<u>Věta 6.15</u> Nechť $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ je omezená, $f \in C(\overline{\Omega})$ a $y \in \mathbb{R}^n \setminus f\partial(\Omega)$. Je-li $\deg(f, \Omega, y) \neq 0$, pak existuje $x \in \Omega$ tak, že

$$f(x) = y.$$

Důkaz se provádí postupně tak, jak se definuje stupeň. ■

<u>Věta 6.16</u> (Brouwerova)

Nechť K je neprázdná ohraničená uzavřená a konvexní podmnožina v $\mathbb{R}^n$, $f \in C(K)$ a $f(K) \subset K$. Potom existuje $x_0 \in K$ tak, že

$$f(x_0) = x_0.$$

<u>Důkaz</u> Nechť B je koule uvnitř obsahující K. Potom f lze rozšířit na $F : B \to K$. Větu stačí dokázat pro F. Uvažujme homotopii

$$h \quad [0,1] \times B \longrightarrow K$$
$$h(t, x) = x - tF(x)$$

Podle definice F platí $0 \neq h(t,x)$ pro $x \in \partial B$. Proto

$$\deg(h(1,-), B, 0) = \deg(h(0,-), B, 0) =$$
$$= \deg(\mathrm{id}, B, 0) = 1.$$

Tedy existuje x_0 $x_0 - F(x_0) = 0$. Tj

$$f(x_0) = x_0. \qquad \blacksquare$$

Varianta předpokladů 6.17

B koule v $\mathbb{R}^n$ o středu 0, $f \in C(\overline{B})$ a pro všechna $x \in \partial B$ a $\lambda \geq 0$ platí

$$f(x) + \lambda x \neq 0.$$

Pak existuje $x_0 \in B$, že

$$f(x_0) = 0.$$

Dk Položme $h(t, x) = t f(x) + (1-t) x$.

Důsledek 6.18

Nechť $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je spojitá, $\lim\limits_{\|x\| \to \infty} \frac{\langle f(x), x \rangle}{\|x\|} = \infty$.

Potom

$$f(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n.$$

Důkaz: Zvolme $y \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(x) = f(x) - y$.

Protože $\frac{\langle \varphi(x), x \rangle}{\|x\|} \to \infty$, existuje $R > 0$ tak, že na ∂B_R je $\langle \varphi(x), x \rangle > 0$, proto

$$\varphi(x) + \lambda x \neq 0$$

pro $\lambda > 0$ a podle předchozího existuje $x_0 \in B_R$, že $\varphi(x_0) = 0$ tj. $f(x_0) = y$.

VĚTY O PEVNÝCH BODECH V NEKONEČNĚ DIM. PROSTORECH

<u>Příklad</u> Analogie Brouwerovy věty obecně neplatí

H Hilbertův prostor nekonečné dimense, $(e_n)_1^\infty$ úplný ortonormální systém v H. Pro $\|x\| \leq 1$ definujeme

$$f(x) = \left[1 - \|x\|^2\right]^{1/2} e_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (x, e_n)\, e_{n+1}$$

$f : \overline{B}_1 \to \overline{B}_1$ je spojitá

$$\|f(x)\|^2 = 1 - \|x\|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 = 1$$

Kdyby $f(x_0) = x_0$, pak $\|x_0\| = 1$ a

$$\sum (x, e_n)\, e_{n+1} = \sum (x, e_n)\, e_n$$

tj $0 = (x, e_1) = (x, e_2) = \dots$, tedy $x = 0$, spor.

<u>Definice</u> Nechť X, Y jsou LKP. Zobrazení $f : X \to Y$ se nazývá <u>kompaktní</u> na $A \subset X$, když platí

(i) f je spojité na A

(ii) pro $\forall M \subset A$ omezenou je $\overline{f(M)}$ kompaktní.

Lemma 6.19

Nechť X a Y jsou LKP a $f: X \to Y$ je kompaktní na omezené množině $A \subset X$. Potom pro libovolné okolí U bodu $0 \in Y$ existuje konečně dimenzionální podprostor $Y_U \subset Y$ a na A kompaktní zobrazení
$$f_U : X \to Y_U \subset Y$$
tak, že pro všechny $x \in A$ je
$$f(x) - f_U(x) \in U.$$

Důkaz: U konvexní a vyvážené okolí 0 v Y. $\overline{f(A)}$ je kompaktní a $(f(x)+U)_{x\in A}$ je otevřené pokrytí $\overline{f(A)}$. Existují $x_1, x_2, \dots x_n$ tak, že $(f(x_i)+U)_{i=1}^{n}$ je konečné podpokrytí. Nechť p je Minkowského funkcionál okolí U. Položme
$$\mu_i(x) = \max\{0,\ 1 - p(f(x) - f(x_i))\}$$
pro $i = 1, 2, \dots n$. Potom
$$\sum \mu_i(x) > 0$$
pro každé $x \in A$, μ_i jsou navíc spojité. Položme $\lambda_i(x) = \dfrac{\mu_i(x)}{\sum_{j=1}^{n} \mu_j(x)}$. λ_i jsou spojité a $\sum \lambda_i(x) = 1$, $\lambda_i(x) \geq 0$. Definujme
$$f_U(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x) f(x_i).$$

a položíme $Y_U = [f(x_1), f(x_2), \dots f(x_n)]$.

$$f_U : A \longrightarrow Y_U$$

je spojitá, konečněrozměrná a kompaktní.

