ÚVOD DO MATEMATICKÉ BIOLOGIE I.

setkání páté

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pav.A29, RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie
- ☑ populační biologie
- ☑ autekologie (vztah jedince, resp. určitého druhu k prostředí)
- ☑ epidemiologie (infekčních nemocí)
- ☑ komunitní procesy a procesy v ekologii

co by se mohlo společně stát – největší možné výzvy:

- ☑ globální změny
- ☑ molekulární evoluce
- ☑ problémy měřítka

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie

  Populační genetika je nauka o změnách zastoupení alel jednotlivých genů v populaci. Tyto změny mohou být důsledkem jak přirozeného výběru, tak genetického driftu.

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie

Populační genetika je nauka o změnách zastoupení alel jednotlivých genů v populaci. Tyto změny mohou být důsledkem jak přirozeného výběru, tak genetického driftu.

Populace:

biologie: skupina jedinců stejného druhu se společným genofondem, která v daném čase obývá určitou oblast. Dále uvažujeme, že jedinci se mezi sebou mohou volně křížit a pochází ze stejného předka. Pojem populace tedy nejde dobře aplikovat na druh s převažujícím vegetativním rozmnožováním.

statistika: (základní soubor) je množina prvků (věcně, prostorově, časově vymezených), jejichž vlastnosti chceme zjistit. Může být konečný (např. obézní děti školního věku v Brně) nebo nekonečný (např. opakovaná měření jedné veličiny za stejných podmínek).

Genetický drift: Genetický drift neboli posun jsou náhodné posuny ve frekvenci jednotlivých alel v rámci genofondu dané populace. V praxi to znamená, že tyto změny frekvencí nepodléhají selekci, ale závisí vyloženě na náhodě při vzniku gamet a zygot (i nositel výhodné alely nemusí tuto alelu svým potomkům předat a tato se v další generaci neobjeví). Tyto změny jsou kumulativní - časem tak může dojít dokonce i k fixaci jedné alely a vymizení alely druhé. Genetický drift se uplatňuje v relativně malých populacích - čím je populace menší - tím výraznější je vliv driftu a tím častěji dojde k fixaci jedné z alel.

Hardyho – Weinbergův zákon

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie

Evoluční biologie je vědní obor zabývající se biologickou evolucí organismů a mechanismy, které se při ní uplatňují. Za jejího zakladatele je považován Charles Darwin.

Evoluční biologie tak využívá jednotlivé vědy, které studují jednotlivé organizmy (např. mammalogie, ornitologie nebo herpetologie) jako speciální případy pro hledání odpovědí na obecnější otázky evoluce. Obdobně využívá evoluční biologie poznatků paleontologie a geologie o fosiliích, které umožňují hledat odpovědi na otázky po tempu a způsobu evoluce. Využívá se i poznatků teoretických oborů, jako např. populační genetika.
Některé teorie lze experimentálně ověřovat např. na modelu Drosophila (octomilka, banánová muška) - tak je vlastně realizována i experimentální evoluční biologie.

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie

Thomas Hunt Morgan
(1866 –1945)

1906 počátek experimentů s octomilkami
1933 Nobelova cena za fyziologii a medicínu

Morganovy zákony:

1. *Geny jsou lineárně uspořádány na chromozómech*
2. *Geny jednoho chromozómu tvoří vazebnou skupinu. Počet vazebných skupin organismu je shodný s počtem párů homologních chromozómů, které má.*
3. *Mezi geny homologického páru chromozómu může prostřednictvím překřížení (crossing-over) probíhat genová výměna. Frekvence překřížení je přímo úměrná vzdálenosti genů.*

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie
- ☑ populační biologie
- ☑ autekologie (vztah jedince, resp. určitého druhu k prostředí)
- ☑ epidemiologie (infekčních nemocí)
- ☑ komunitní procesy a procesy v ekologii

co by se mohlo společně stát – největší možné výzvy:

- ☑ globální změny
- ☑ molekulární evoluce
- ☑ problémy měřítka

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

Populační biologie se zabývá

- vzájemnými vztahy mezi jedinci
- limitní hustotou jedinců
- reprodukčním potenciálem
- délkou životního cyklu a jeho dílčích fází
- meziročními změnami uvnitř populací atd.

K čemu je to dobré?

Ochrana přírody, výroba potravin (živočišných, rostlinných) i technických plodin, produkce dřevní hmoty atd.

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie
- ☑ populační biologie
- ☑ autekologie (vztah jedince, resp. určitého druhu k prostředí)
- ☑ epidemiologie (infekčních nemocí)
- ☑ komunitní procesy a procesy v ekologii

co by se mohlo společně stát – největší možné výzvy:

- ☑ globální změny
- ☑ molekulární evoluce
- ☑ problémy měřítka

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.

Je považována za základ výzkumné metodologie ve zdravotnictví a pomáhá medicíně založené na důkazech, protože rozpoznává rizikové faktory přenosu nemocí a určuje a hodnotí (optimální) postupy jejich léčby.

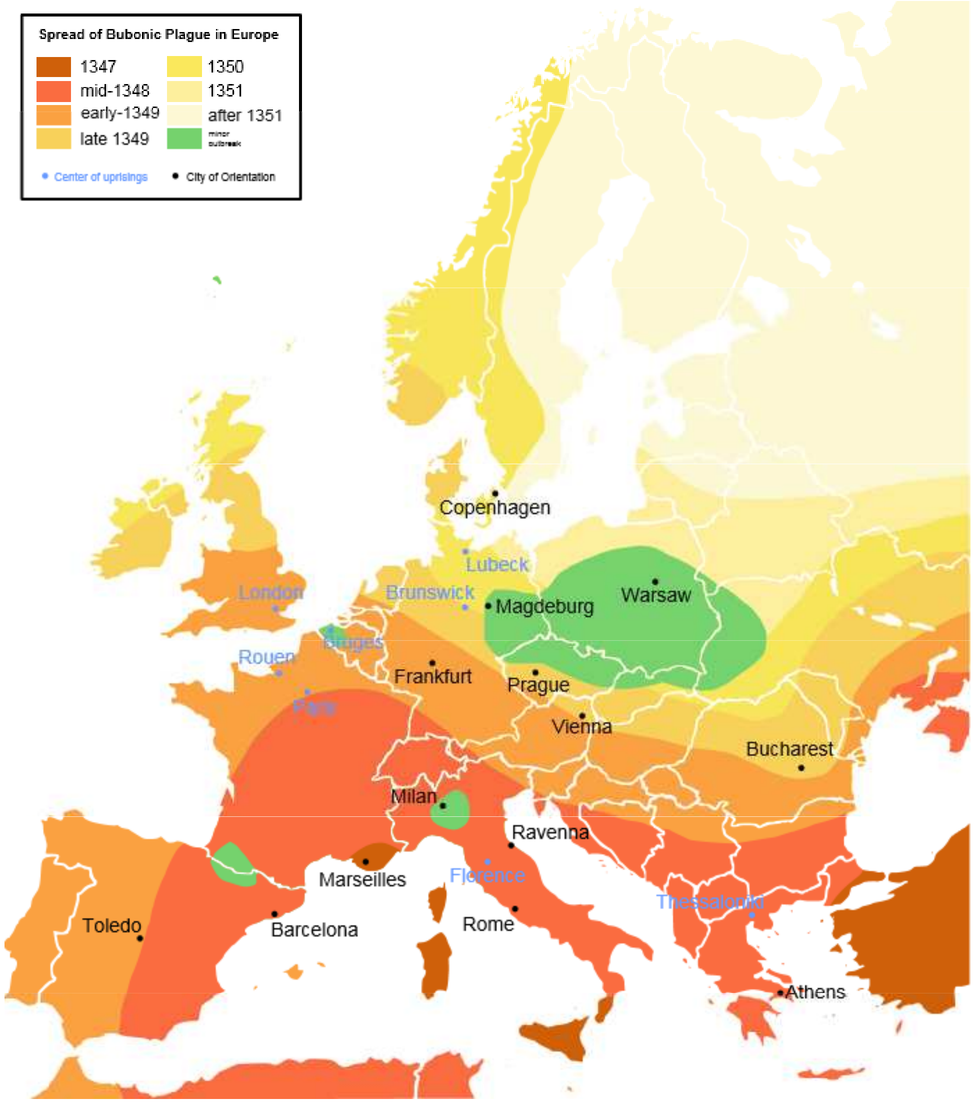
Zahrnuje zkoumání vzniku nemoci, výběr vhodné studie, sběr a analýzu dat s ohledem na vývoj statistických modelů, sestavení hypotézy, …. Souvisí i z dalšími odvětvími - biologie je potřeba k pochopení působení nemocí, společenské vědy jako sociologie a filozofie pomáhají vyhodnotit bezprostřední i méně aktuální rizikové faktory.

