Bateman-Horn/Hardy-Littlewood-Dickson conjecture

Nechť $f_1(x), \dots, f_k(x) \in \mathbb{Z}[X]$ jsou po dvou různé ireducibilní (tedy nutně nekonstantní) polynomy s kladnými vedoucími koeficienty. Dále nechť

$$\pi_{f_1,\dots,f_k}(N) := |\{n \in \{1,\dots,N\} \colon f_1(n),\dots,f_k(n) \in \mathbb{P}\}|,$$

kde $\mathbb{P}$ značí množinu všech prvočísel.

Pro každé prvočíslo p označme $\omega_{f_1,\dots,f_k}(p)$ počet navzájem nekongruentních mod p řešení kongruence

$$\prod_{i=1}^{k} f_i(n) \equiv 0 \pmod{p}.$$

Pokud $\omega_{f_1,\dots,f_k}(p) = p$ pro nějaké $p \in \mathbb{P}$, pak je pro každé $n \in \mathbb{N}$ některé z čísel $f_1(n),\dots,f_k(n)$ dělitelné p, a tudíž $f_1(n),\dots,f_k(n)$ můžou být zároveň prvočísla jedině pokud je některé z nich rovno p, což nastane jenom pro konečně mnoho n. Funkce $\pi_{f_1,\dots,f_k}(N)$ je tedy v tomto případě ohraničená.

Lze ukázat, že součin

$$C_{f_1,\dots,f_k} := \prod_p \frac{1 - \frac{\omega_{f_1,\dots,f_k}(p)}{p}}{\left(1 - \frac{1}{p}\right)^k}$$

je konvergentní (obecně ale ne absolutně), zejména tedy pokud $\omega_{f_1,\dots,f_k}(p) < p$ pro všechna $p \in \mathbb{P}$, pak je tento součin kladný.

Bateman-Horn conjecture říká, že za těchto předpokladů platí

$$\pi_{f_1,\dots,f_k}(N) \sim \frac{C_{f_1,\dots,f_k}}{\prod_{i=1}^k \deg f_i} \int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{\ln^k t}, \quad N \to \infty,$$

zejména tedy $\pi_{f_1,\dots,f_k}(N) \to \infty$ (toto pouze kvalitativní tvrzení se nazývá Schinzelova hypotéza H). Jelikož pro každé $k \in \mathbb{N}$ platí

$$\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{\ln^k t} \sim \frac{N}{\ln^k N}, \quad N \to \infty,$$

lze tvrzení ekvivalentně zformulovat ve tvaru

$$\pi_{f_1,\dots,f_k}(N) \sim \frac{C_{f_1,\dots,f_k}}{\prod_{i=1}^k \deg f_i} \cdot \frac{N}{\ln^k N}, \quad N \to \infty.$$

Stejně jako u PNT lze ale očekávat, že v první z těchto formulací bude chybový člen asymptoticky výrazně menší než v té druhé.

Příklad 1 (Dirichletova věta). Nechť $k = 1$ a $f_1(x) = ax + b$, kde $a, b \in \mathbb{Z}$, $a > 0$, $(a, b) = 1$. Potom platí $\omega_{ax+b}(p) = 0$ pokud $p \mid a$ a $\omega_{ax+b}(p) = 1$ pro ostatní prvočísla, takže

$$C_{ax+b} = \prod_{p \mid a} \frac{1}{1 - \frac{1}{p}} = \frac{a}{\varphi(a)},$$

a BHC tedy v tomto případě tvrdí

$$\pi_{ax+b}(N) \sim \frac{aN}{\varphi(a)\ln N} \sim \frac{\pi(aN+b)}{\varphi(a)}, \quad N \to \infty,$$

kde $\pi := \pi_x$ značí prime counting function (druhá asymptotická rovnost plyne z PNT). Tudíž BHC se v tomto případě redukuje na Dirichletovu větu. ▲

Příklad 2 (Twin prime conjecture). Nechť $k = 2$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x + 2$. Pak $\omega_{x,x+2}(2) = 1$ a $\omega_{x,x+2}(p) = 2$ pro $p \neq 2$. Snadno je vidět, že součin

$$C_{x,x+2} = 2\prod_{p\neq 2}\left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right) \doteq 1,3203236$$

je absolutně konvergentní. Hodnota $C_2 := C_{x,x+2}/2 \doteq 0,6601618$ se nazývá twin prime constant. Rovněž se obvykle značí $\pi_2 := \pi_{x,x+2}$. BHC potom tvrdí

$$\pi_2(N) \sim 2C_2\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} \sim \frac{2C_2N}{\ln^2 N}, \quad N \to \infty.$$

Tento vztah je kvantitativní verze twin prime conjecture.

