# SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY

**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

holcik@iba.muni.cz

# II. SIGNÁLY ZÁKLADNÍ POJMY

# SIGNÁL - DEFINICE

# SIGNÁL - DEFINICE

**Signál** je jev fyzikální, chemické, biologické, ekonomické či jiné materiální povahy, nesoucí informaci o stavu systému, který jej generuje, a jeho dynamice.

Je-li zdrojem informace živý organismus, pak hovoříme o **biosignálech** bez ohledu na podstatu **nosiče informace**.

# SIGNÁLY ☼ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné signály vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) modely;
- ☑ model signálu by měl splňovat dva základní požadavky:
  - ➔ výstižnost, přesnost;
  - ➔ jednoduchost, snadná manipulace;

# KLASIFIKACE SIGNÁLŮ
## (JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

A) Spojité a diskrétní signály

Analogové a digitální (číslicové) signály

B) Reálné a komplexní signály

C) Deterministické a náhodné signály

D) Sudé a liché signály

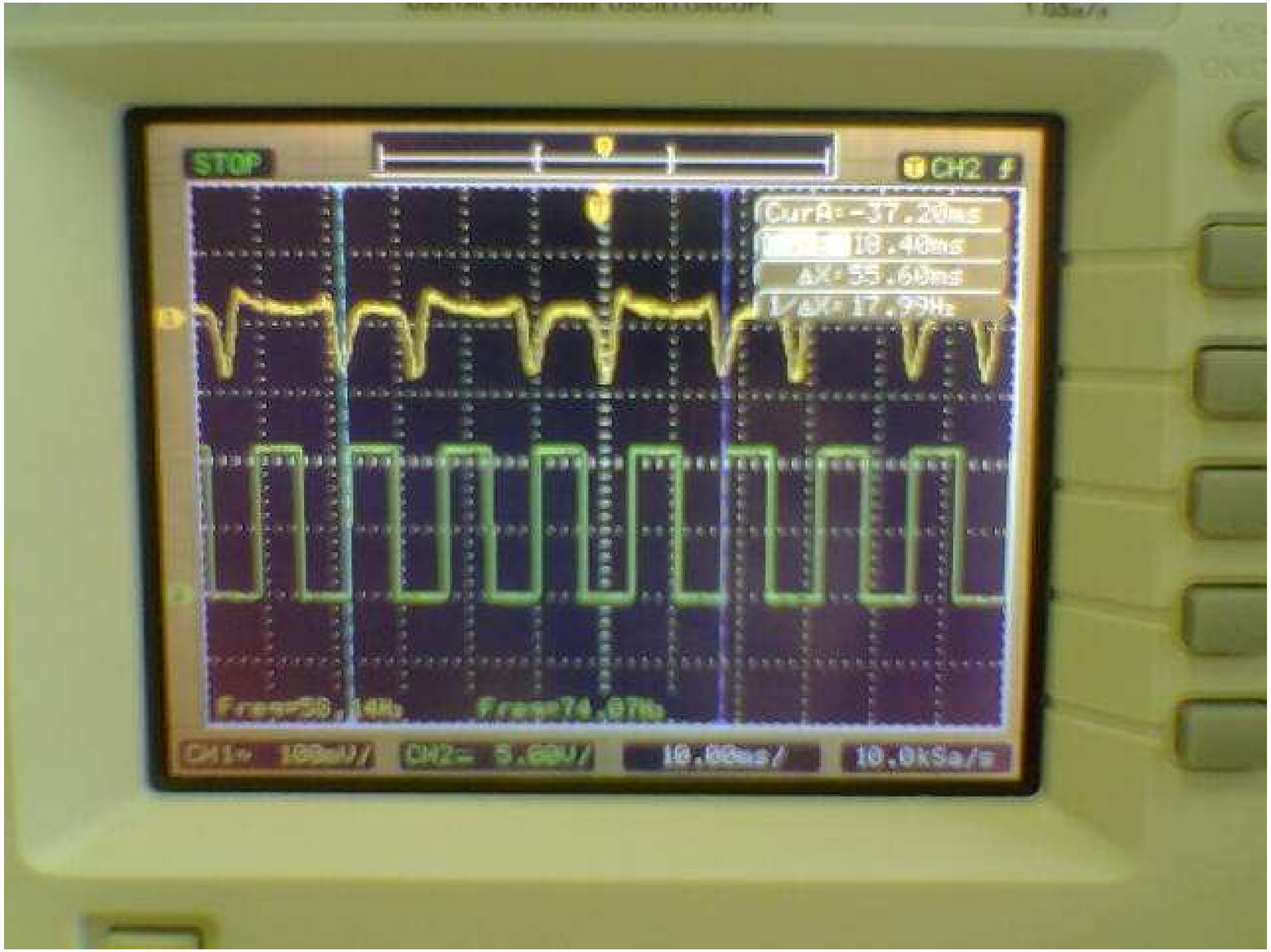
E) Periodické a neperiodické signály

# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

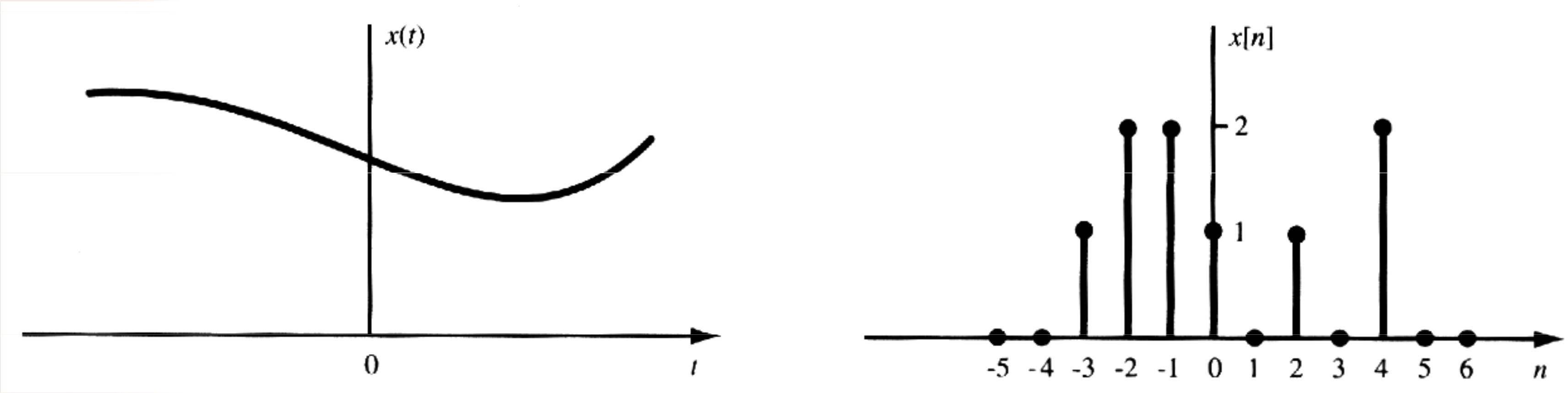
- **Spojitý signál** (přesněji **signál se spojitým časem**) je takový signál $x(t)$, kde čas $t$ je spojitá proměnná.
- **Diskrétní signál** (přesněji **signál s diskrétním časem**) je takový signál $x(t)$, kde čas $t$ je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní signál proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde $n$ je celé číslo, resp. x(nT).

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitý signál v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál.

# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

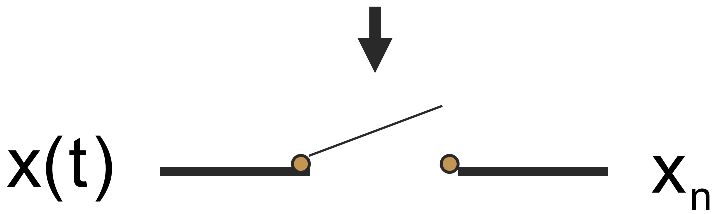


# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY



# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- U diskrétního signálu není hodnota signálu mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní signál lze také získat **vzorkováním** spojitého signálu: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, …, $x(t_n)$, … (též značení $x_0$, $x_1$, $x_2$, …, $x_n$, …). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



# A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- Diskrétní signál vyjádřený posloupností můžeme zapsat
  - funčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad n < 0 \end{cases}$$

  - explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}$$

(zde se implicitně předpokládá, že prvky jsou číslovány od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

# ANALOGOVÉ A DIGITÁLNÍ (ČÍSLICOVÉ) SIGNÁLY

- **Analogový signál** nabývá hodnot ze spojitého intervalu.
- **Digitální (číslicový) signál** nabývá hodnot z konečné množiny hodnot.

*Příkladem analogového signálu* může být např. EKG signál zaznamenaný na papír nebo hodnota napětí zobrazená na analogovém osciloskopu.

*Příkladem digitálního signálu* může být např. barva pixelu digitální fotografie <0;255>.

- **Kvantování** je proces, kterým se převádí spojité hodnoty veličin na diskrétní.

# B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ SIGNÁLY

- **Reálný signál** je takový signál, který nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- **Komplexní signál** je takový signál, který nabývá komplexních hodnot. (Hypotetický, v praxi neměřitelný.)

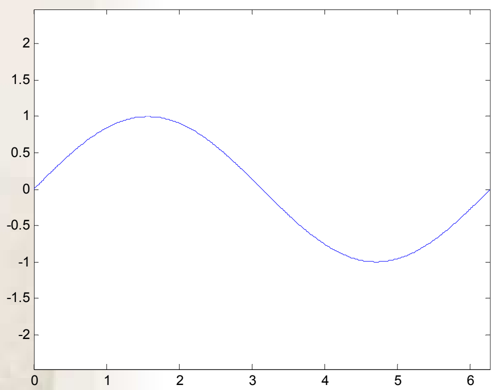
$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

# C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

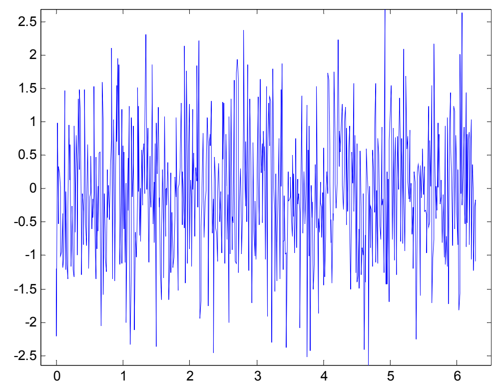
- **Deterministický signál** je takový signál, jehož hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Takovýto signál může být tedy popsán analytickou funkcí času *t*.

- **Náhodný (stochastický) signál (veličina)** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.




$x(t) = \sin t$

$N(0,1)$



# C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

- ☑ **Náhodný (stochastický) signál (veličina)** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

# C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ SIGNÁLY

**Náhodný (stochastický) signál (veličina)** je takový signál, jehož hodnoty jsou náhodné. Takovéto signály popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

**Náhodný proces**

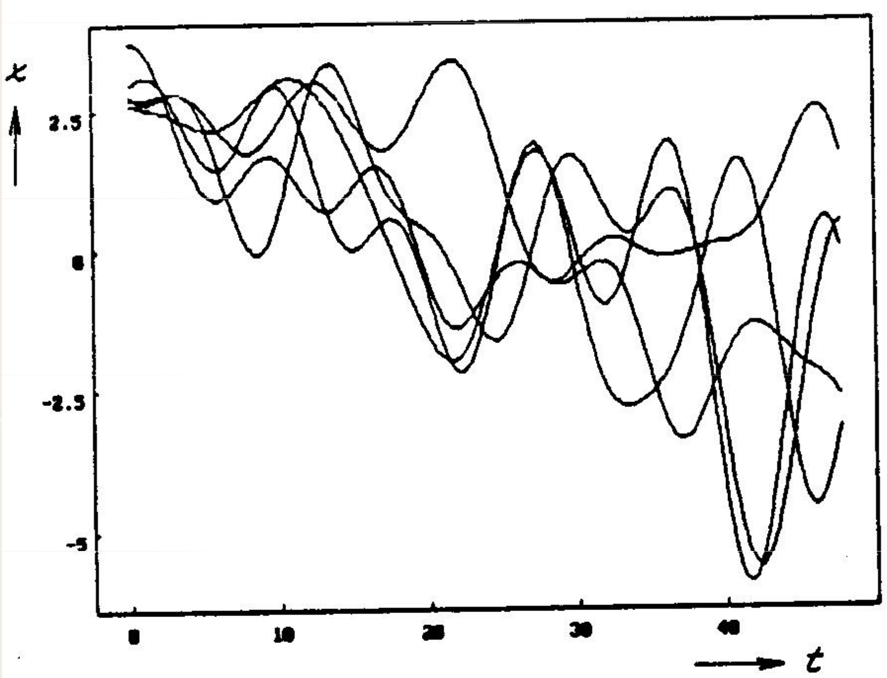
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin $\xi_i$, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

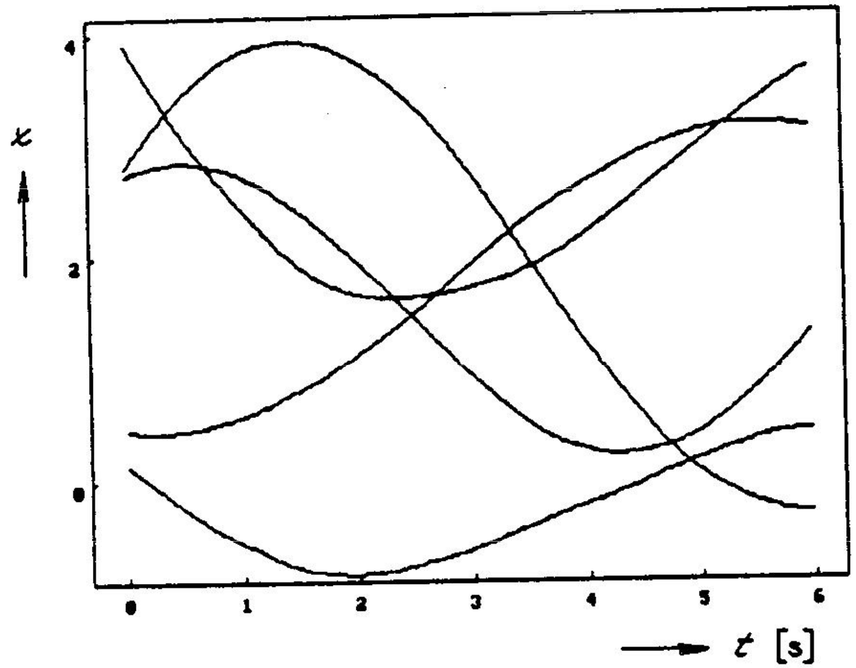
- stacionarita;
- ergodicita

# STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

## zhruba:

- ☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním



# STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

**přesněji:**

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky $t_1$ a $t_2$)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

# ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

**Ergodický náhodný proces** (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

# D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY

- **Sudý signál** je takový, pro který platí

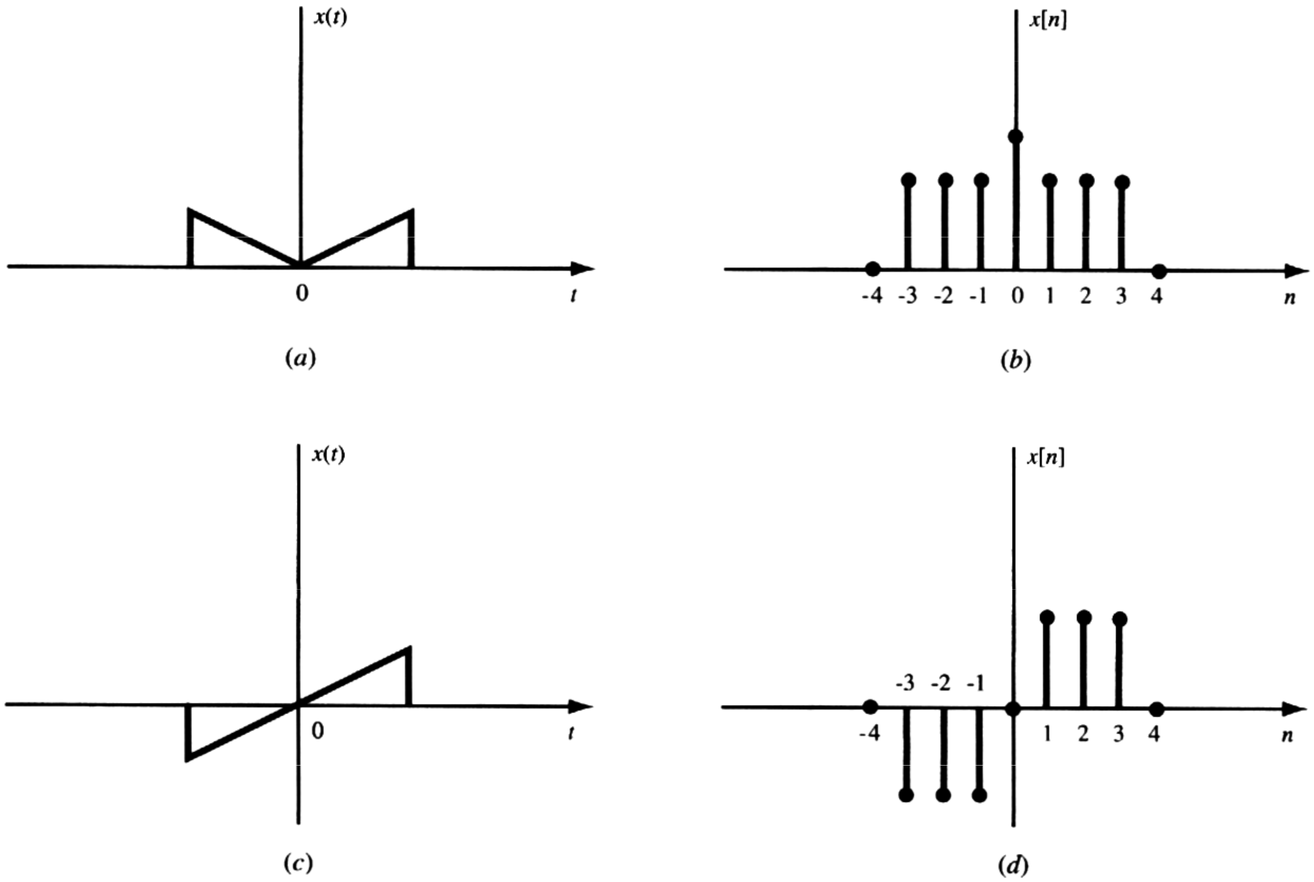
$$x(-t) = x(t), \quad x_{-n} = x_n$$

- **Lichý signál** je takový, pro který platí

$$x(-t) = -x(t), \quad x_{-n} = -x_n$$

- Součin sudého a lichého signálu je lichý signál.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých signálů je sudý signál.

# D) SUDÉ A LICHÉ SIGNÁLY



# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- Spojitý signál $x(t)$ je **periodický s periodou $T$**, jestliže existuje hodnota $T$ taková, že pro všechna $t$ platí

$$x(t+T)=x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota $T$, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

$$x(t+kT)=x(t),$$

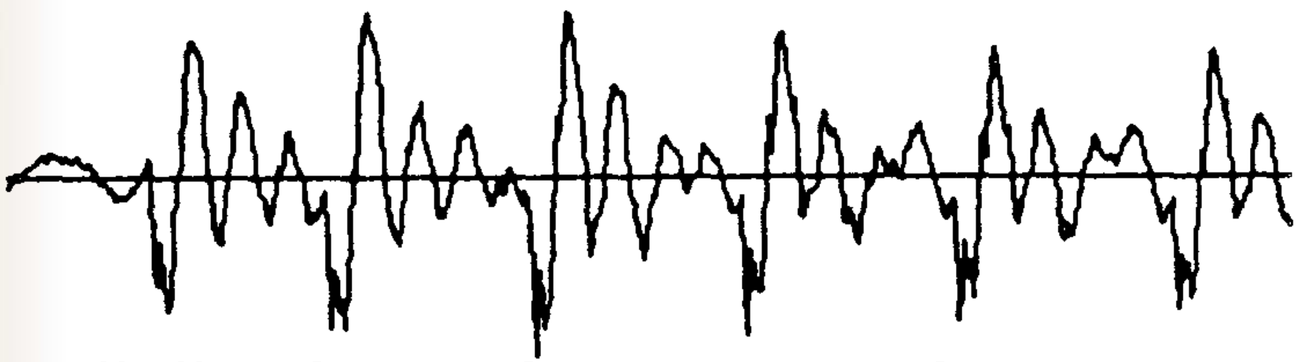
kde $k$ je celé číslo.

# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

**Pozor!**

- Pro konstantní signál není definována základní perioda. Konstantní signál je periodický pro každou hodnotu $T$.
- Spojitý signál, který není periodický se nazývá **neperiodický** nebo **aperiodický**.
- Reálné biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních signálech**.