Dělí se na *epidemiologii obecnou*, zabývající se metodologií práce a obecnými epidemiologickými zákonitostmi a *speciální epidemiologii* konkrétních nemocí.

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.



MATEMATICKÁ BIOLOGIE

EKOLOGIE A EVOLUČNÍ BIOLOGIE

co se společně stalo:

- ☑ syntéza populační genetiky a evoluční biologie
- ☑ populační biologie
- ☑ autekologie (vztah jedince, resp. určitého druhu k prostředí)
- ☑ epidemiologie (infekčních nemocí)
- ☑ komunitní procesy a procesy v ekologii

co by se mohlo společně stát – největší možné výzvy:

- ☑ globální změny
- ☑ molekulární evoluce
- ☑ problémy měřítka

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)

italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciova posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:
Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků. Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí další pár a ten se v dalším měsíci bude dál rozmnožovat stejným způsobem.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}$$

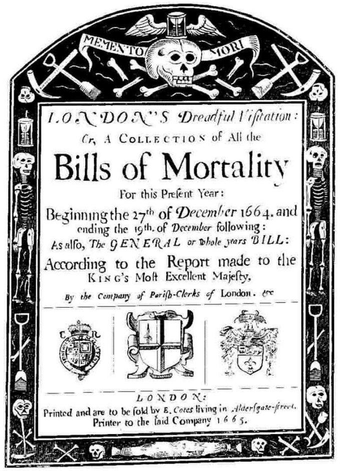
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Sir **William Petty**
(1623–1687)
anglický ekonom, statistik a lékař

John Graunt
(1620–1674)
londýnský obchodník s galanterií

údaje o křtech a pohřbech v londýnské farnosti od roku 1592



LONDON'S Dreadful Visitation: Or, A Collection of All the Bills of Mortality For this Present Year: Beginning the 27th of December 1664, and ending the 19th of December following: As also, The GENERAL or whole years BILL: According to the Report made to the KING's Most Excellent Majesty. By the Company of Parish-Clerks of London, &c.

LONDON: Printed and are to be sold by E. Cotes living in Aldersgate-street. Printer to the said Company 1665.

Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality (1662)

celkem pět vydání až do roku 1676

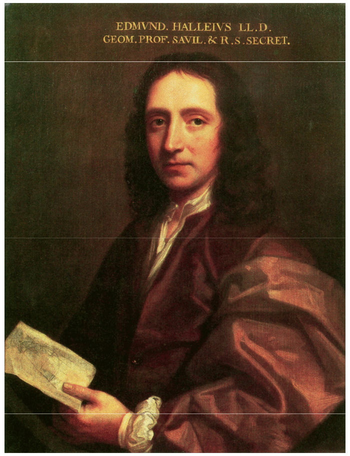
POPULAČNÍ BIOLOGIE

Caspar Neumann
(1648 – 1715)

německý profesor a duchovní

shromáždil data o narození a úmrtí (včetně věku) ve Wroclavi v letech 1687-1691

„An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Courious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives“ (1693)



Edmond Halley
(1656 – 1742)

anglický astronom, fyzik, geofyzik, matematik, meteorolog a demograf

na konci 17. století zkonstruoval první úmrtnostní tabulky na základě záznamů o úmrtích a porodech a odhadl předpokládané počty lidí v relativně uzavřené, stacionární populaci podle jednotlivých věkových skupin.

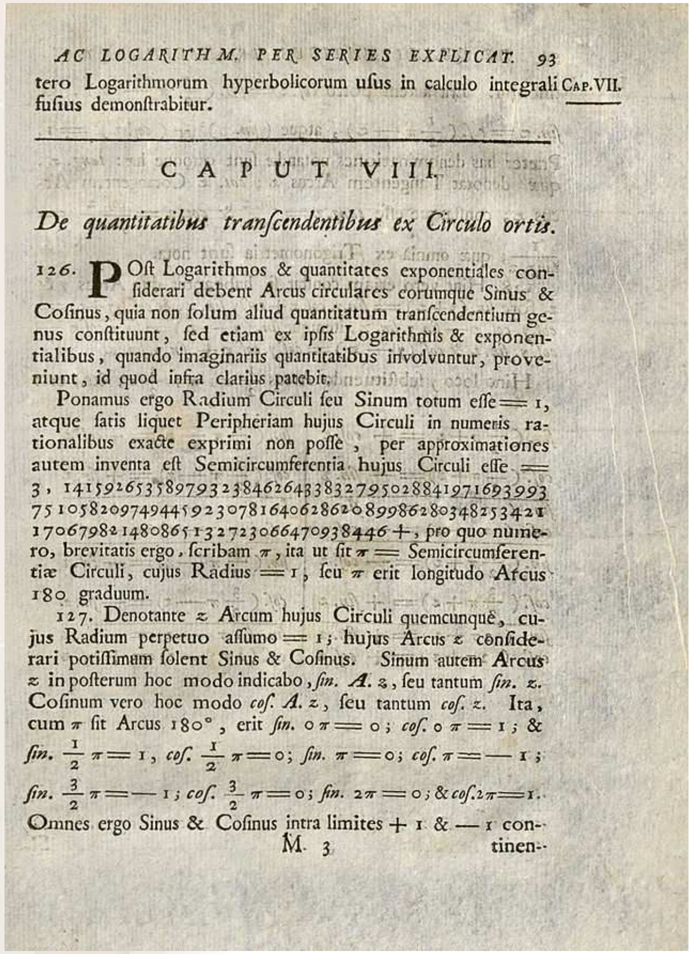
POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler

(1707-1783)

švýcarský matematik (teorie čísel, algebra, nekonečné řady, elementární funkce, komplexní čísla, teorie grafů, diferenciální a integrální počet včetně rovnic, optimalizace, geometrie,…), fyzik (astronomie, pružnost, tekutiny, pevná tělesa,…), …

