \cap U(x_j) = \emptyset$ pro $i \neq j$

(ii) $J_f(x) \neq 0$ pro $x \in \bigcup_{j=1}^{k} U(x_i)$

(iii) f je prosté na $U(x_i)$

Potom $f(U(x_i))$ je okolí y a nechť $\eta > 0$ je takové, že
$$y + B_\eta \subset \bigcap_{i=1}^{k} f(U(x_i))$$

Dále označme
$$0 < \delta < \min\{\|f(x) - y\|,\ x \in \overline{\Omega} \setminus \bigcup U(x_i)\}$$

Zvolme regularizátor Φ s nosičem v intervalu $[0, \min(\delta, \eta)]$. Potom
$$\deg(f, \Omega, y) = \int_{\Omega} \Phi(\|f(x) - y\|)\, J_f(x)\, dx$$

Důkaz:

$$\int_\Omega \Phi(\|f(x)-y\|)\, J_f(x)\,dx = \int \Phi(\|f(x)-y\|)\, J_{f-y}(x)\,dx$$

$$= \int_{\bigcup_{i=1}^{k} U(x_i)} \Phi(\|f(x)-y\|)\, J_{f-y}(x)\,dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{U(x_i)} \Phi(\|f(x)-y\|)\, J_{f-y}(x)\,dx$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_{f-y}(x_i) \int_{f(U(x_i))-y} \Phi(\|z\|)\,dz = \sum_{i=1}^{k} \operatorname{sgn} J_f(x_i)$$

$$= \deg(f,\Omega,y).$$

Důsledek lemmatu o 7 epsilon

Nechť $f_i \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $i=1,2$, $z_1, z_2 \in \mathbb{R}^n$. Nechť $\varepsilon > 0$ je takové, že

$$\operatorname{dist}(f_i(\partial\Omega), z_j) \geq 7\varepsilon$$
$$\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}$$
$$\|z_1 - z_2\| \leq \varepsilon$$

a nechť $f_i^{-1}(z_j)$ obsahují pouze regulární body. Potom

$$\deg(f_1,\Omega,z_1) = \deg(f_2,\Omega,z_2).$$

Podle ~~[illegible]~~ lemmatu o 7 epsilon je

$$\deg(f_1, \Omega, z_1) = \deg(f_2, \Omega, z_1) = \deg(f_2, \Omega, z_2)$$

neboť

$$\deg(f_2, \Omega, z_1) = \deg(f_2 - z_1, \Omega, 0) = \deg(f_2 - z_2, \Omega, 0)$$
$$= \deg(f_2, \Omega, z_2).$$

Dále potřebujeme Sardovu větu

<u>Věta (Sard)</u>

Nechť $f\ \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ doména a ohraničená, $f \in C^1(\Omega)$. Potom množina

$$f(\{x \in \Omega,\ J_f(x) = 0)$$

má Lebesgueovu míru 0 v $\mathbb{R}^n$.

<u>Definice</u> $\deg(f, \Omega, y)$ pro $f \in C^1(\Omega) \cap C(\bar\Omega)$ a y takové, že $f^{-1}(y)$ neobsahuje pouze regulární body:

Podle Sardovy věty existují y_n regulární hodnoty zobrazení f takové, že $y_n \to y$. Potom

$$\deg(f, \Omega, y_n)$$

jsou definovány a podle předchozího lemmatu konstantní pro ~~y~~ n dostatečně velké. Položíme

$$\deg(f, \Omega, y) = \lim \deg(f, \Omega, y_n).$$

Definice je nezávislá na výběru posloupnosti y_n.

Lemma o 8 epsilon

Nechť $f_1, f_2 \in C^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$, $y \in \mathbb{R}^n$. Nechť existuje $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\operatorname{dist}\left(f_i(\partial\Omega), y\right) \geq 8\varepsilon$$

$$\|f_1(x) - f_2(x)\| \leq \varepsilon \quad \text{pro } x \in \overline{\Omega}.$$

Potom

$$\deg(f_1, \Omega, y) = \deg(f_2, \Omega, y).$$

Důkaz: Nechť y_1 je regulární hodnota pro f_1 i f_2 taková, že $\|y_1 - y\| \leq \varepsilon$ a

$$\deg(f_1, \Omega, y_1) = \deg(f_1, \Omega, y)$$

$$\deg(f_2, \Omega, y_1) = \deg(f_1, \Omega, y).$$

Potom $\operatorname{dist}\left(f_i(\partial\Omega), y_1\right) \geq 7\varepsilon$

a podle lemmatu o 7 epsilon je

$$\deg(f_1, \Omega, y) = \deg(f_1, \Omega, y_1) = \deg(f_2, \Omega, y_1) = \deg(f, \Omega, y).$$

■

~~Lemma o homotopii~~

~~Nechť $h: [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$~~ ~~[illegible]~~

Definice ~~pro~~ deg (f,Ω,y) pro $f \in C(\overline{\Omega})$ a $y \notin f(\partial\Omega)$. Existují ~~nějaké~~ $f_n \in C(\overline{\Omega}) \cap C^1(\Omega)$ ~~spec~~ tak, že $f_n \rightrightarrows f$ na $\overline{\Omega}$. Definujeme

$$\deg(f,\Omega,y) = \lim_{n\to\infty} \deg(f_n,\Omega,y)$$

neboť $\deg(f_n,\Omega,y) = \deg(f_m,\Omega,y)$ pro n a m dostatečně velké.

Tato definice je nezávislá na volbě posloupnosti $\{f_n\}$.

Lemma o homotopii

Nechť Ω je otevřená a ohraničená množina v $\mathbb{R}^n$. Nechť $h : [0,1] \times \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ je spojitá a nechť $y \in \mathbb{R}^n$ je takový bod, že $y \notin h([0,1] \times \partial\Omega)$. Pak

$$\deg(h(0,-),\Omega,y) = \deg(h(1,-),\Omega,y).$$

Důkaz se provede na základě předchozí definice a δ-epsilonového lemmatu.

Příklad $\deg(id,\Omega,y) = 1$ pro $y \in \Omega$

$\deg(id,\Omega,y) = 0$ pro $y \notin \overline{\Omega}$.