**Pohov!**



řečový signál – samohláska „e“

# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY

- Pro diskrétní signál definujeme periodický signál s periodou N obdobně

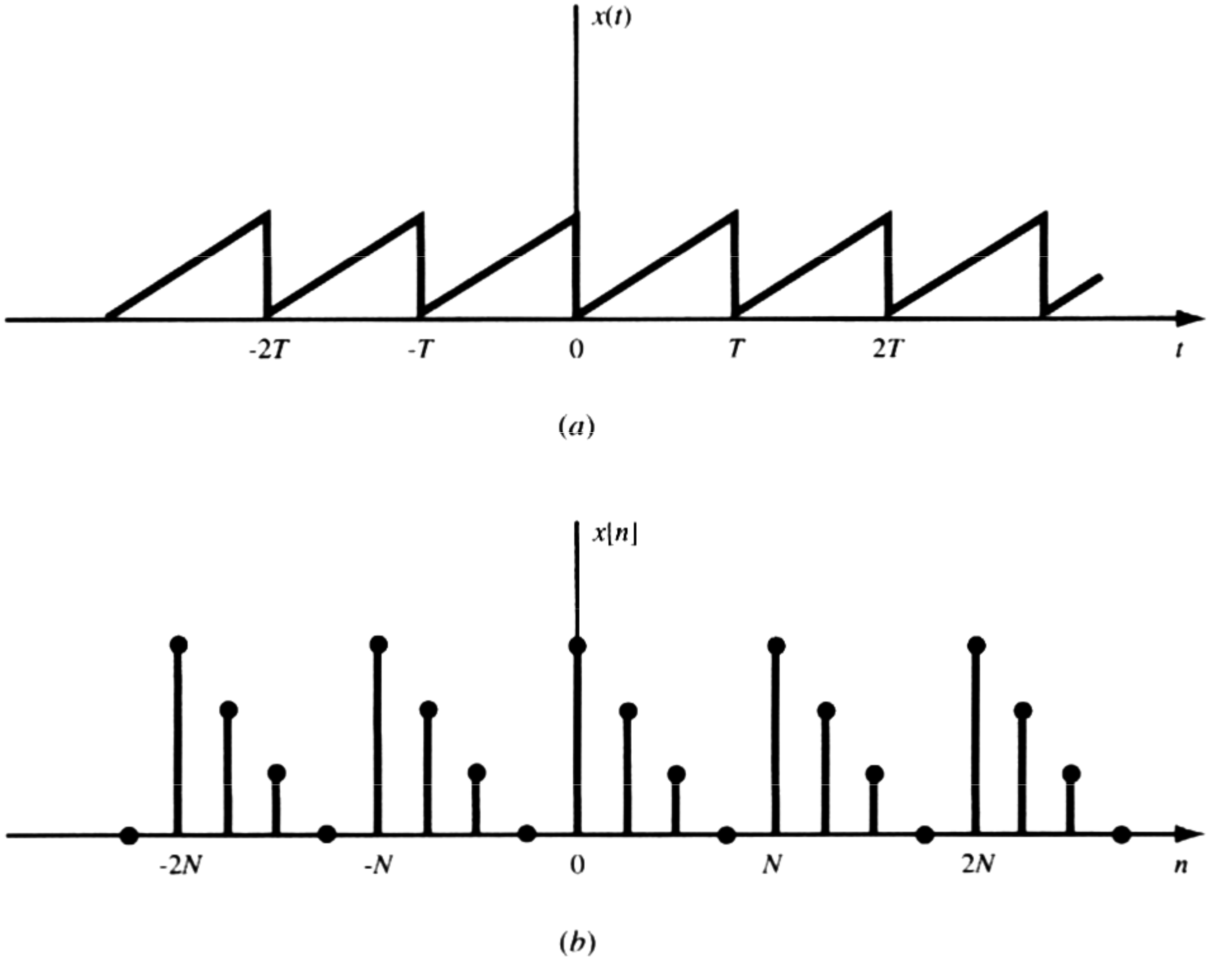
$$x_{n+N} = x_n \qquad \text{a} \qquad x_{n+kN} = x_n$$

**Pozor!**

- ☑ Diskrétní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

**Pohov!**

# E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ SIGNÁLY



# SIGNÁLY SPOJITÉ V ČASE

# HARMONICKÝ SIGNÁL

# HARMONICKÁ FUNKCE

- **harmonický signál** je popsán funkcí

$$x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde

A>0 je amplituda harmonické funkce

$\omega$ >0 je úhlový kmitočet h.f.

$\varphi_0$ je počáteční fáze, tj. fáze v čase t=0

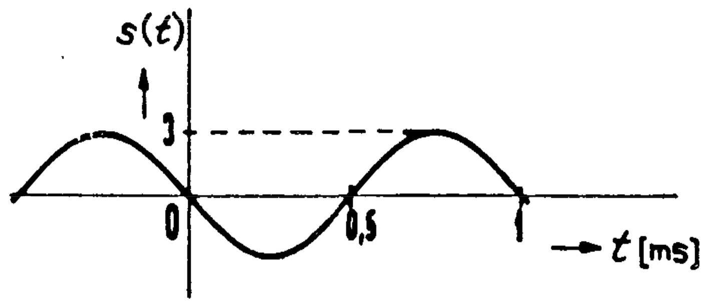
$\omega t + \varphi_0$ je fáze harmonické funkce