Leonhard Euler



Introductio in analysin infinitorum

(1748)

v kapitole o exponenciálách a logaritmech měl šest příkladů – jeden s hudební aplikací, jeden finanční – splácení úročené půjčky, čtyři z populační dynamiky

$$P_{n+1} = (1+x).P_n,$$

kde n je celé číslo a růstový parametr nabývá reálných kladných hodnot

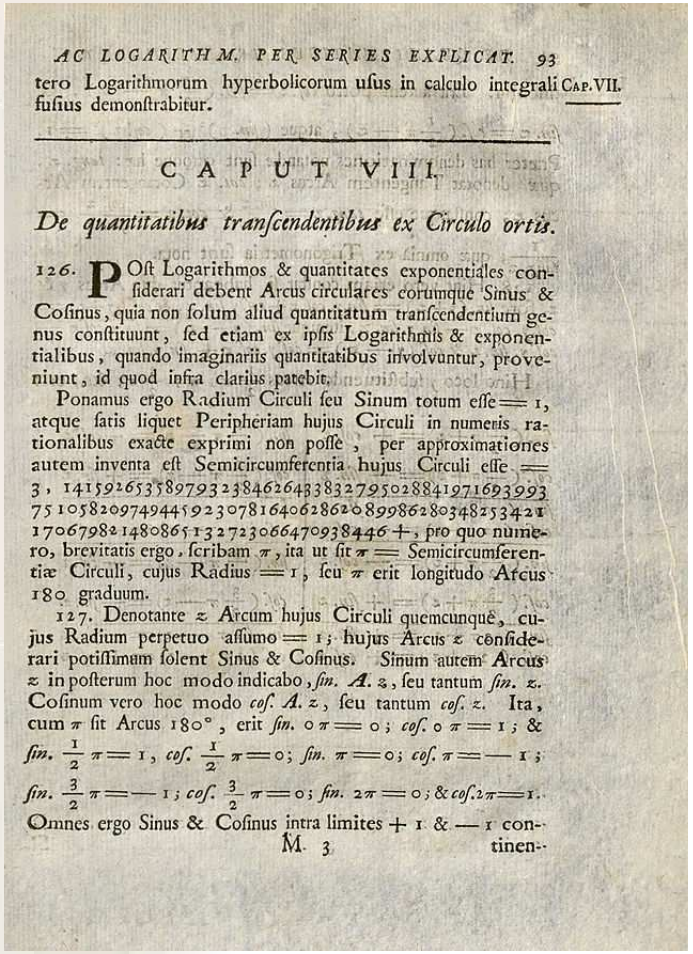
se zohledněním počáteční podmínky

$$P_n = (1+x)^n.P_0$$

(geometrický, resp. exponenciální růst)

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler



AC LOGARITHM. PER SERIES EXPLICAT. 93

tero Logarithmorum hyperbolicorum uſus in calculo integrali fuſius demonſtrabitur. CAP. VII.

C A P U T VIII.

De quantitatibus tranſcendentibus ex Circulo ortis.

126. POſt Logarithmos & quantitates exponentiales conſiderari debent Arcus circulares eorumque Sinus & Coſinus, quia non ſolum aliud quantitatum tranſcendentium genus conſtituunt, ſed etiam ex ipſis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe $= 1$, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe $= 3{,}14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 +$, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo aſſumo $= 1$; hujus Arcus z conſiderari potiſſimum ſolent Sinus & Coſinus. Sinum autem Arcus z in poſterum hoc modo indicabo, *ſin. A.* z, ſeu tantum *ſin.* z. Coſinum vero hoc modo *coſ. A.* z, ſeu tantum *coſ.* z. Ita, cum π ſit Arcus 180°, erit $\sin. 0\pi = 0$; $\cos. 0\pi = 1$; & $\sin. \frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos. \frac{1}{2}\pi = 0$; $\sin. \pi = 0$; $\cos. \pi = -1$; $\sin. \frac{3}{2}\pi = -1$; $\cos. \frac{3}{2}\pi = 0$; $\sin. 2\pi = 0$; & $\cos. 2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Coſinus intra limites $+1$ & -1 continen-

M 3

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

1. Pokud populace v určitém regionu poroste s rychlostí 1/30 a v určitém čase tam žije 100 000 obyvatel, jaká bude velikost populace za 100 let? (~ 2 654 874 osob)
2. Pokud se velikost populace po biblické Potopě redukovala na 6 osob a pokud předpokládáme, že za 200 let žilo na Zemi milión lidí, jaký byl roční přírůstek? (1/16 ~ 6,25 %)
3. Pokud by se každých sto let populace zdvojnásobila, jaký bude roční přírůstek? (1/144)
4. Pokud populace ročně poroste s rychlostí 1/100, za jak dlouho bude desetkrát tak velká?

JEDNODRUHOVÉ POPULACE

Modelování dynamiky jednodruhových populací je založeno na deterministickém způsobu chování populace, přičemž stav populace je charakterizován její velikostí.

Otázky, které mohou jednopopulační modely pomoci řešit jsou např.:

- ☑ jak dlouho potrvá, než populace dosáhne určité velikosti?
- ☑ jak veliká bude populace po určitém časovém intervalu, příp. po daném počtu generací?
- ☑ jak dlouho může populace přežít v nevhodných životních podmínkách?

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Nechť x(t) označuje hodnotu populační hustoty v čase t. Potom stav populace v čase t+Δt je závislý na hodnotě x(t) v čase t modifikovaný procesy, které se v dané populaci odehrávají.

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d + \Delta x_m,$$

kde Δx_b znamená přírůstek za dobu Δt způsobený porodností, Δx_d úbytek způsobený úmrtností a Δx_m představuje změnu vyvolanou migrací. Protože Δx_m představuje jak nárůst, tak úbytek jedinců v populaci, zahrnuje se tento člen v jednodušších variantách modelu ke výrazům vyjadřujícím porodnost a úmrtnost. V takovém případě platí

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d.$$

Je-li Δx_b počet jedinců, kteří se narodili za dobu Δt, pak platí

$$\Delta x_b = B(x,t).\ \Delta t$$

kde B(x,t) je *porodnost*, tj. počet jedinců, kteří se narodí za časovou jednotku. Podobně

$$\Delta x_d = D(x,t).\ \Delta t,$$

kde D(x,t) je *úmrtnost*, tj. počet jedinců, kteří za časovou jednotku zemřou.

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Vztáhneme-li oba výše definované parametry ke stavu populace, získáváme relativní parametry,

tj. *relativní porodnost* $b(x,t) = B(x,t) / x(t)$

a *relativní úmrtnost* $d(x,t) = D(x,t) / x(t)$.

Pak

$$x(t+\Delta t) = x(t) + (b(x,t) - d(x,t)).x(t).\Delta t,$$

případně

$$\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t} = \gamma(x,t).x(t)$$

kde $\gamma(x,t) = b(x,t) - d(x,t)$ je obecná funkce vyjadřující základní dynamické charakteristiky daného populačního modelu.