Pro $x \in A$ je

$$f(x) - f_U(x) = \sum{}' \lambda_i(x) \big(f(x_i) - f(x)\big) \in U.$$

Rozšíření stupně zobrazení pro Id-kompaktní

Nechť $f : X \to X$, X Banachův prostor, $\Omega \subset X$ ohraničená, otevřená, $y \notin g(\partial\Omega)$, kde

$$g = id - f$$

f kompaktní. Potom

(i) $g(\partial\Omega)$ je uzavřená $\Rightarrow \mathrm{dist}\,(y, g(\partial\Omega)) = \delta > 0$

(ii) f_ε je ε-aproximace konečněrozměrná zobrazení f na $\overline{\Omega}$, $f_\varepsilon(\overline{\Omega}) \subset X_\varepsilon$ a $y \in X_\varepsilon$.

Položíme $g_\varepsilon = id - f_\varepsilon$. Pro $\varepsilon < \delta$ je $y \notin g_\varepsilon(\partial\Omega)$. Platí, že

$$\deg\,(g_\varepsilon / X_\varepsilon \cap \overline{\Omega},\ X_\varepsilon \cap \Omega, y)$$

nezávisí na volbě f_ε. Definujeme

$$\deg\,(g, \Omega, y) = \deg\,(g_\varepsilon / X_\varepsilon \cap \Omega,\ X_\varepsilon \cap \Omega, y)$$

Leray - Schauderův stupeň zobrazení

Věta 6.20 (Tichonov, Schauderův princip)

Nechť X je LKP, $K \neq \emptyset$ ohraničená neprázdná
uzavřená a konvexní podmnožina v X. Nechť $f: X \to X$
je kompaktní na K, $f(K) \subset K$. Potom
existuje aspoň jeden bod $x_0 \in K$ tak, že

$$f(x_0) = x_0.$$

Poznámka Pro X Banachův se tato věta
nazývá Schauderův princip.

Důkaz: U konvexní okolí O v X, podle lemmatu
existuje $f_U(x)$ konečně dimenzionální, $f_U\ X \to X_U$,
tak, že $f(x) - f_U(x) \in U$ pro $x \in K$. Tedy
$f_U: X_U \cap K \to K \cap X_U$ splňuje předpoklady Brouwerovy
věty a existuje $x_U \in K$ tak, že $f_U(x_U) = x_U$.
Nechť $\mathcal{U}$ je báze konvexních okolí O v X

$$\left(f(x_U)\right)_{U \in \mathcal{U}} \subseteq \overline{f(K)} \subseteq K$$

Z kompaktnosti $\overline{f(K)}$ plyne, že existuje báze
okolí O $\mathcal{B} \subset \mathcal{U}$ tak, že

$$\lim_{V \in \mathcal{B}} f(x_V) = x_0$$

To znamená: $\forall\, W \in \mathcal{U}$ existuje $V \in \mathcal{B}$, že pro
všechna $U \subseteq V$, $U \in \mathcal{B}$ je $f(x_U) \in x_0 + W$.

Pro libovolné $\widetilde{W} \in \mathcal{U}$ zvolme $W \in \mathcal{B}$ tak, že $W + W \subset \widetilde{W}$ a dále zvolme V z předchozího pro W tak, že $V \subset W$. Potom pro $U \leq V$

$$x_0 - x_U = \cancel{\ldots}$$

$$x_0 - f_U(x_U) = x_0 - f(x_U) + f(x_U) - f(x_U)$$

$$\in W + U \subseteq W + W \subseteq \widetilde{W}$$

Tedy $\lim_{U \in \mathcal{B}} x_U = x_0$. Ze spojitosti f plyne

$$x_0 = \lim_{U \in \mathcal{B}} f(x_U) = f(x_0).$$ ■

Poznámka (Pro X metrický je důkaz jednodušší.)

<u>DŮSLEDEK 6.21 (Slabý Schauderův princip)</u>

Nechť X je reflexivní Banachův prostor, $K \neq \emptyset$ ohraničená, uzavřená a konvexní v X, $f: K \to K$ a $f: (K, w) \to (K, w)$ spojité. Pak existuje $x_0 \in K$, že $f(x_0) = x_0$.

<u>Důkaz</u>: K je slabě (w-) uzavřená, (K, w) je metrizovatelná a podle věty (Alaoglu) lze z každé omezené posloupnosti vybrat konvergentní. Tedy $f: (K, w) \to (K, w)$ je kompaktní a podle předchozí věty má pevný bod.

<u>Příklad</u> Nechť $f : [0,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je spojitá a omezená. Potom úloha

$$(*) \qquad x''(t) + f(t, x(t)) = 0 \qquad x(0) = x(1) = 0$$

má aspoň jedno řešení.

<u>Důkaz</u>: Rovnice $\quad -x'' = \varphi(t) \quad u(0) = u(1) = 0$

má řešení
$$x(t) = \int_0^1 k(t,s)\,\varphi(s)\,ds,$$

kde $k(t,s)$ je Greenova funkce pro tuto úlohu

$$k(t,s) = \begin{cases} (s-1)t & 0 \le t \le s \le 1 \\ s(t-1) & 0 \le s \le t \le 1 \end{cases}$$

Potom rovnice $(*)$ je ekvivalentní s integrální rovnicí

$$x(t) = \int_0^1 k(t,s)\, f(s, x(s))\,ds$$

Uvažujme $F : C[0,1] \to C[0,1]$

$$F(x)(t) = \int_0^1 k(t,s)\, f(s, x(s))\,ds$$

Stačí dokázat, že F má pevný bod

Z omezenosti f plyne omezenost F na $C[0,1]$

Tedy $\exists M > 0 \quad \|F(x)\| \le M$

Dále F je spojitá. Nechť $A \subset B_M$ je omezená. Potom $F(A) \subset \{ t \mapsto \int_0^1 k(t,s)\,y(s)\,ds \quad \|y\| \le M \}$

je množina stejně spojitých funkcí. Je tedy relativně kompaktní. Nyní stačí použít Schauderův princip. ■