Perioda harmonické funkce je dána vztahem

$$T = 2\pi/\omega$$

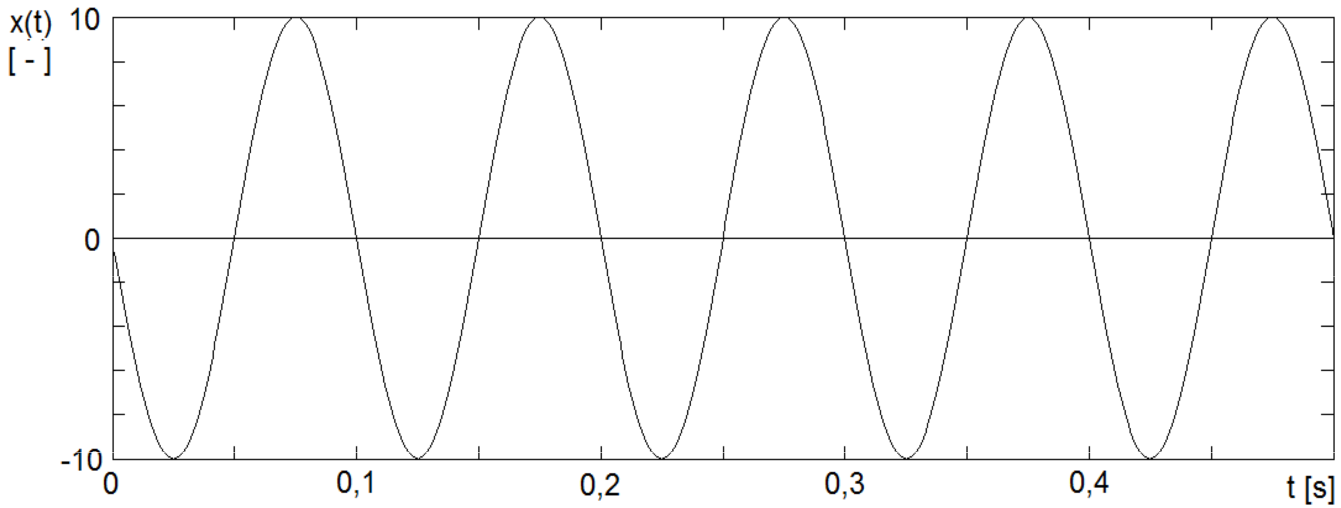
kmitočet h.f. je definován

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$



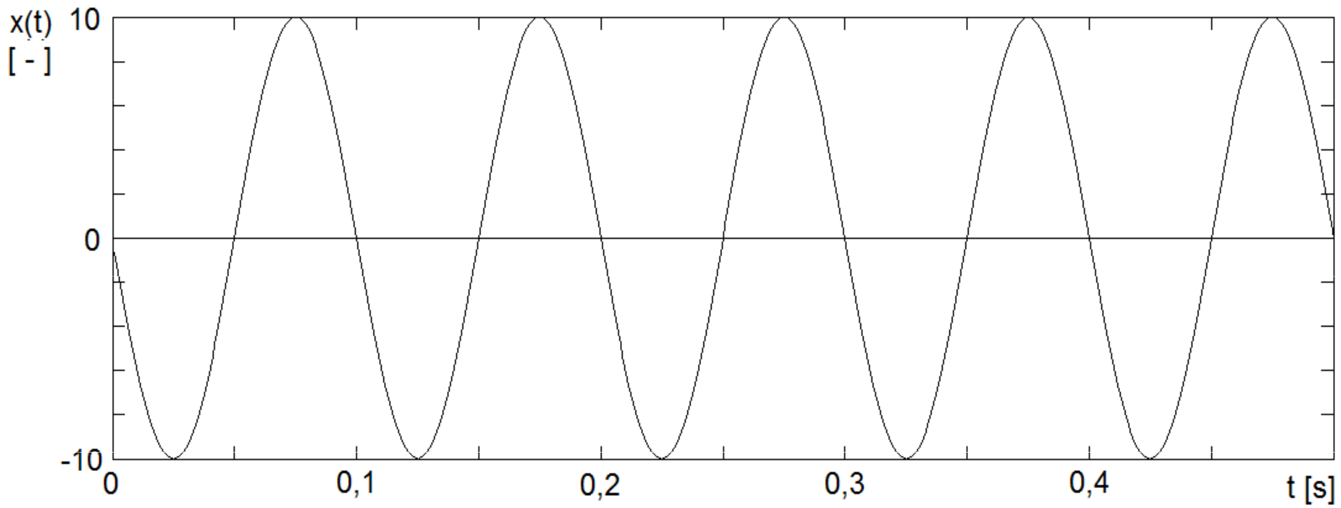
# HARMONICKÁ FUNKCE

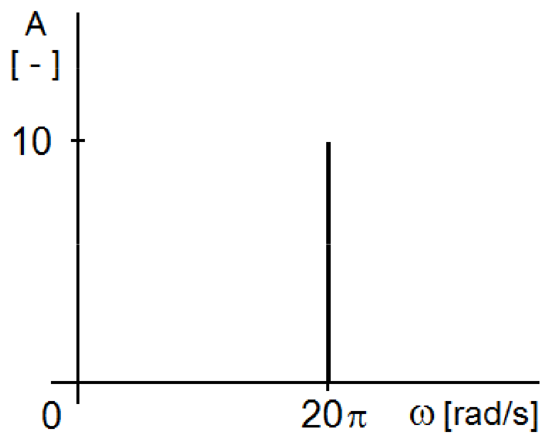
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

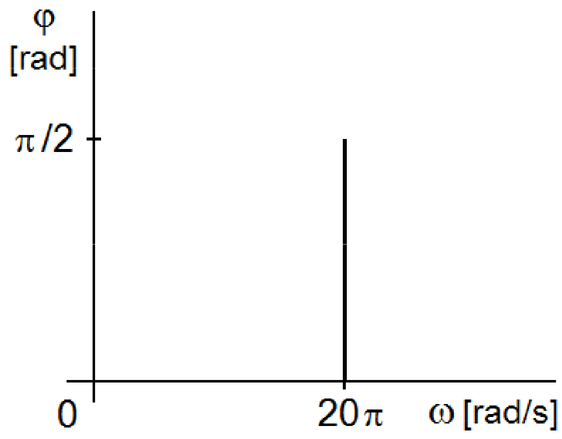


# HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$



# HARMONICKÁ FUNKCE

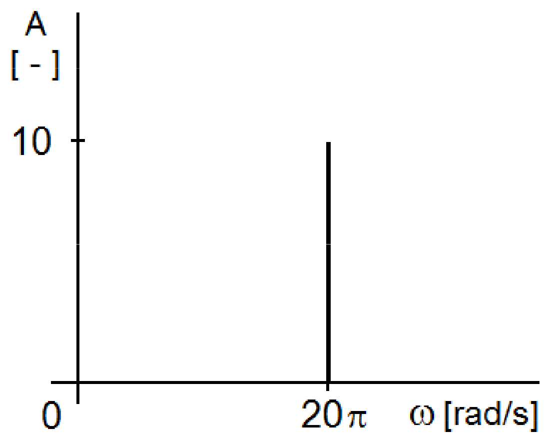
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

- ☑ tříparametrický harmonický signál lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

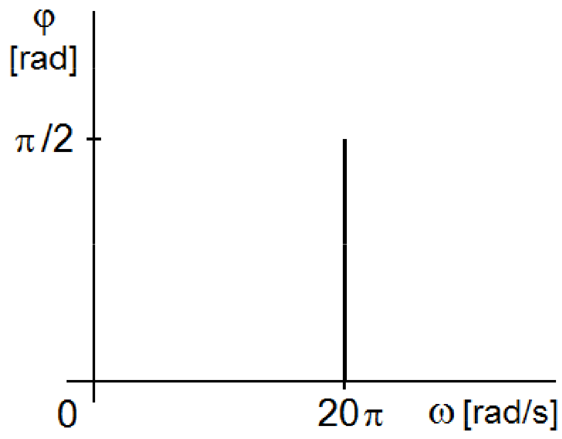
amplituda x (úhlový) kmitočet a

počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad a \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$




**spektrum** amplitud




**spektrum** počátečních fází

# !!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

**Frekvenční spektrum** signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

**! ZAPAMATOVAT NA VĚKY !**

# HARMONICKÝ SIGNÁL

- ☑ další definice

$$x(t) = Re\{\dot{x}(t)\} = Re\{A.\exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

# HARMONICKÝ SIGNÁL

kupodivu lze použít i vztah

$$x(t) = \mathcal{Re}\{A.\exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \mathcal{Re}\{\dot{x}^*(t)\}$$

**pozor !!! pozor**

- záporný kmitočet - ale funguje to

# HARMONICKÝ SIGNÁL

Protože platí

$$x(t) = Re\{\dot{x}(t)\} = Re\{\dot{x}^*(t)\} \text{ a } Im\{\dot{x}(t)\} = -Im\{\dot{x}^*(t)\}$$

je i

$$x(t) = ½.\{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(j\varphi_0).\exp(j\omega t)\} +$$
$$+ ½.\{A\exp(-j\varphi_0).\exp(-j\omega t)\}$$