V limitním případě, kdy $\Delta t \to 0$, můžeme psát

$$x'(t) = \gamma(x,t).x(t),$$

což je obecné deterministické vyjádření dynamiky stavu populace x(t) za předpokladu, že tento stav můžeme popsat spojitou funkcí.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Stav populace x(t) můžeme popsat spojitou funkcí (z biologického hlediska), když:

- ☑ populace x(t) je natolik velká, že není třeba počítat s jednotlivci (*kvantovací podmínka*);
- ☑ generace v populaci x(t) se překrývají, resp. všechny jedinci v populaci jsou identičtí (neexistuje věkové rozlišení), tj. populace je homogenní z hlediska jedinců v produkčním věku (*vzorkovací podmínka*) - zatímco populace bakterií, příp. vyšších živočichů (obratlovců) tuto podmínku zpravidla splňují, u populací hmyzu nebo např. jednoletých rostlin nastávají problémy.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

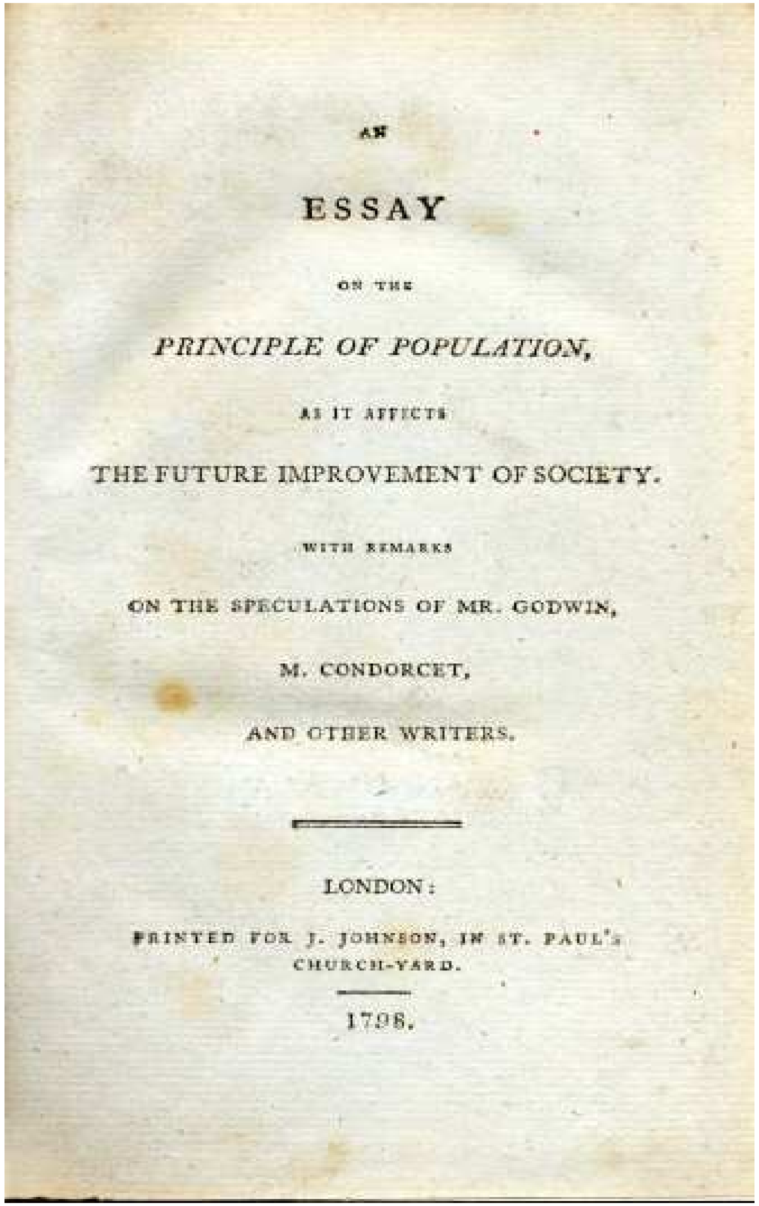
Thomas Robert Malthus
(1766 – 1834)
anglický duchovní a ekonom

Malthusova rovnice

$$x'(t) = r.x(t)$$

řešení:

$$x(t) = x_0.e^{rt}$$



AN

ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION,

AS IT AFFECTS

THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY.

WITH REMARKS

ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN,

M. CONDORCET,

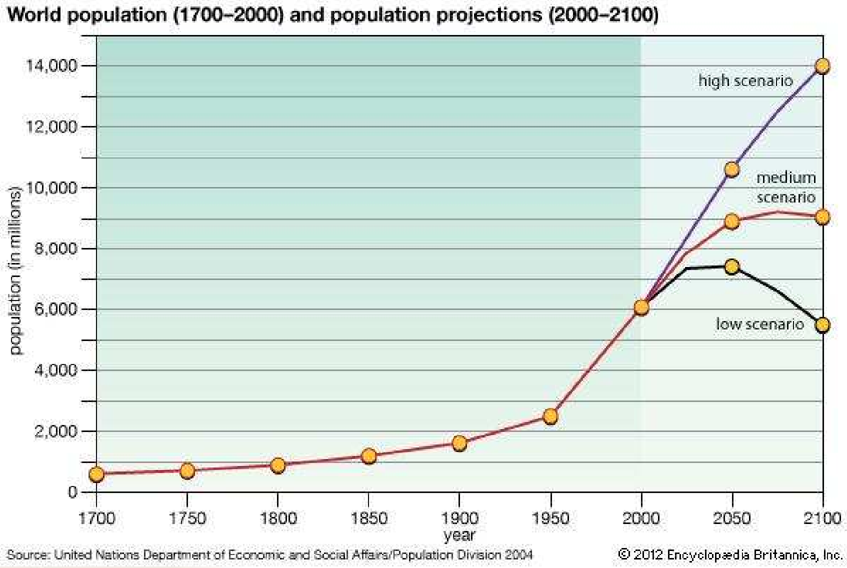
AND OTHER WRITERS.

LONDON:

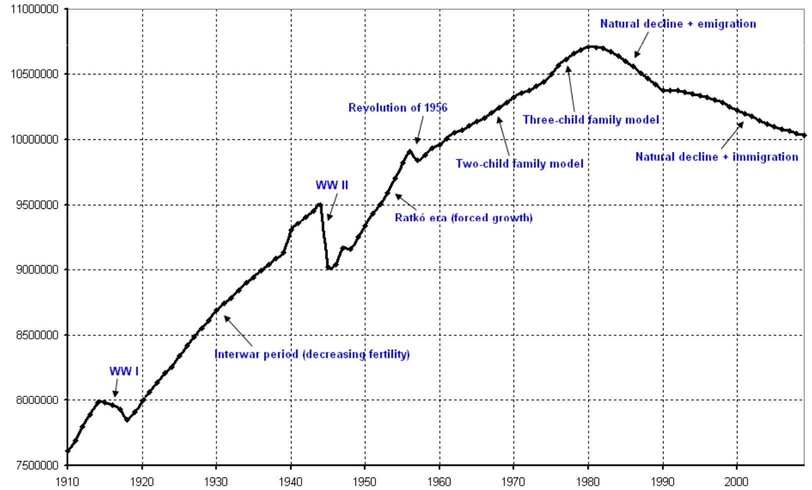
PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S
CHURCH-YARD.

1798.

