Úvod do práce v laboratoři

Zdeněk Bochníček

Literatura:

PÁNEK, Petr. *Úvod do fyzikálních měření*. Brno: skripta PřF MU, 2001

HORÁK, Zdeněk. *Praktická fysika*. SNTL Praha, 1958

BROŽ, Jaromír a kol. *Základy fysikálních měření*. SPN Praha, 1967

Podmínky zápočtu:

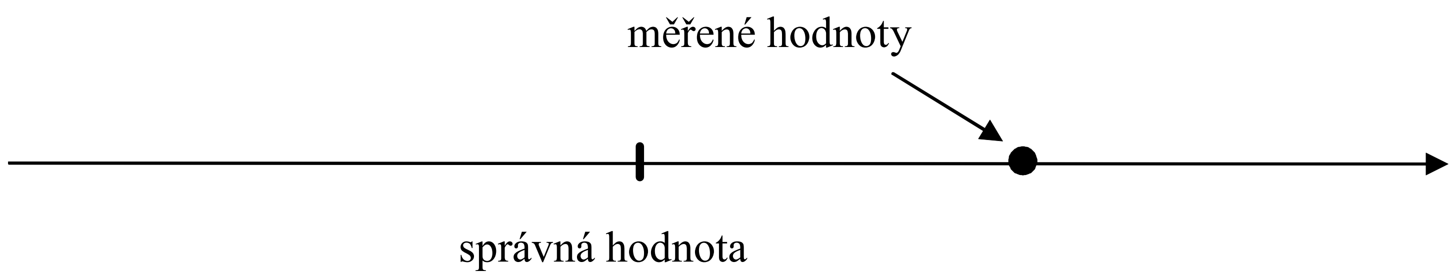
- 80% účast
- vyřešení experimentálního úkolu a odevzdání protokolu z měření

Chyba měření: naměříme jinou hodnotu, než je hodnota správná.

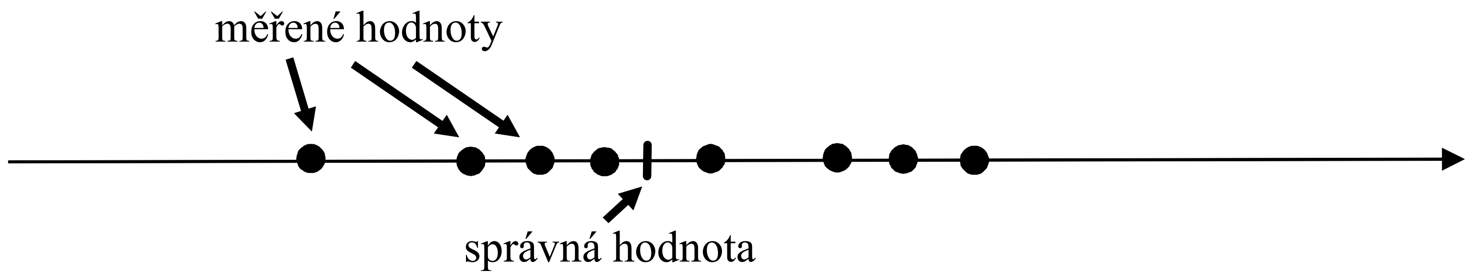
Chyby dělíme na systematické a náhodné.

Při měření byly získány tyto hodnoty.

Měření 1:



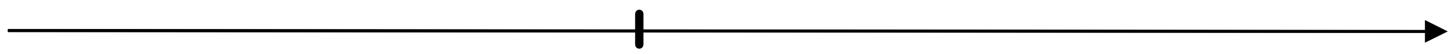
Měření 2:



Které měření je zatíženo náhodnou a které systematickou chybou?

Vyznačte na ose možné výsledky dvou měření: s malou a s velkou systematickou chybou.

malá systematická chyba



správná hodnota

velká systematická chyba

správná hodnota

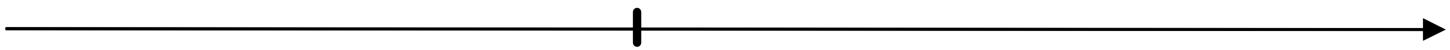
Vyznačte na ose možné výsledky dvou měření: s malou a s velkou náhodnou chybou.

malá náhodná chyba

velká náhodná chyba

Vyznačte na ose možné výsledky těchto měření:

- s malou systematickou a velkou náhodnou chybou.
- s velkou systematickou a malou náhodnou chybou.
- s velkou systematickou a velkou náhodnou chybou.
- s malou systematickou a malou náhodnou chybou.



správná hodnota

V loňském roce jste měli na spořícím účtu uloženo 20 000Kč. Na konci roku Vám byl připsán celkový roční úrok v hodnotě 300Kč. Jaká byla úroková míra spořícího vkladu?

Napíšeme-li výraz:

$$x = (\text{hodnota} \pm \text{nejistota (chyba)})\left[\text{jednotky}\right]$$

je uvedená nejistota tzv. chybou absolutní – má stejné jednotky jako hodnota.

Vedle absolutní nejistoty se používá také nejistota relativní, která je bezrozměrná a udává, jakou poměrnou část z hodnoty nejistota tvoří. Relativní nejistota se často udává v procentech.

Jak je relativní nejistota definována?

Posuvným měřítkem jsem naměřili tloušťku skleněné destičky:

$$d = (4,2 \pm 0,1)\mathrm{mm}$$

Jaká je absolutní a jaká relativní nejistota měřené veličiny?

Svinovacím metrem měříme šířku knihy a šířku stolu.

Které měření má větší absolutní a které větší relativní nejistotu?

Naměřený proud 425mA byl změřen s relativní nejistotou $2 \cdot 10^{-3}$.

Jaká byla absolutní nejistota ?

Chceme změřit šířku kovového nosníku (přibližná hodnota 12cm) s relativní nejistotou 1‰. S jakou absolutní nejistotou musíme měřit?

Jak dlouho musíme měřit periodu kmitů kyvadla (počítat kmity a měřit čas), abychom ji určili s nejistotou 10^{-4}? Čas měříme ručními stopkami.

Návod: Nejprve odhadněte, s jakou absolutní nejistotou jste schopni ručními stopkami měřit časový interval.

Níže jsou uvedeny dva výsledky měření:

$$\text{A:} \quad U = (4,25 \pm 0,01)\,\mathrm{mV}$$

$$\text{B:} \quad U = (425,4 \pm 0,1)\,\mathrm{V}$$

Které měření je přesnější a které citlivější?

Vyberte pravdivé výroky

A: Přesnost měření je dána relativní nejistotou.

B: Přesnost měření je dána absolutní nejistotou.

C: Citlivost měření je dána relativní nejistotou.

D: Citlivost měření je dána absolutní nejistotou.

Klasická definice pravděpodobnosti:

$$\text{Pravděpodobnost} = \frac{\text{Počet případů příznivých}}{\text{Počet případů možných}}$$

Jakých hodnot může pravděpodobnost daného jevu nabývat?

Klasická definice pravděpodobnosti:

$$\text{Pravděpodobnost} = \frac{\text{Počet případů příznivých}}{\text{Počet případů možných}}$$

Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo „3“?

Jaká je pravděpodobnost, že na minci padne „orel“?

Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne sudé číslo?

Jaká je pravděpodobnost, že na hrací kostce padne číslo dělitelné třemí?

Jaká je pravděpodobnost, že se narodí děvče?