Označme

$$\pi_2^{\mathrm{e}}(N) := \left\lfloor 2C_2\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{\ln^2 t} + \frac{1}{2}\right\rfloor$$

odhad $\pi_2(N)$ zaokrouhlený na celá čísla (zaokrouhlení na celá čísla neovlivní asymptotické chování této funkce). Následující tabulka porovnává vybrané hodnoty π_2 a π_2^{e} (viz [1] a [2]).

N	$\pi_2(N)$	$\pi_2^{\mathrm{e}}(N)$	$\pi_2(N)/\pi_2^{\mathrm{e}}(N)$
10^3	35	46	0.7608695652
10^6	8169	8248	0.9904219205
10^9	3424506	3425308	0.9997658605
10^{12}	1870585220	1870559867	1.0000135540
10^{15}	1177209242304	1177208491861	1.0000006370
10^{18}	808675888577436	808675901493606	0.9999999840

Hypotéza tedy říká, že hodnoty v pravém sloupci konvergují k 1 pro $N \to \infty$. ▲

Příklad 3 (Hardy-Littlewood k-tuples conjecture). Předchozí příklad je speciálním případem následující situace. Nechť $f_1(x) = x + c_1, \ldots, f_k(x) = x + c_k$, kde $c_1, \ldots, c_k$ jsou navzájem různá celá čísla. Potom $\omega_{x+c_1,\ldots,x+c_k}(p) < p$ pro všechna $p \in \mathbb{P}$ právě tehdy, když pro žádné prvočíslo p nepokrývají čísla $c_1, \ldots, c_k$ všechny zbytkové třídy mod p. Potom se k-tice $(c_1, \ldots, c_k)$ nazývá admissible k-tuple. Hardy-Littlewood k-tuples conjecture (která je historicky starší než obecný případ) tedy říká, že pro každý admissible k-tuple $(c_1, \ldots, c_k)$ platí

$$\pi_{x+c_1,\ldots,x+c_k}(N) \sim C_{x+c_1,\ldots,x+c_k}\int_2^N \frac{\mathrm{d}t}{\ln^k t} \sim C_{x+c_1,\ldots,x+c_k}\frac{N}{\ln^k N}, \quad N \to \infty.$$

▲

Příklad 4 (Prvočísla tvaru n^2+1). Nechť $k=1$ a $f_1(x)=x^2+1$. Platí $\omega_{x^2+1}(2)=1$, $\omega_{x^2+1}(p)=2$ pro $p\equiv 1 \pmod 4$, a $\omega_{x^2+1}(p)=0$ pro $p\equiv 3 \pmod 4$. Odtud vyjde

$$C_{x^2+1}=\prod_{p\neq 2}\left(1-\frac{(-1)^{\frac{p-1}{2}}}{p-1}\right)\doteq 1,3728135.$$

Tento součin konverguje, ale neabsolutně. BHC potom říká

$$\pi_{x^2+1}(N)\sim\frac{C_{x^2+1}}{2}\int_2^N\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}\sim\frac{C_{x^2+1}}{2}\frac{N}{\ln N},\qquad N\to\infty.$$

Opět označme

$$\pi^{\mathrm{e}}_{x^2+1}(N):=\left\lfloor\frac{C_{x^2+1}}{2}\int_2^N\frac{\mathrm{d}t}{\ln t}+\frac{1}{2}\right\rfloor$$

odhad $\pi_{x^2+1}(N)$ zaokrouhlený na celá čísla. Následující tabulka porovnává vybrané hodnoty $\pi_{x^2+1}(N)$ a $\pi^{\mathrm{e}}_{x^2+1}(N)$ (viz [3], kde ovšem počítají pouze prvočísla větší než 2 takže hodnoty tam jsou o jedna menší než hodnoty zde).

N	$\pi_{x^2+1}(N)$	$\pi^{\mathrm{e}}_{x^2+1}(N)$	$\pi_{x^2+1}(N)/\pi^{\mathrm{e}}_{x^2+1}(N)$
10^2	19	20	0.95000000
10^4	841	855	0.98362573
10^6	54110	53970	1.00259403
10^8	3954181	3955219	0.99973756
10^{10}	312357934	312353236	1.00001504
10^{12}	25814570672	25814350227	1.00000854

Hypotéza tedy opět říká, že hodnoty v pravém sloupci konvergují k 1 pro $N\to\infty$. ▲

Literatura

[1] *Number of twin prime pairs below* 10^n,
http://oeis.org/A007508.

[2] *Hardy-Littlewood approximation to the number of twin primes less than* 10^n,
http://oeis.org/A152051.

[3] *Number of primes of the form* $1+b^2$ *for* $1<b<10^n$,
http://oeis.org/A215047.