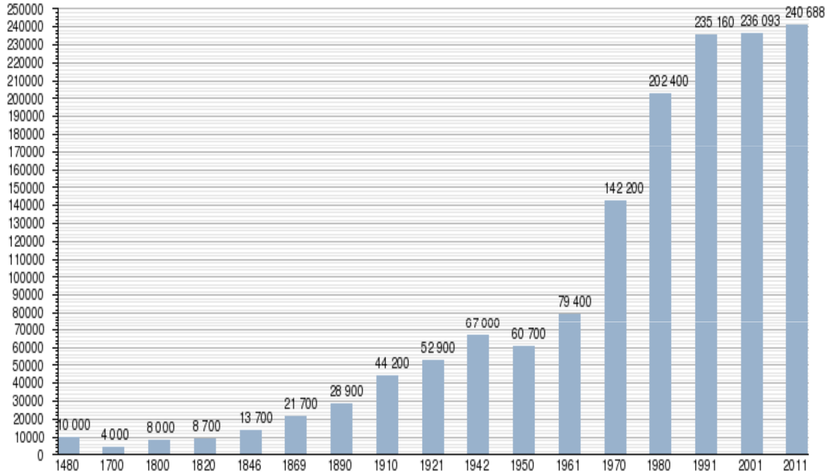
POPULAČNÍ BIOLOGIE



svět

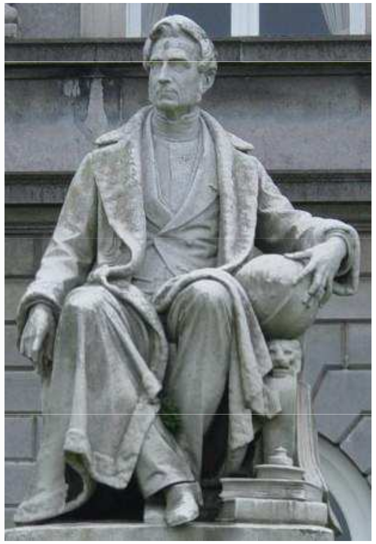


Maďarsko



Košice

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet
(1796 – 1874)
belgický meteorolog, astronom, matematik, statistik, demograf, sociolog, kriminolog

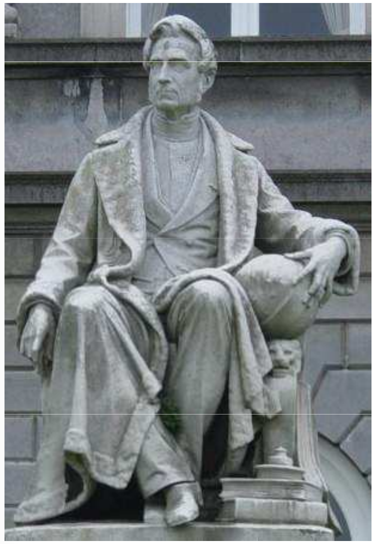
„Sur l'homme et le développement de ses facultés“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují „odpor“, který je úměrný druhé mocnině rychlosti růstu populace

Body Mass Index (1830 – 1850)

$$\mathrm{BMI} = \frac{m\,[\mathrm{kg}]}{v^2\,[\mathrm{m}]}$$

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom, matematik, statistik, demograf, sociolog, kriminolog

„Sur l'homme et le développement de ses facultés" (1835)

překážky růstu populace reprezentují „odpor", který je úměrný druhé mocnině rychlosti růstu populace

Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)

belgický matematik

"Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement". *Correspondance mathématique et physique* 10,(1838):113–121.

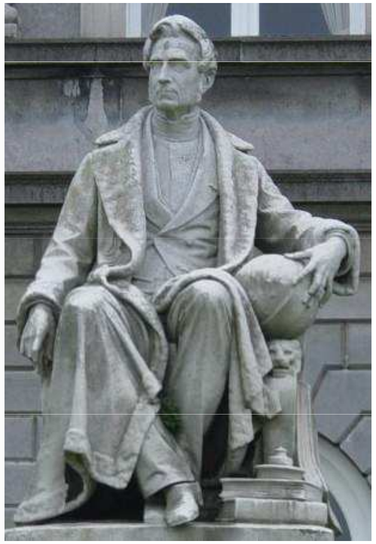
$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

řešení:

$$N(t) = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}$$

kde $C = 1/N_0 - 1/K$

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

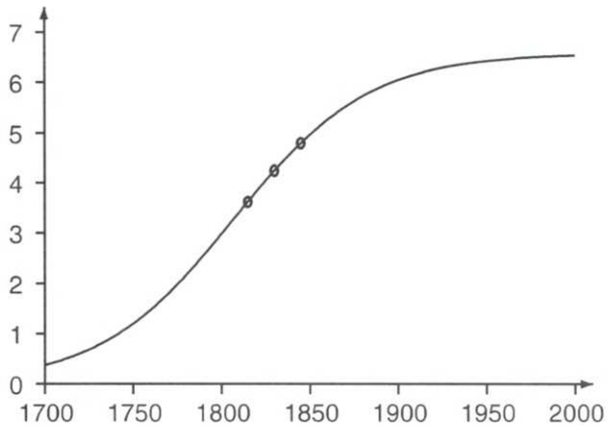
belgický meteorolog, astronom, matematik, statistik, demograf, sociolog, kriminolog

„Sur l'homme et le développement de ses facultés“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují „odpor“, který je úměrný druhé mocnině rychlosti růstu populace

Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)



počet obyvatel Belgie 2013:

$11{,}2.10^6$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

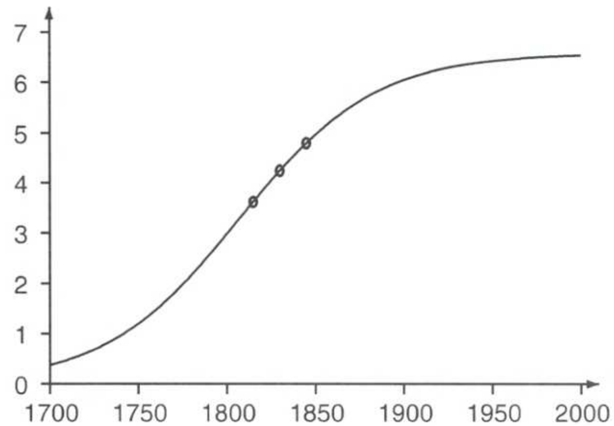
Pierre-Francois Verhulst
(1804 – 1849)

rovnice byla znovu publikována v roce 1920 Raymondem Pearlem and Lowellem Reedem

⇓

Pearlova – Verhulstova rovnice ☺

logistická rovnice



počet obyvatel Belgie 2013:

$11{,}2.10^6$

INTERAKCE DVOU POPULACÍ

mutualismus	+	+	obě populace mají ze společného soužití prospěch (symbióza)
dravec-kořist	+	-	jedna populace prospívá, druhá chřadne (parazit x hostitel, býložravec x rostlina, zaměstnavatel x zaměstnanec, aj.)
konkurence	-	-	obě populace vzájemným kontaktem trpí
komensalismus	+	0	jeden druh se živí zbytky potravy druhého, neškodné příživnictví
amensalismus	-	0	
neutralismus	0	0	oba zúčastněné druhy se nepodílí na vzájemné látkové výměně

MODEL DRAVEC – KOŘIST

MODEL LOTKY – VOLTERRY

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL DRAVEC – KOŘIST
MODEL LOTKY – VOLTERRY