Statistická definice pravděpodobnosti

n krát opakujeme daný experiment

m krát je výsledek „úspěch“ (příznivý případ).

$$\text{Pravděpodobnost} = \lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

V roce 1999 se v ČR narodilo 43 642 děvčat a 45 829 chlapců.

Z těchto dat určete odhad pravděpodobnosti narození děvčete či chlapce.

Pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi

1: Pravděpodobnost, že nastane alespoň jeden ze dvou navzájem se vylučujících jevů je součtem pravděpodobností obou jevů.

2: Pravděpodobnost, že současně nastanou dva nezávislé jevy je součinem pravděpodobností obou jevů.

Zajímá nás, jestli při příštím hodu kostkou padne číslo tři a nebo šest.

Jedná se o:

- nezávislé jevy
- navzájem se vylučující jevy

Zajímá nás, jestli se sestře narodí chlapec nebo děvče.

Jedná se o:

- nezávislé jevy
- navzájem se vylučující jevy

Házíme současně dvěma kostkami. Zajímá nás, jaká je pravděpodobnost, že na první kostce padne „2“ a na druhé „4“.

Jedná se o:

- nezávislé jevy
- navzájem se vylučující jevy

Určete pravděpodobnost, že při následujícím hodu kostkou padne číslo „1“ nebo číslo „5“.

Určete pravděpodobnost, že při následujícím hodu dvěma kostkami padne na první kostce číslo „1“ a na druhé číslo „5“.

Určete pravděpodobnost, že při následujícím hodu dvěma kostkami padne na některé kostce číslo „1“ a na druhé číslo „5“.

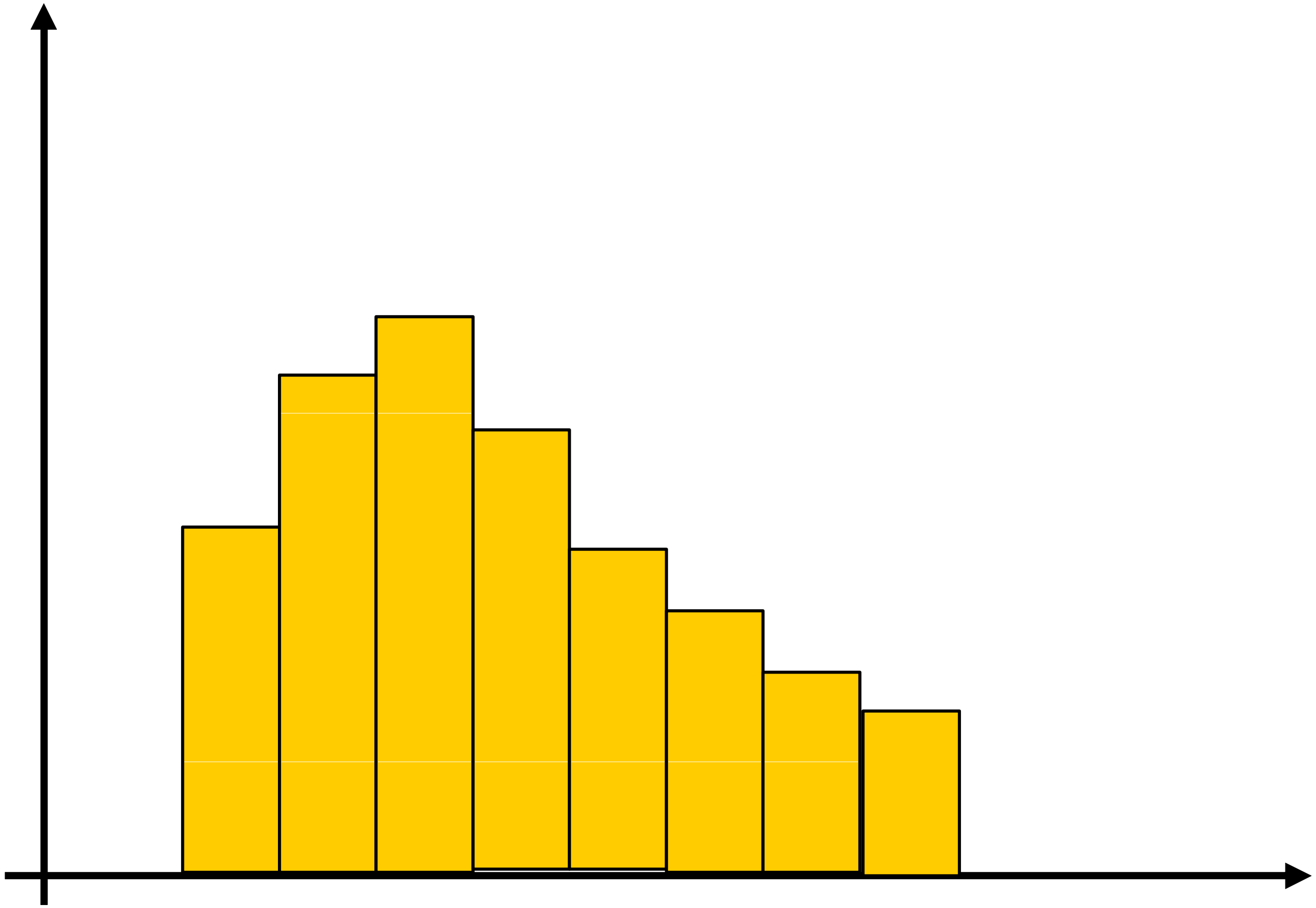
Měříme opakovaně *n* krát za shodných podmínek stejnou veličinu.

Danou hodnotu *x* naměříme *m* krát.

Číslu *m* říkáme „četnost“ měřené hodnoty *x*.

Jaké hodnoty může četnost nabývat, pokud jsme provedli *n* měření?