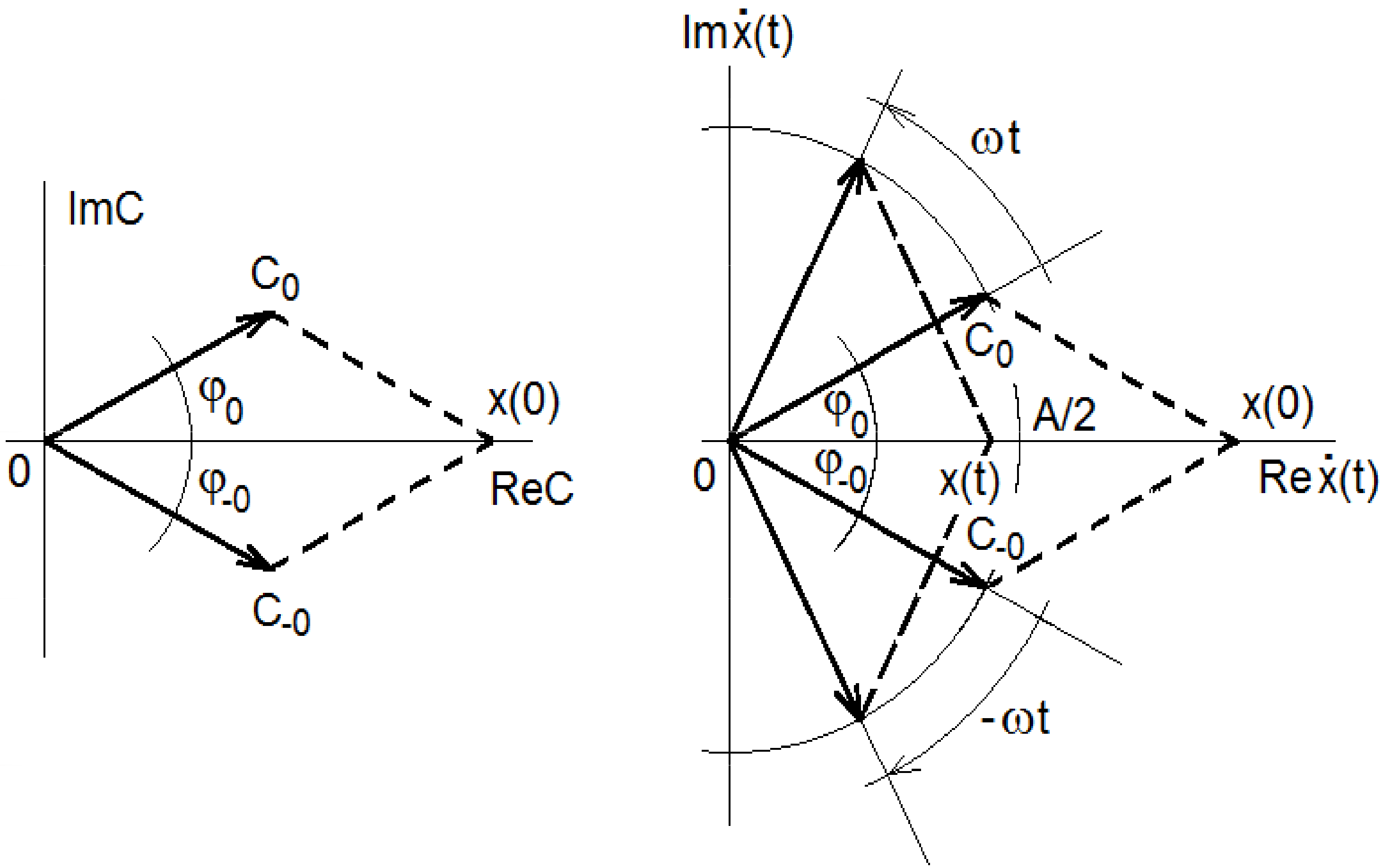
Označíme-li

$$\dot{C}_1 = ½.A.\exp(j\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-1} = ½.A\exp(-j\varphi_0)$$

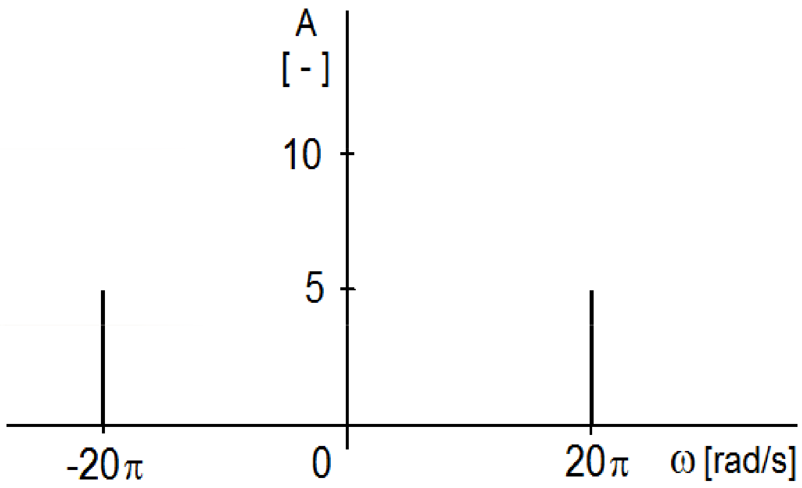
je

$$x(t) = \dot{C}_1.\exp(j\omega t) + \dot{C}_{-1}.\exp[j(-\omega)t]$$

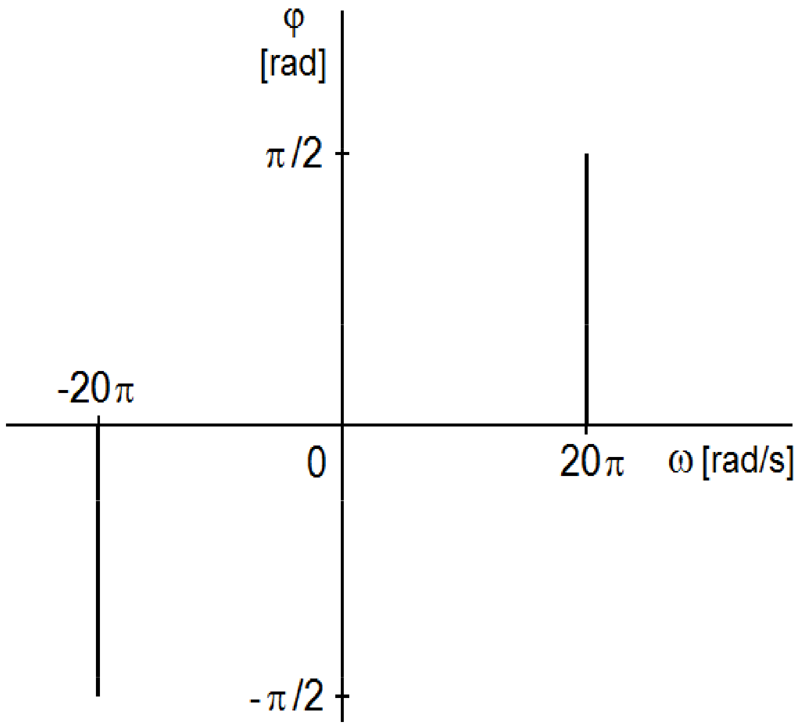
# HARMONICKÝ SIGNÁL



# HARMONICKÝ SIGNÁL



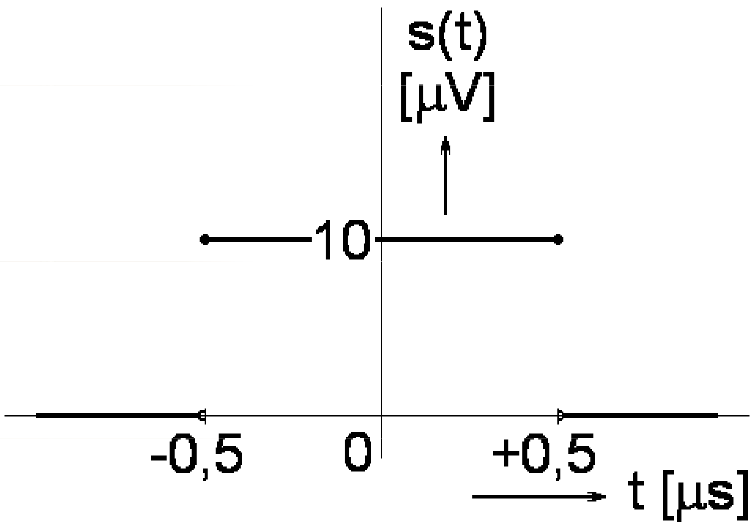

**spektrum** amplitud




**spektrum** počátečních fází

# NEPERIODICKÉ FUNKCE

## ☑ jednorázový deterministický signál




$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0{,}5\ \mu s;\ 0{,}5\ \mu s \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in (0{,}5\ \mu s;\ \infty \rangle$