Alfred James Lotka
(1880 – 1949)
americký matematik, statistik, fyzikální chemik
snažil se uplatnit fyzikální přístupy a modely v živých vědách

Vito Volterra
(1860 – 1940)
italský matematik a fyzik
"Signor Scienza Italiana"

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Předpokládejme, že Δx_n je počet kořistí, které se narodily v časovém intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$. Dále předpokládejme, že tato hodnota je úměrná počtu kořistí x(t) v čase t, délce časového intervalu Δt a relativní porodnosti k_1 kořistí. To znamená, že přírůstek do populace kořisti bude respektovat Malthusův model populační dynamiky

$$\Delta x_n = k_1.x(t).\Delta t.$$

Dále, nechť počet kořistí Δx_m ulovených y(t) dravci během časového intervalu $\langle t, \Delta t \rangle$ je úměrný počtu vzájemných setkání jedinců obou druhů a délce časového intervalu Δt

$$\Delta x_m = k_2.x(t).y(t).\Delta t ,$$

kde konstanta k_2 vyjadřuje pravděpodobnost, že setkání dravce s kořistí skončí zahubením kořisti. Tato konstanta může také vyjádřit spotřebu či potřebu dravců.

Celkovou změnu stavu populace kořistí za dobu Δt lze tedy určit rozdílem

$$\Delta x_n - \Delta x_m = k_1.x(t).\Delta t.- k_2.x(t).y(t).\Delta t. = [k_1.x(t) - k_2.x(t).y(t)].\Delta t.$$

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Nyní předpokládejme, že počet narozených dravců Δy_n během doby Δt je úměrný počtu vzájemných setkání dravců a kořistí a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_n = k_2.k_3.x(t).y(t).\Delta t\ ,$$

kde k_3 je konstanta vyjadřující účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.

Konečně, nechť úbytek v populaci dravců Δy_m je opět dán Malthusovým modelem populační dynamiky, tj. je úměrný stavu populace dravců y(t) v čase t a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_m = k_4.y(t).\Delta t,$$

kde konstanta úměrnosti k_4 reprezentuje relativní úmrtnost dravců.

Za těchto předpokladů, je celková změna v populaci dravců dána vztahem

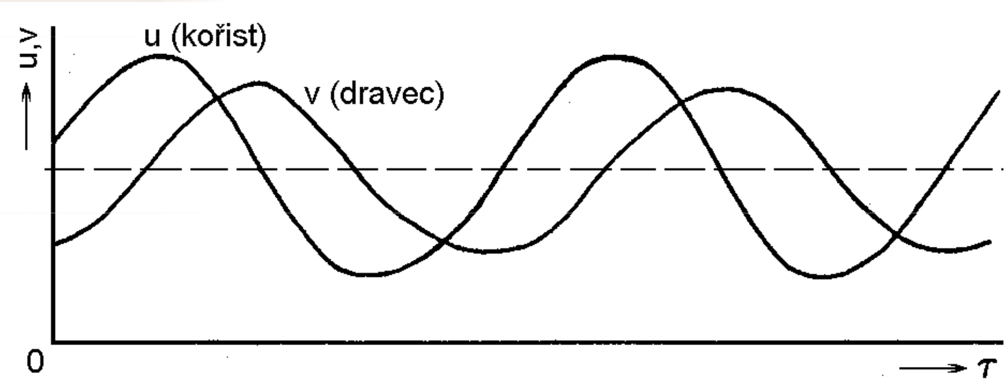
$$\Delta y_n - \Delta y_m = [k_2.k_3.x(t).y(t) - k_4.y(t)].\Delta t.,$$

a v limitním případu pro $\Delta t \rightarrow 0$ můžeme psát soustavu

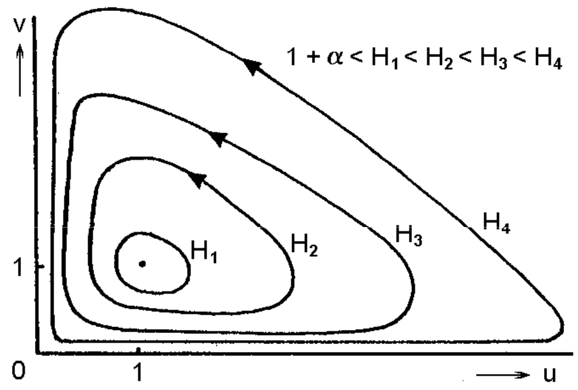
$$x'(t) = k_1.x(t) - k_2.x(t).y(t)$$

$$y'(t) = k_2.k_3.x(t).y(t) - k_4.y(t)$$

MODEL LOTKY – VOLTERRY



Typické časové průběhy normalizovaných veličin modelu Lotky - Volterry

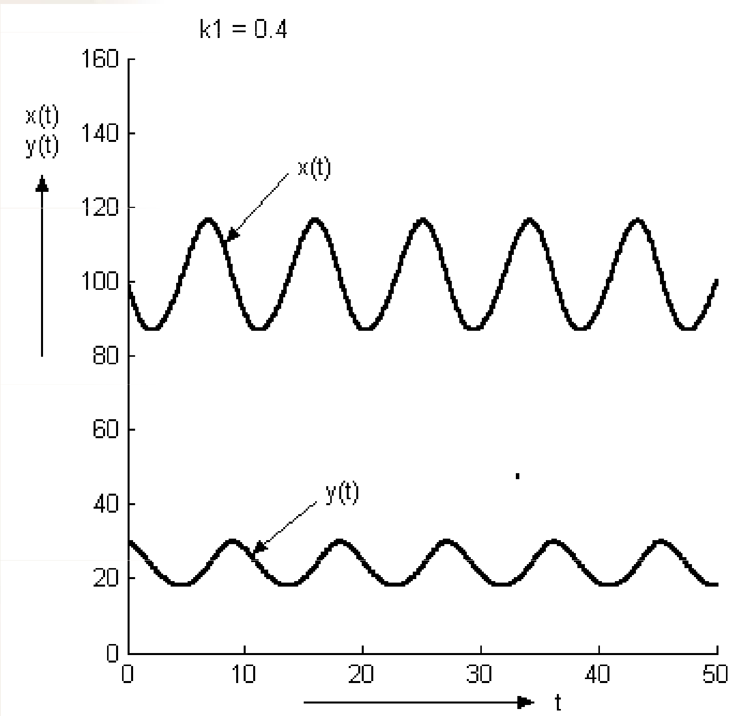


Stavové trajektorie normalizovaného modelu Lotky - Volterry

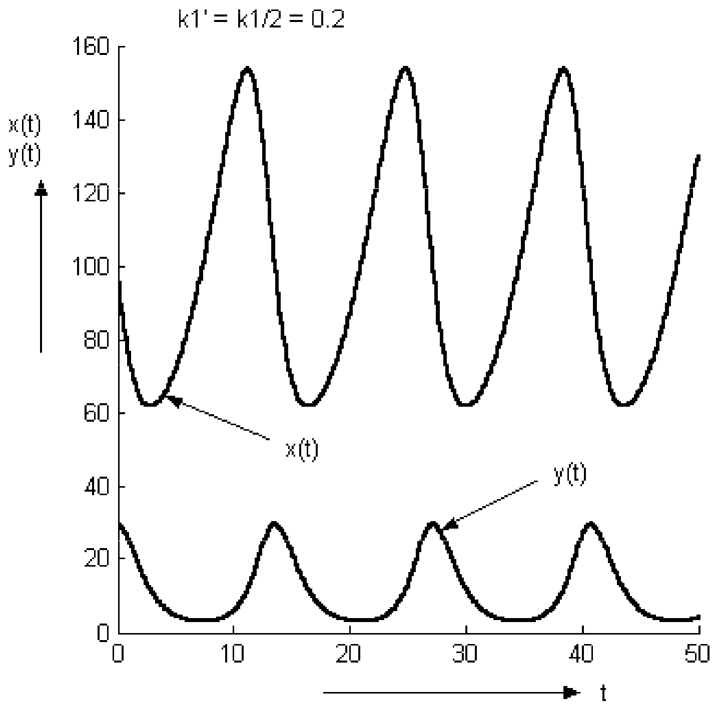
MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