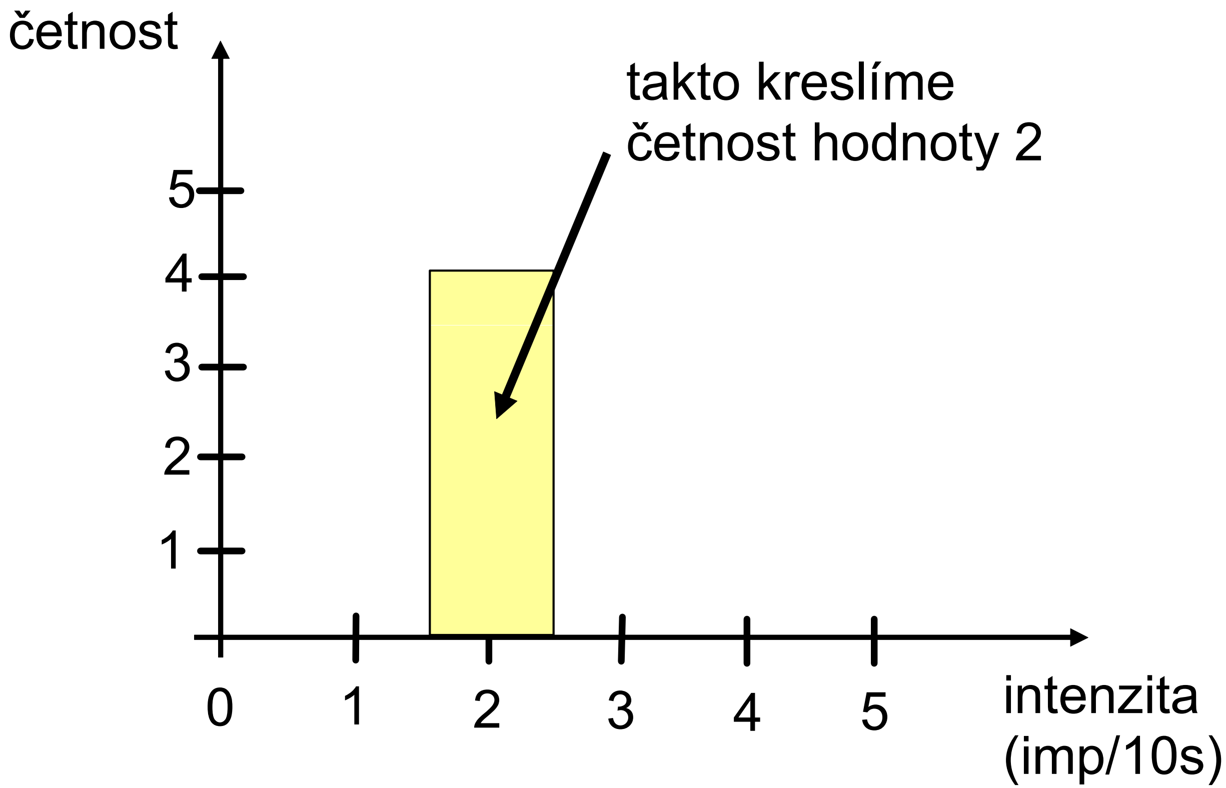
Tento graf nazýváme histogram



Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4
6	2
7	4
8	3
9	3
10	2

Nakreslete histogram: graf četnosti intenzity jako funkce měřené hodnoty



Měříme opakovaně *n* krát za shodných podmínek stejnou veličinu.

Danou hodnotu *x* naměříme *m* krát.

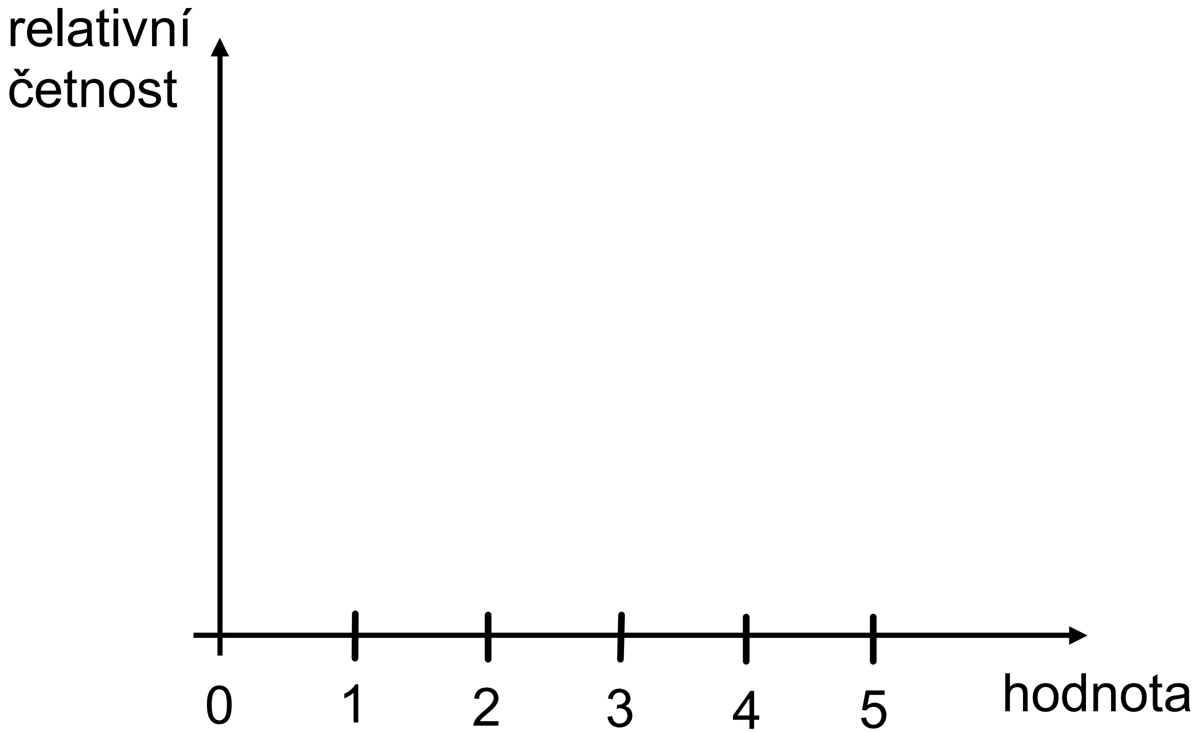
Číslu *m/n* říkáme „relativní četnost“ měřené hodnoty *x*.

Jaké hodnoty může relativní četnost nabývat, pokud jsme provedli *n* měření?

Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4
6	2
7	4
8	3
9	3
10	2

Nakreslete histogram: graf relativní četnosti intenzity jako funkce měřené hodnoty



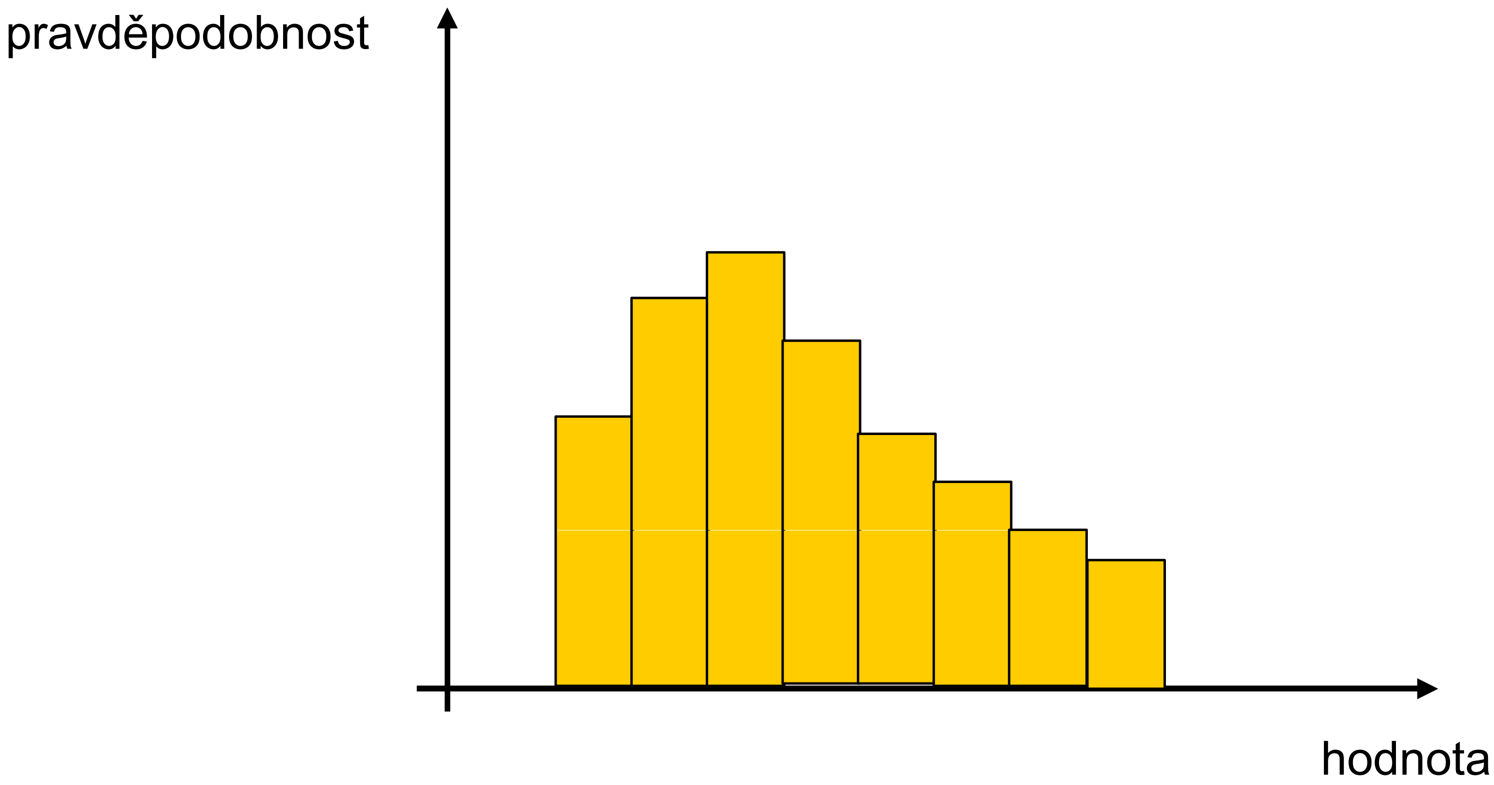
Relativní četnost je definována jako $$\frac{m}{n}$$

