

Domácí úkol do semináře z teorie čísel, 1. týden (19. 9. 2013)

1. (a) Určete

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\sigma(n)}{n},$$

kde $\sigma(n)$ značí součet přirozených dělitelů čísla $n \in \mathbb{N}$ (tedy např. $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$).

(b) Určete

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\varphi(n)}{n},$$

kde φ značí Eulerovu funkci.

Hint (pro obě části): využijte toho, že

$$\sum_p \frac{1}{p} = \infty.$$

2. Pomocí nějakého matematického softwaru vytvořte graf nebo tabulku hodnot funkce $y = \ln(x) - x/\pi(x)$ (kde $\pi(x)$ značí počet prvočísel menších nebo rovných $x \in \mathbb{R}$) pro nějaký vhodně velký rozsah hodnot proměnné x , a vyslovte hypotézu o asymptotickém chování této funkce pro $x \rightarrow \infty$.

Pozn.: v SAGE nastává jistý problém s kompatibilitou funkcí `prime_pi` a `plot`, návod jak ho vyřešit viz např. <http://sage.maa.org/home/pub/146/>.