vliv omezení porodnosti kořisti na celkový stav populace dravec x kořist



výsledky simulace s původními hodnotami parametrů

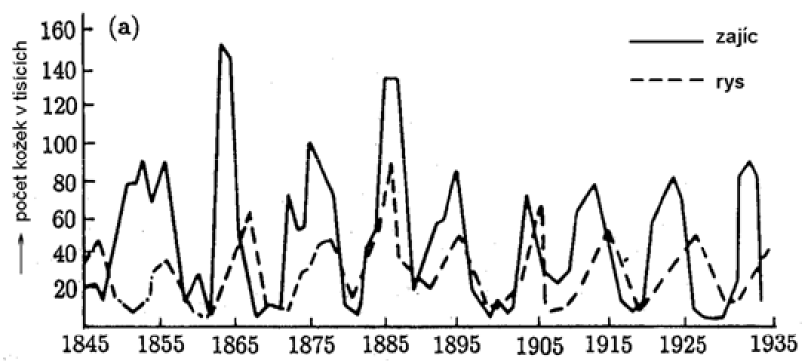


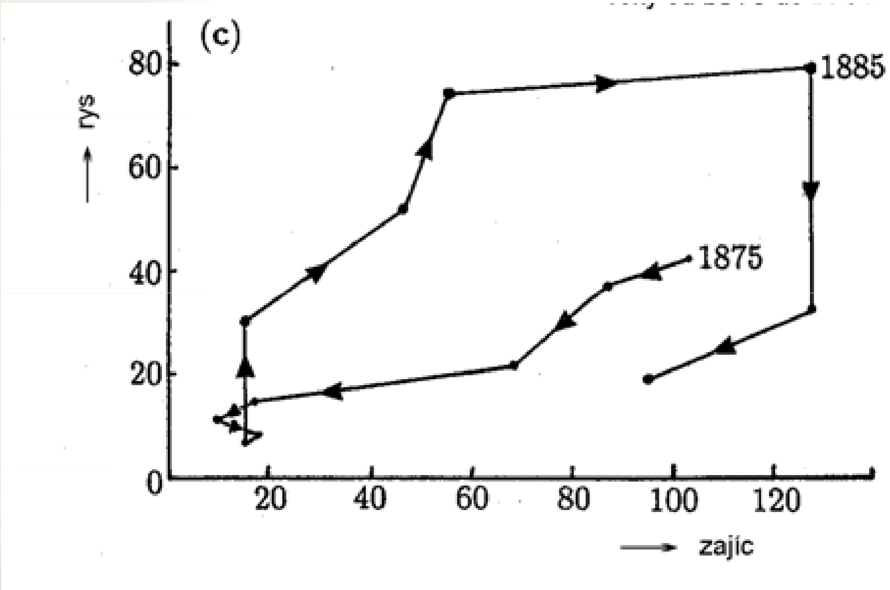
výsledky simulace s poloviční hodnotou parametru k_1 oproti hodnotě původní

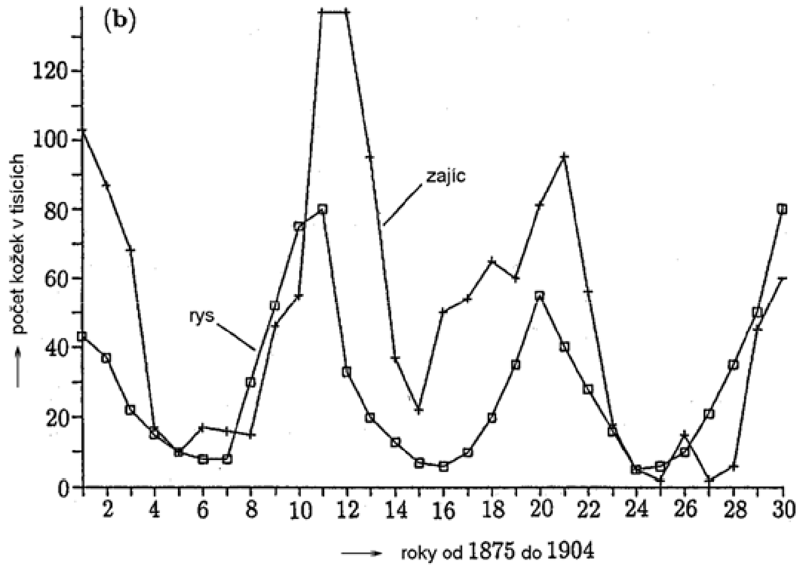
MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

výklad dynamiky populace rysů a zajíců v Hudson Bay v letech 1845 - 1930







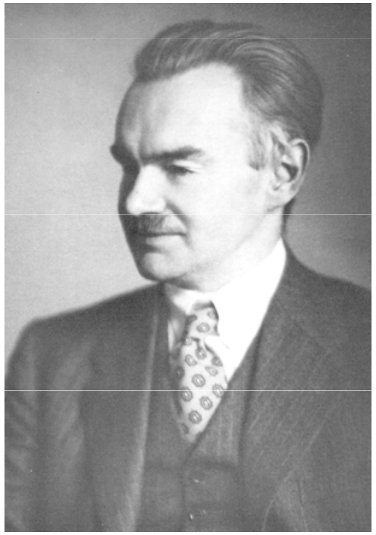
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB

KERMACKŮV – McKENDRIKCKŮV MODEL (1927)

Anderson Gray McKendrick
(1876 –1943)

skotský lékař, fyziolog a epidemiolog
jeden z prvních, kteří zaváděli matematické metody do epidemiologie



William Ogilvy Kermack
(1898 – 1970)

skotský matematik a statistik

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB

KERMACKŮV – McKENDRIKCKŮV MODEL (1927)

$$S(t) \xrightarrow{r} I(t) \xrightarrow{a} R(t)$$

- ❖ nárůst infikovaných jedinců je úměrný počtu ohrožených a infikovaných jedinců, tj. ~ r.S(t).I(t), kde r > 0 je konstantou úměrnosti. Ohrožených osob stejnou rychlostí ubývá.
- ❖ rychlost s jakou ubývá infikovaných jedinců (vyléčením, úmrtím) je úměrná počtu infikovaných osob, tj. ~ a.I(t).
- ❖ inkubační doba je zanedbatelná;
- ❖ populace je natolik velká, že vyvolané změny lze považovat za spojité.