Pravděpodobnost je definována jako

$$\lim_{n \to \infty} \frac{m}{n}$$

Za jakých podmínek bude relativní četnost rovna pravděpodobnosti naměření dané hodnoty?

Graf závislosti pravděpodobnosti na naměřené hodnotě nazýváme **rozdělení diskrétní náhodné proměnné**.



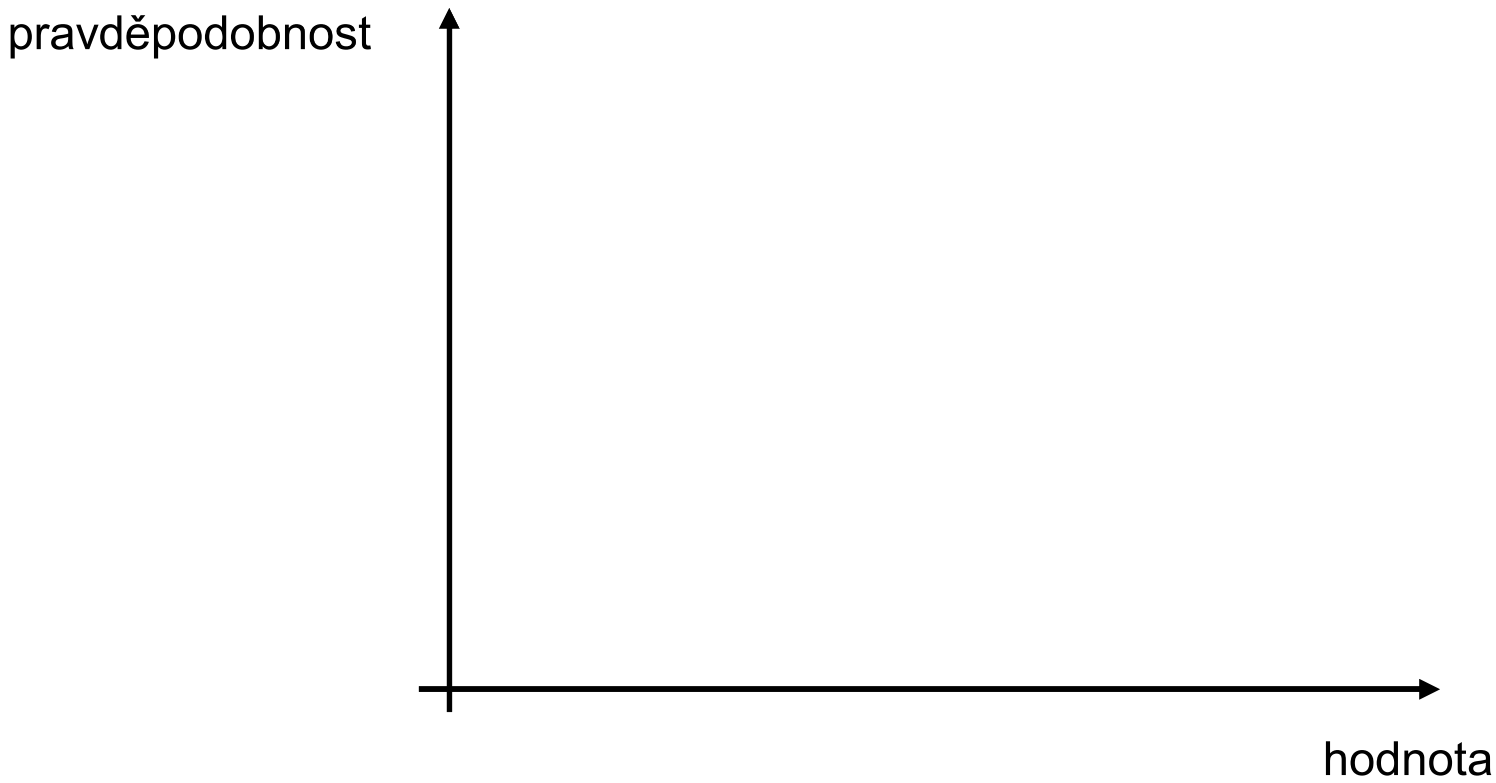
Pravděpodobnost naměření hodnoty x_i budeme značit

$$P_{x_i}$$

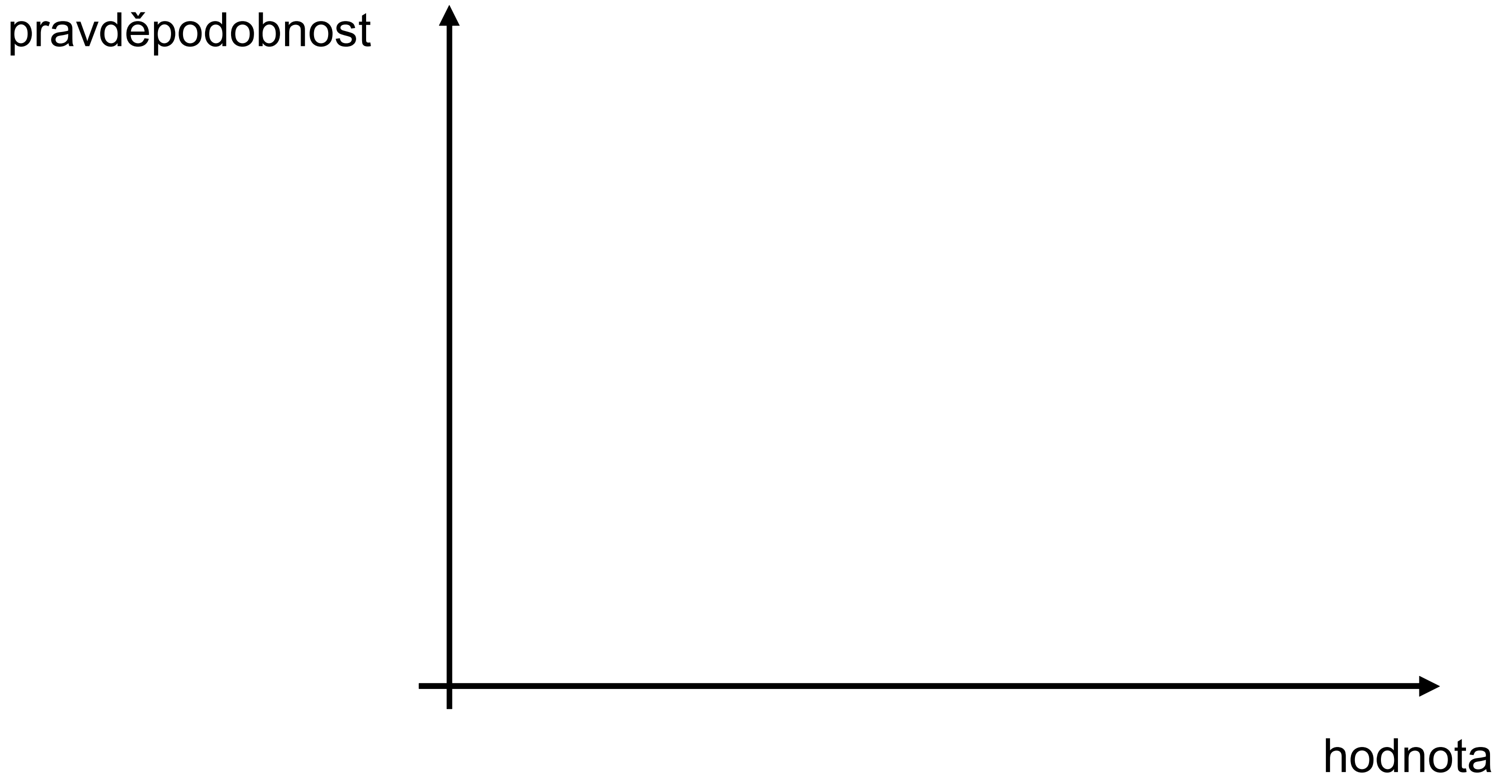
Jaká je hodnota výrazu:

$$\sum_{\text{všechna } i} P_{x_i}$$

Nakreslete pravděpodobnost, že padne dané číslo při hodu kostkou

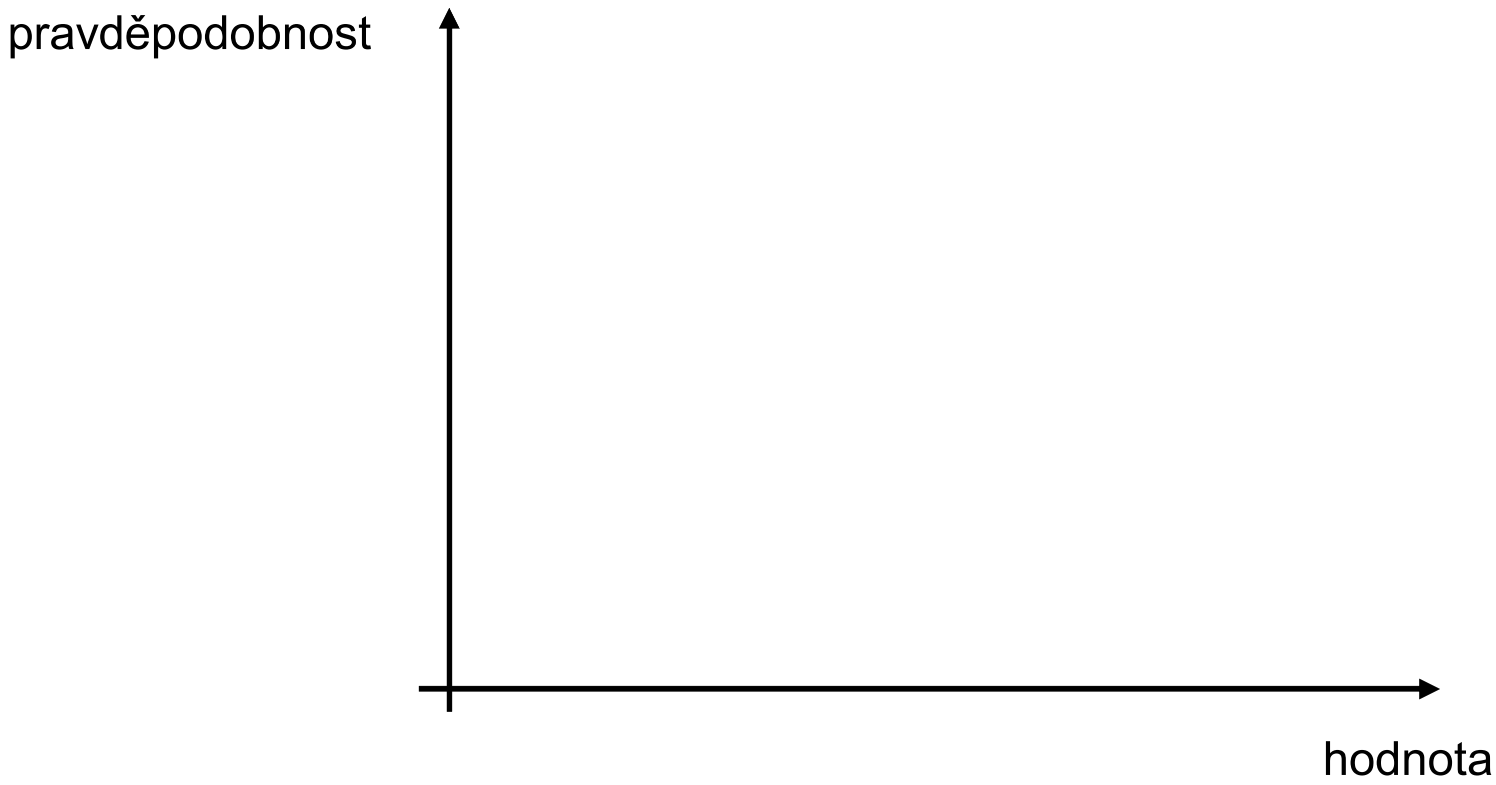


Nakreslete pravděpodobnost, že padne daná strana při hodu mincí



Z údajů roku 1999 nakreslete odhad pravděpodobnosti narození daného pohlaví.

(V roce 1999 se v ČR narodilo 43 642 děvčat a 45 829 chlapců).



Doposud jsme se věnovali **diskrétní** náhodné proměnné. To je taková proměnná, která nabývá jen určitých hodnot.

(Př.: výsledek hodu kostkou, posloupnost čísel při tahu sportky apod.)

Fyzikální veličiny však obvykle mohou nabývat libovolné hodnoty. Náhodná proměnná spojená s takovou fyzikální veličinou bude tzv. **spojitá**.

Toto je však pouze teorie

Ve skutečnosti je každá měřená hodnota diskrétní – diskretizaci provádí měřící přístroj.

Tento digitální voltmetr naměří hodnoty 1,295, 1,296 nebo 1,297 ale nic mezi tím.

Přesto, že ve skutečnosti se se spojitými náhodnými proměnnými při měření v praxi nesetkáme, používají se spojitá rozdělení častěji

– lépe se s nimi počítá s využitím aparátu matematické analýzy.

Formalismus popisu náhodných proměnných je odlišný.

Jaká je pravděpodobnost, že naměříme hodnotu frekvence elektromagnetického záření 2,128574443445098853567899653GHz?

Přesně!

Pravděpodobnost naměření určité konkrétní hodnoty spojité náhodné proměnné nemá smysl, Je vždy rovna nule.