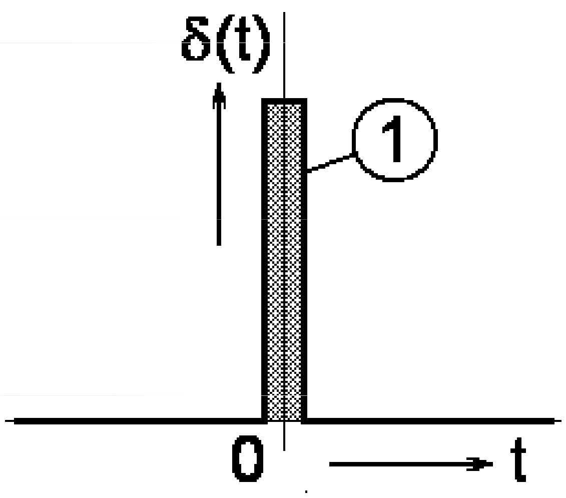
$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty;\ -0{,}5\ \mu s\ )$

# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$




zjednodušeně:

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1\,.$$

# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

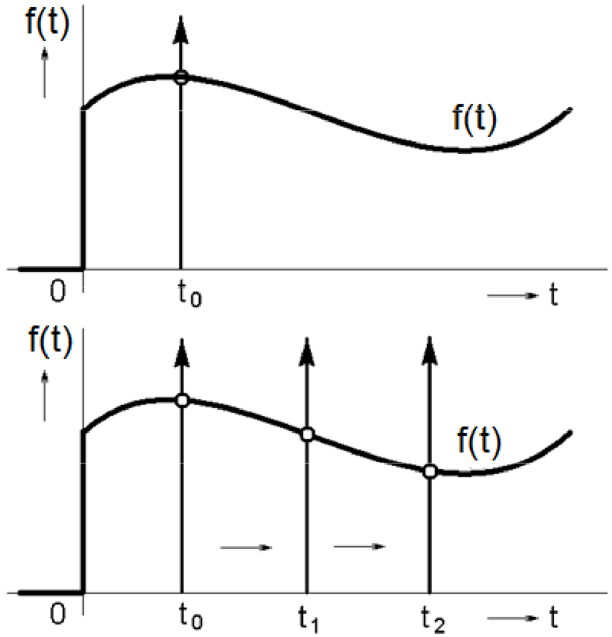
☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

$$= f(t_0).\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$



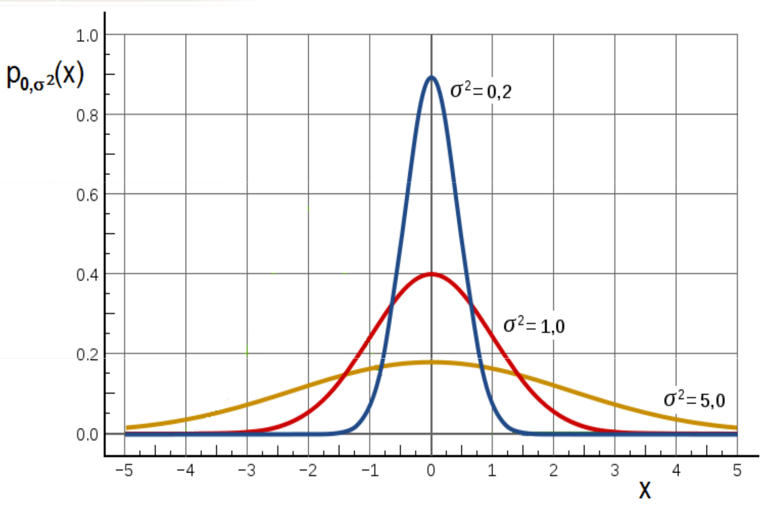
# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

zjednodušeně:



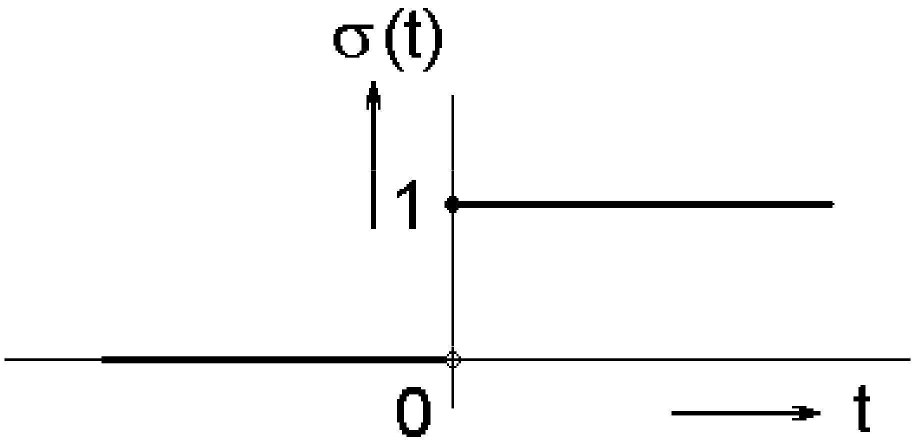

jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



# JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ pro obě uvedené jednorázové funkce platí:

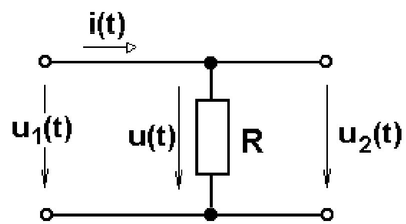
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t)$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

# JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitá výkon p(t) v čase t, vykonaný na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$




Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$A(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

# JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitého signálu x(t) vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní signál $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

# JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

$$P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

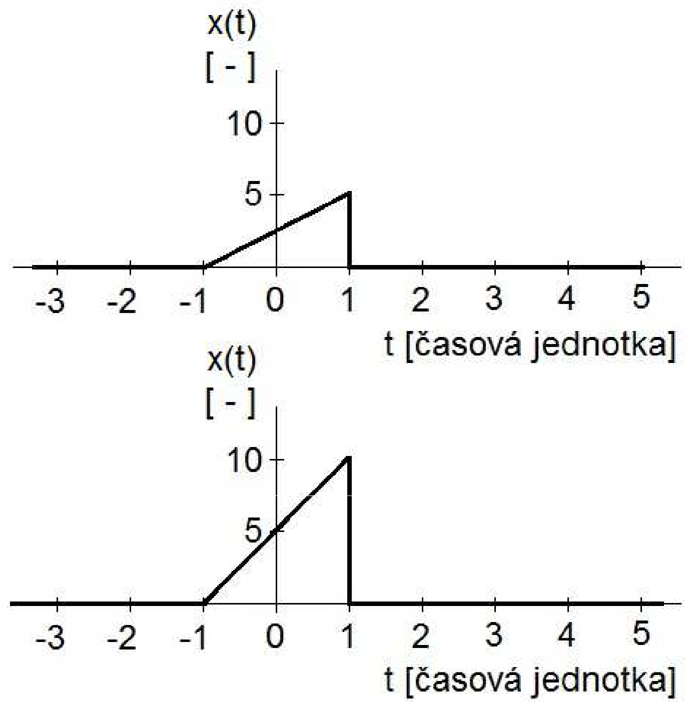
příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