$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0 \;; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0 \;; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB

KERMACKŮV – McKENDRIKCKŮV MODEL (1927)

$$\boxed{S(t)} \xrightarrow{r} \boxed{I(t)} \xrightarrow{a} \boxed{R(t)}$$

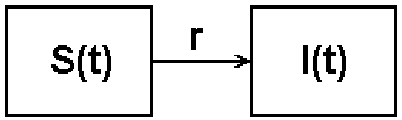
základní otázkou jakékoliv epidemiologické situace je, zda se bude pro dané parametry modelu (společnosti) a počáteční výchozí podmínky nákaza šířit a jak;

- ❖ jak vážná bude epidemie, tj. jaké maximální hodnoty nabude stav skupiny infikovaných;
- ❖ jak se bude vyvíjet stav kategorie R, zejména, je-li choroba smrtelná, apod.

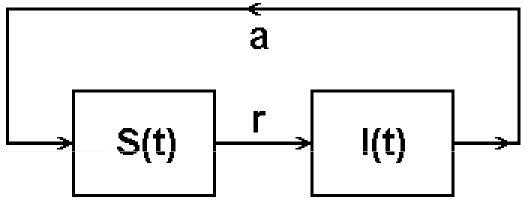
$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0\ ; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0\ ; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

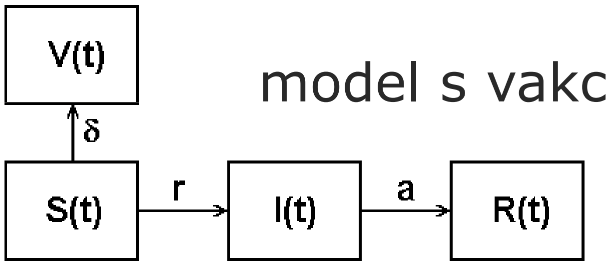
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB
DALŠÍ VARIANTY



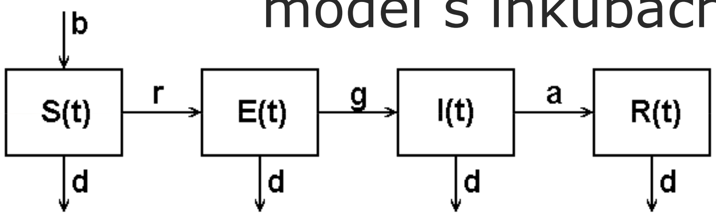
model bez získané rezistence



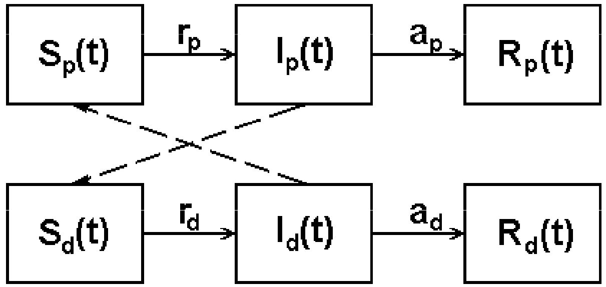


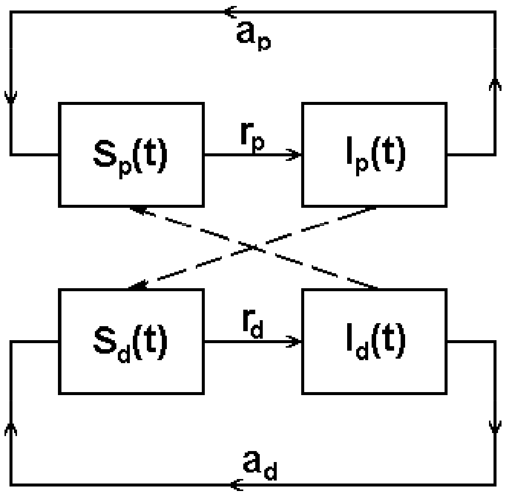
model s vakcinací

model s inkubační dobou



modely venerických chorob

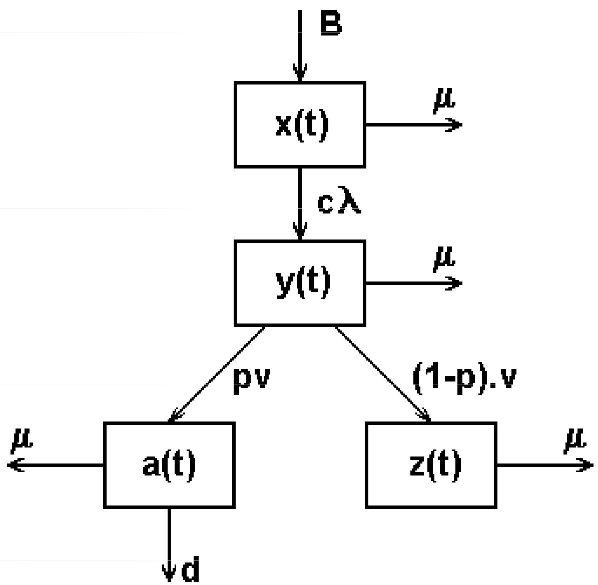




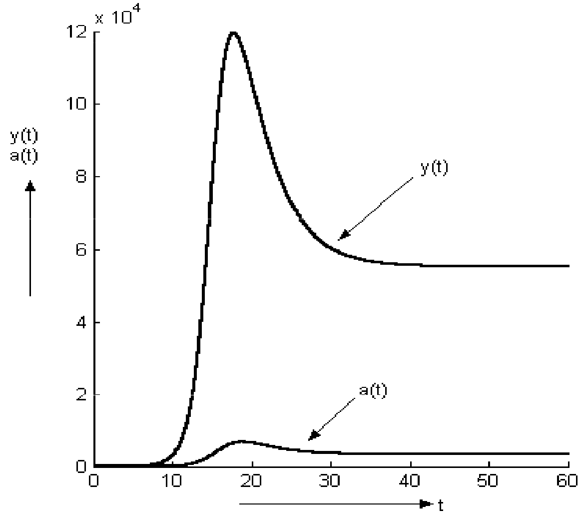
EPIDEMIOLOGIE

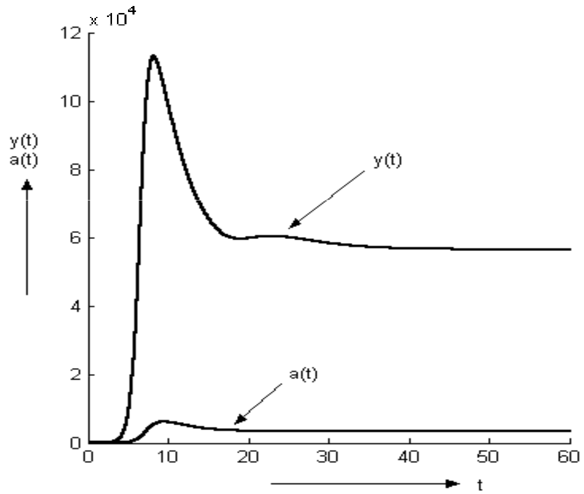
MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB
DALŠÍ VARIANTY

MODEL AIDS



x(t), y(t), a(t) a z(t) udávají počet zdravých, infikovaných, nemocných AIDS a séropozitivních, ale neinfekčních osob





dvojnásobný počet sexuálních partnerů

ZA DVA TÝDNY NA SHLEDANOU

(V TOMTO SEMESTRU NAPOSLED)