Smysl má pouze pravděpodobnost naměření hodnoty v určitém intervalu

Definujeme tzv. hustotu pravděpodobnosti

$$p(x) = \frac{dP}{dx}$$

Analogie

hustota (hmotnosti)

$$\rho = \frac{m}{V}$$

průměrná hustota „kusu“ látky o hmotnosti *m* a objemu *V*

Pokud se hustota tělesa mění místo od místa, má smysl definovat „lokální“ hustotu:

$$\rho = \frac{dm}{dV}$$

Hustota v bodě, hmotnost nekonečně malého kousku děleno objemem tohoto kousku.

Známe-li střední hustotu, můžeme hmotnost tělesa spočítat takto:

$$m = V\rho$$

Známe-li lokální hustotu, hmotnost tělesa se spočítá takto:

$$m = \int_V \rho \cdot dV$$

Napište vztah pro výpočet pravděpodobnosti naměření hodnoty *x* z intervalu (x_1, x_2) ze známé hustoty pravděpodobnosti *p(x)*.

Pravděpodobnosti naměření hodnoty *x* z intervalu (*x1, x2*) se spočítá jako:

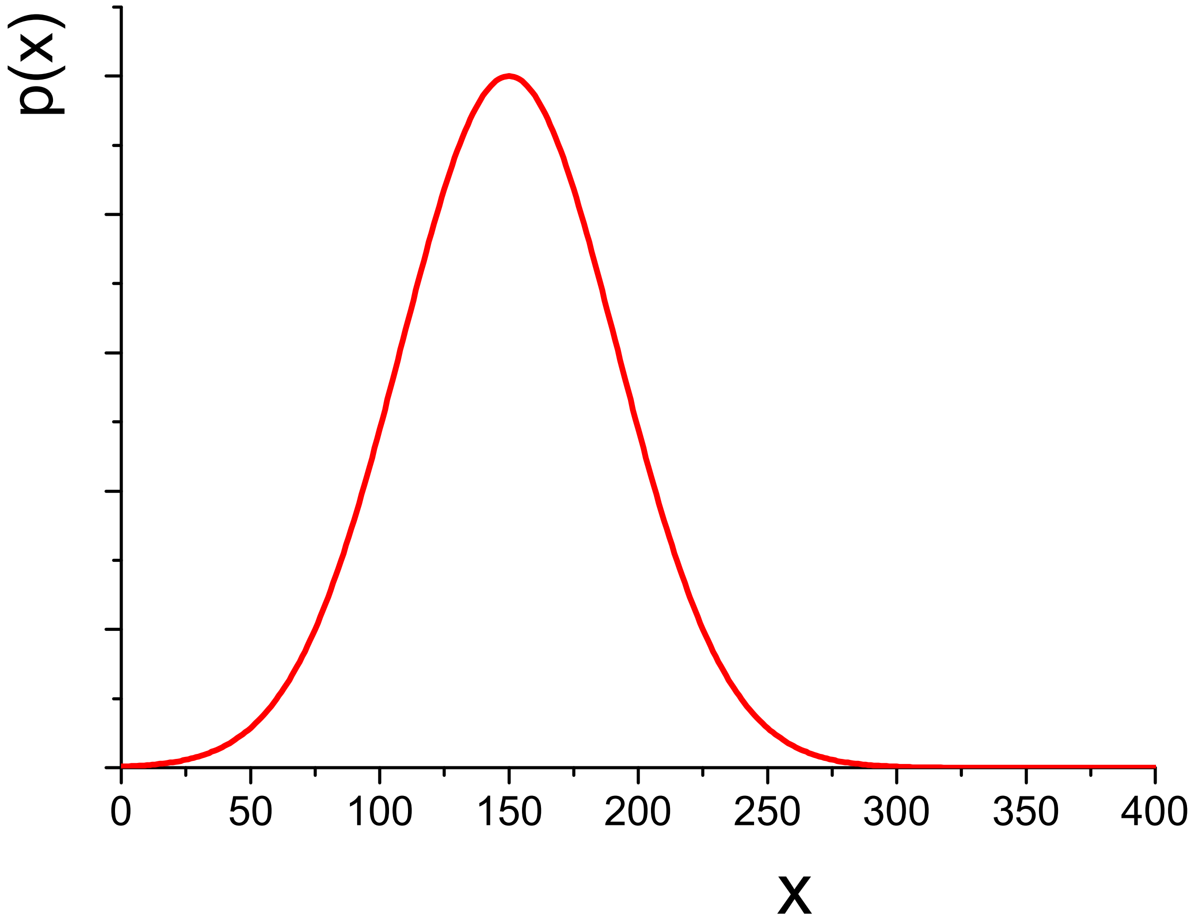
$$P(x_1, x_2) = \int_{x_1}^{x_2} p(x)\, dx$$

Čemu je roven výraz:

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\, dx = ?$$

Seřaďte podle velikosti od nejmenšího po největší

1) pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu (50,100)
2) pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu (100,150)
3) pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu (250,300)



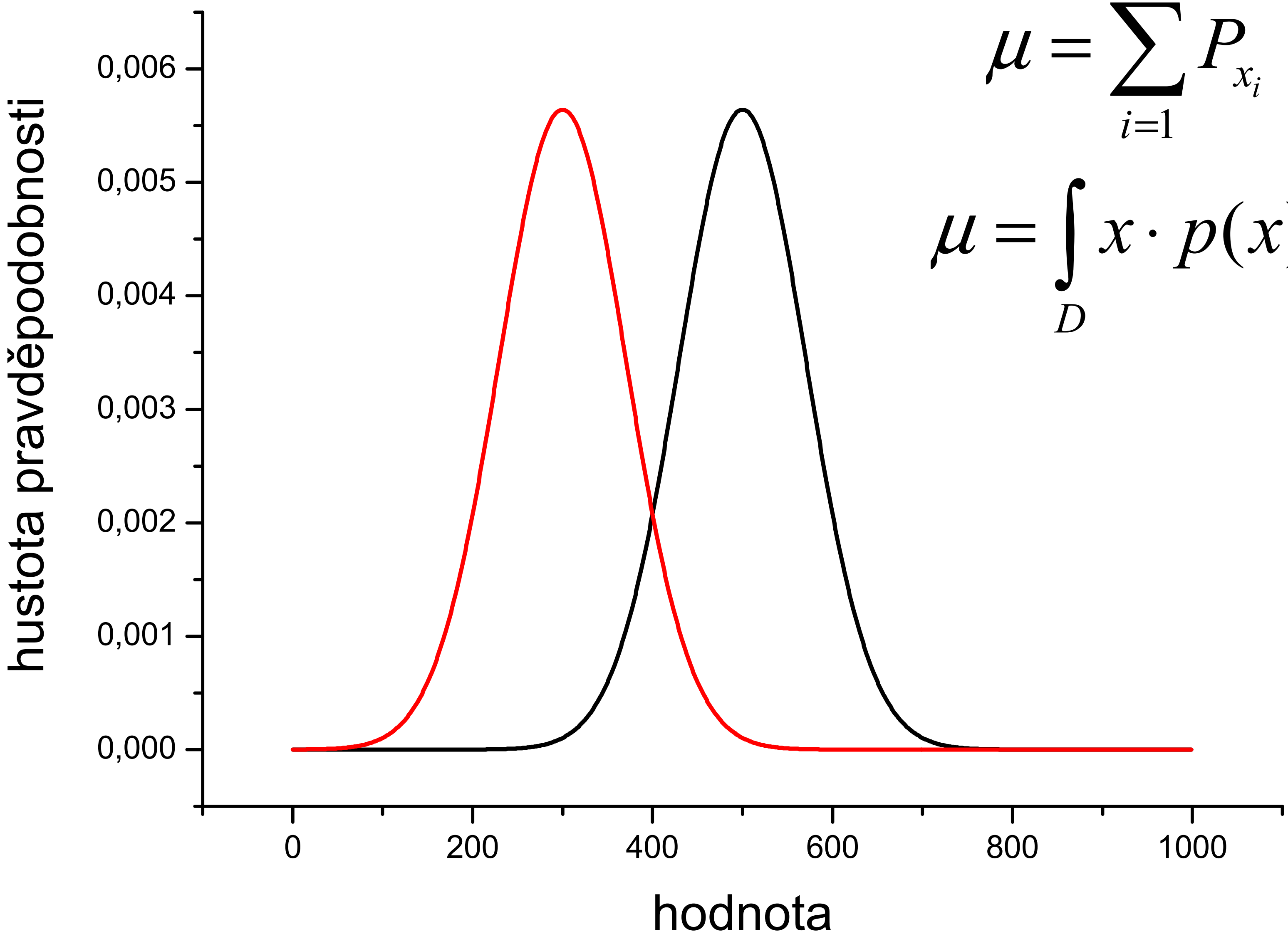
Základními parametry rozdělení jsou:

	diskrétní rozdělení	spojité rozdělení
střední hodnota	$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot x_i$$	$$\mu = \int_D x \cdot p(x)\, dx$$
	n – počet všech možností	*D* – definiční obor
rozptyl (disperze)	$$D = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot (x_i - \mu)^2$$	$$D = \int_D (x-\mu)^2 \cdot p(x)\, dx$$

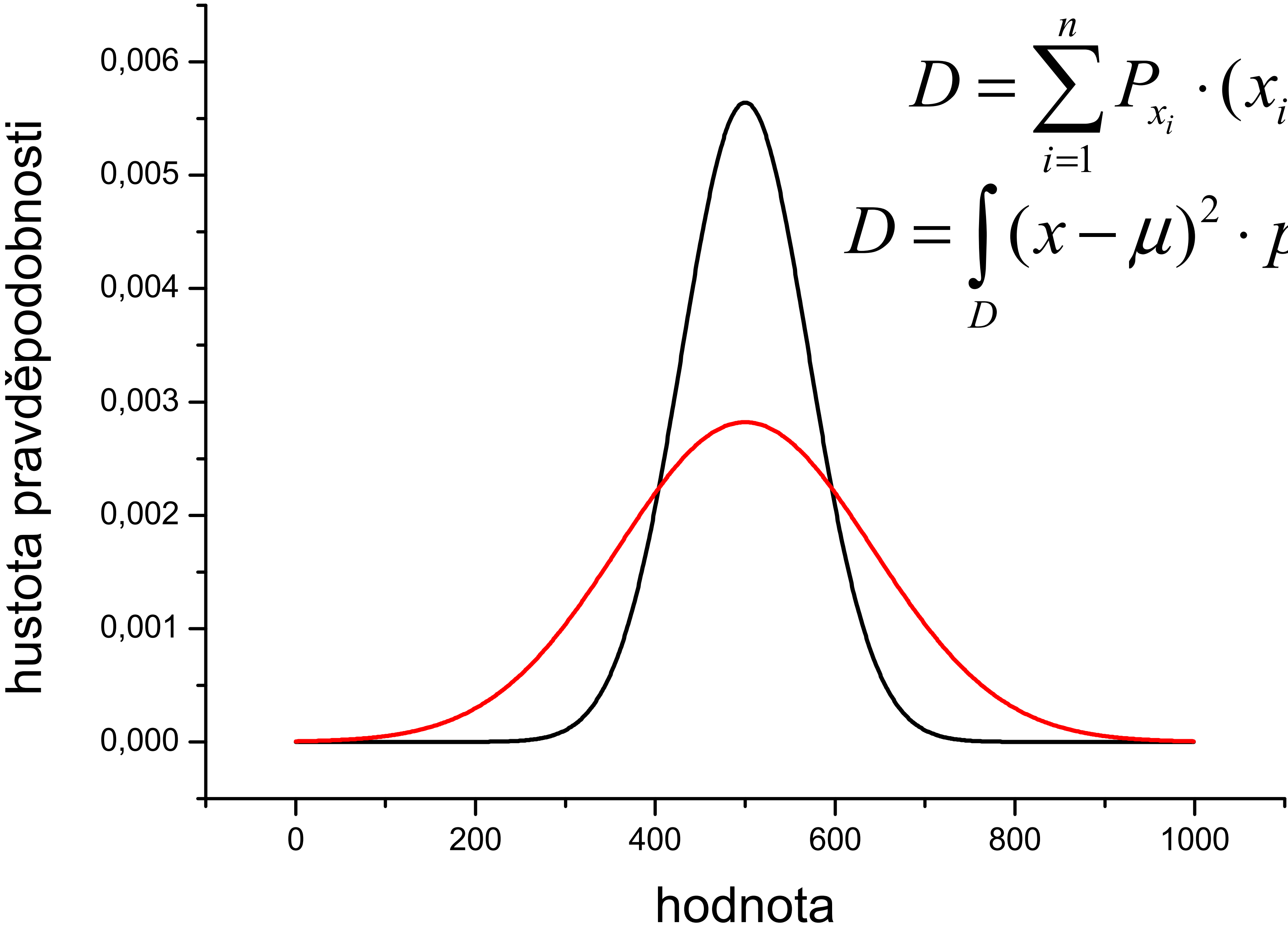
Které rozdělení má větší střední hodnotu (černé nebo červené)?

$$\mu = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot x_i$$

$$\mu = \int_D x \cdot p(x)\, dx$$



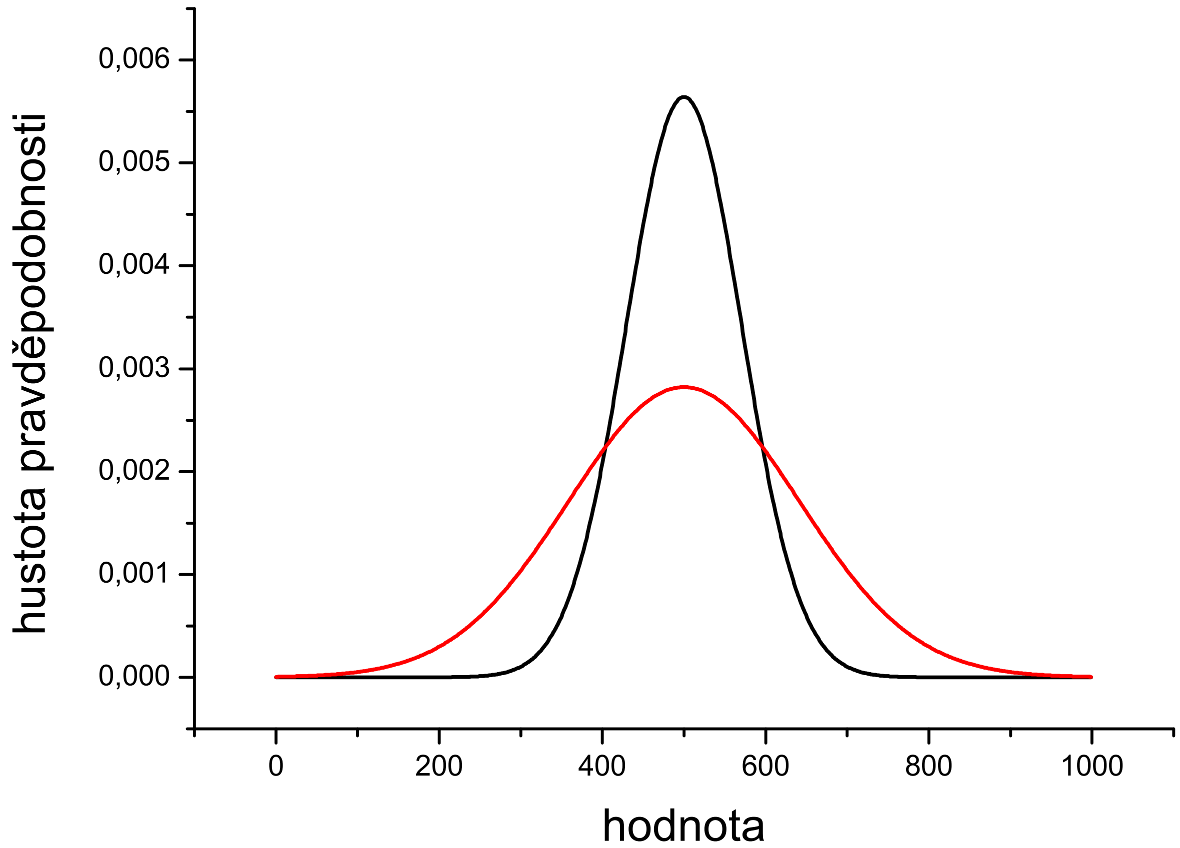
Které rozdělení má větší disperzi (černé nebo červené)?