## ☑ násobení konstantou

$$x(t) \sim A.x(t),$$




A=2

- ☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

m > 1 – časová komprese;

m < 1 – časová expanze

m = 1 – nic se neděje

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

## ☑ změna časového měřítka

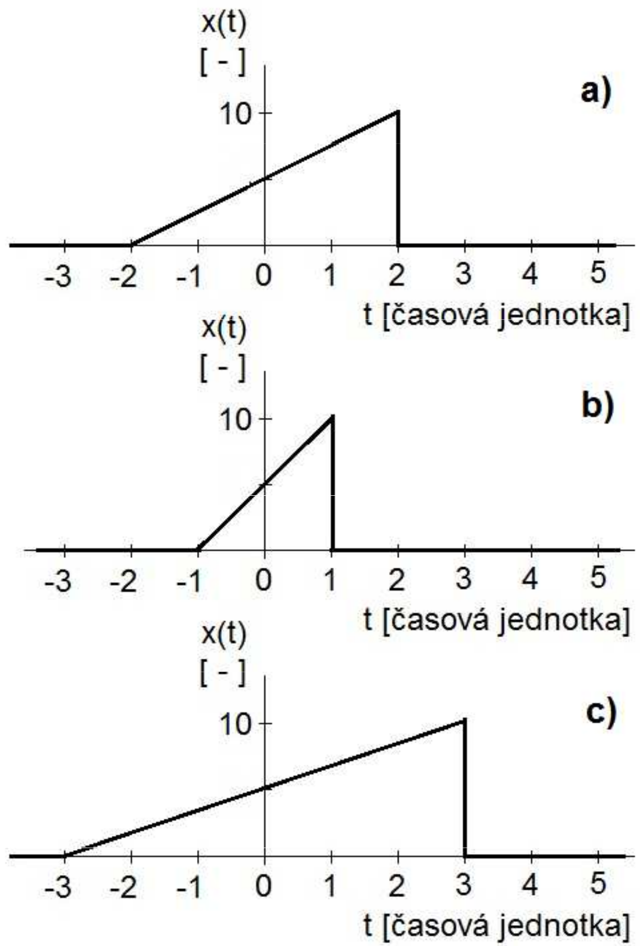
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje




a) originál; b) k=2; c) k=2/3

- ☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

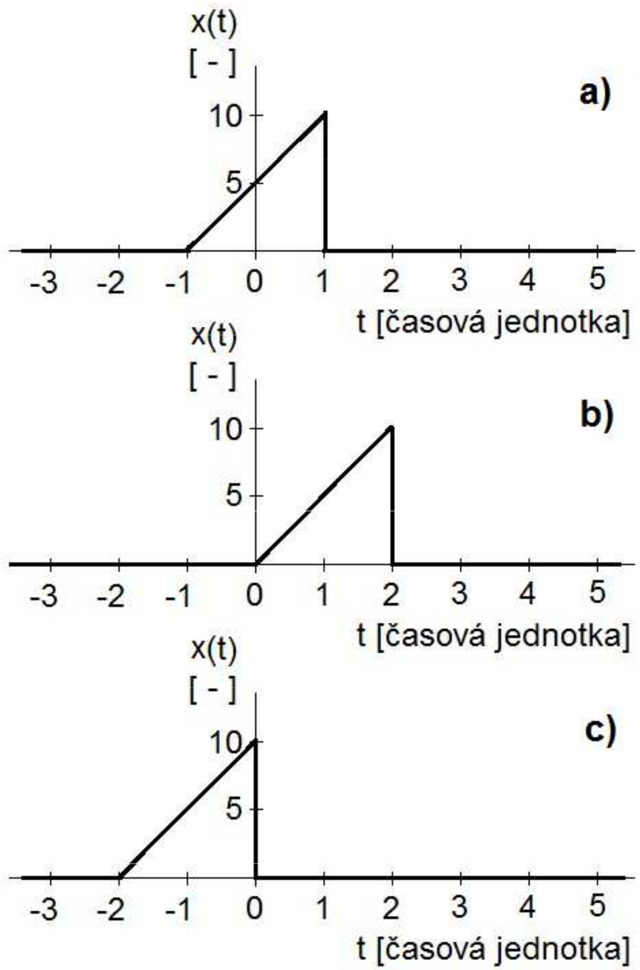
# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

$\tau$ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

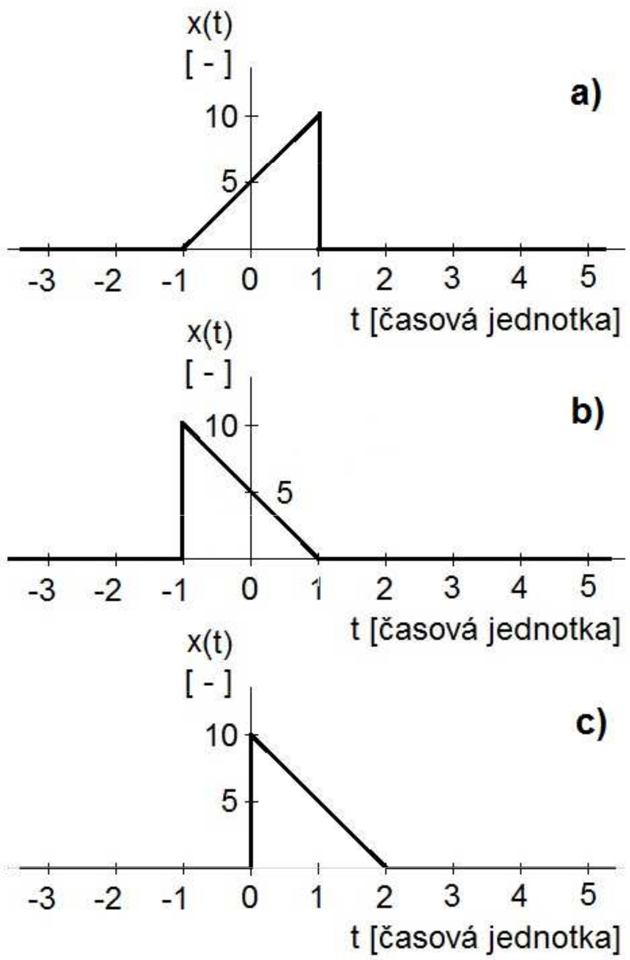



*a) originál x(t); b) funkce x(t-1); c) funkce x(t+1);*

# ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
# OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

- ☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$x(t) \sim x(-t) \,,$$




*a) originál x(t); b) funkce x(-t); c) funkce x(-t-1)*

# SHRNUTÍ

- ☑ Jaké typy signálů známe (dle vlastností)?
- ☑ Stacionarita, ergodicita
- ☑ Definice základních signálů (jednotkový skok, impuls, harmonický signál)
- ☑ Různé formy vyjádření harmonického signálu
- ☑ Co je frekvenční spektrum?
- ☑ Základní operace se signály