$$D = \sum_{i=1}^{n} P_{x_i} \cdot (x_i - \mu)^2$$

$$D = \int_D (x-\mu)^2 \cdot p(x)\, dx$$

Proč je červené rozdělení nižší než černé?



Střední hodnota určuje polohu rozdělení na ose x a disperze jeho šířku.

Disperze však nemůže být přímo jakkoliv definovanou šířkou – nemá vhodnou jednotku. Proto definujeme tzv. **směrodatnou odchylku** σ vztahem:

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Nakreslete dvě rozdělení spojité náhodné proměnné:

Rozdělení A má větší střední hodnotu a menší směrodatnou odchylku než rozdělení B.

Normální (Gaussovo) rozdělení

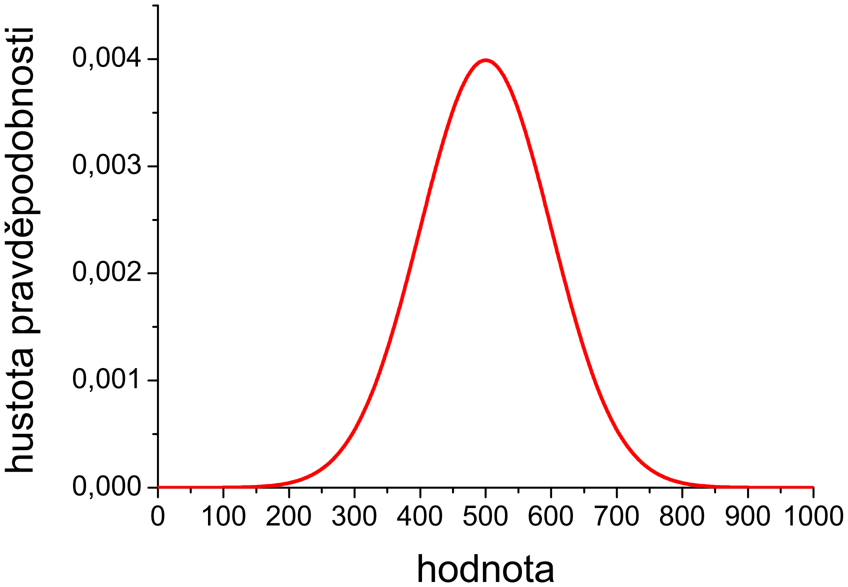
$$p(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

střední hodnota: μ

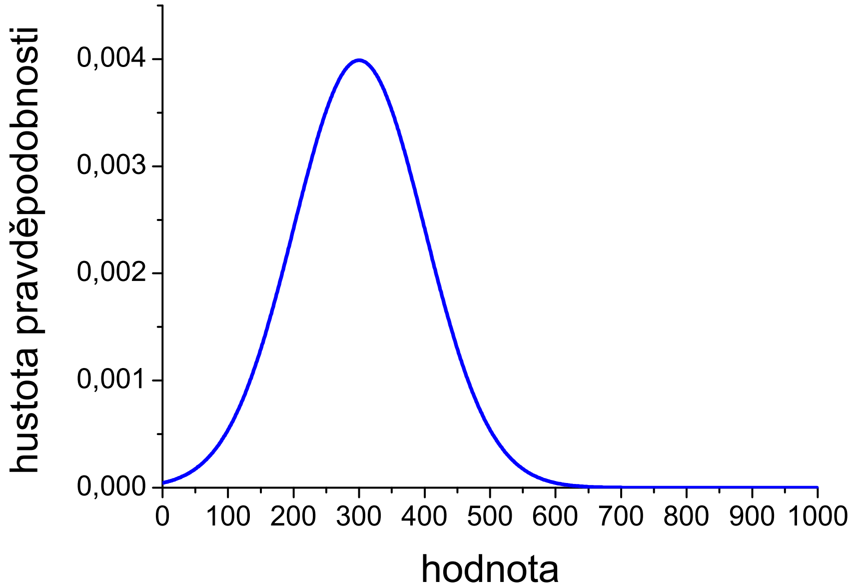
disperze: $D=\sigma^2$

veličina σ je **směrodatná odchylka**

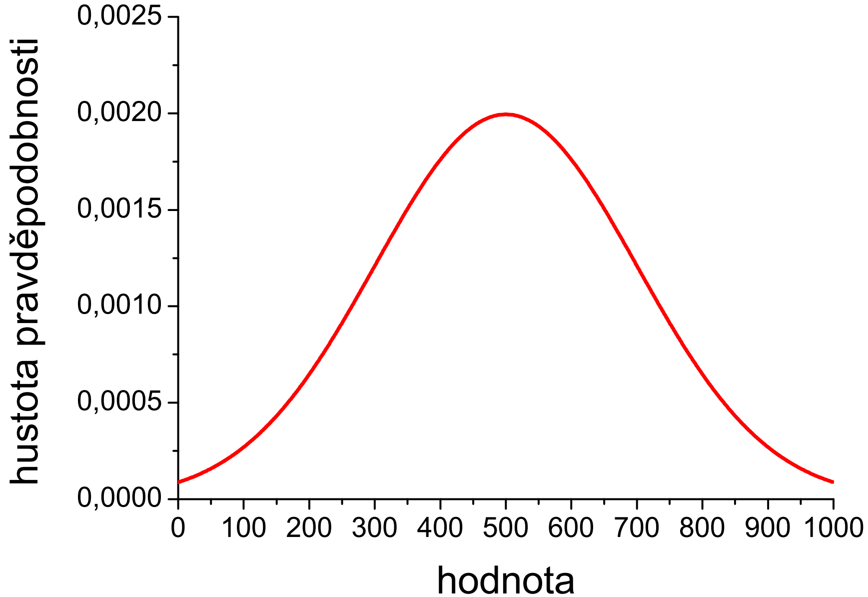
$\mu = 500 \qquad \sigma = 100$



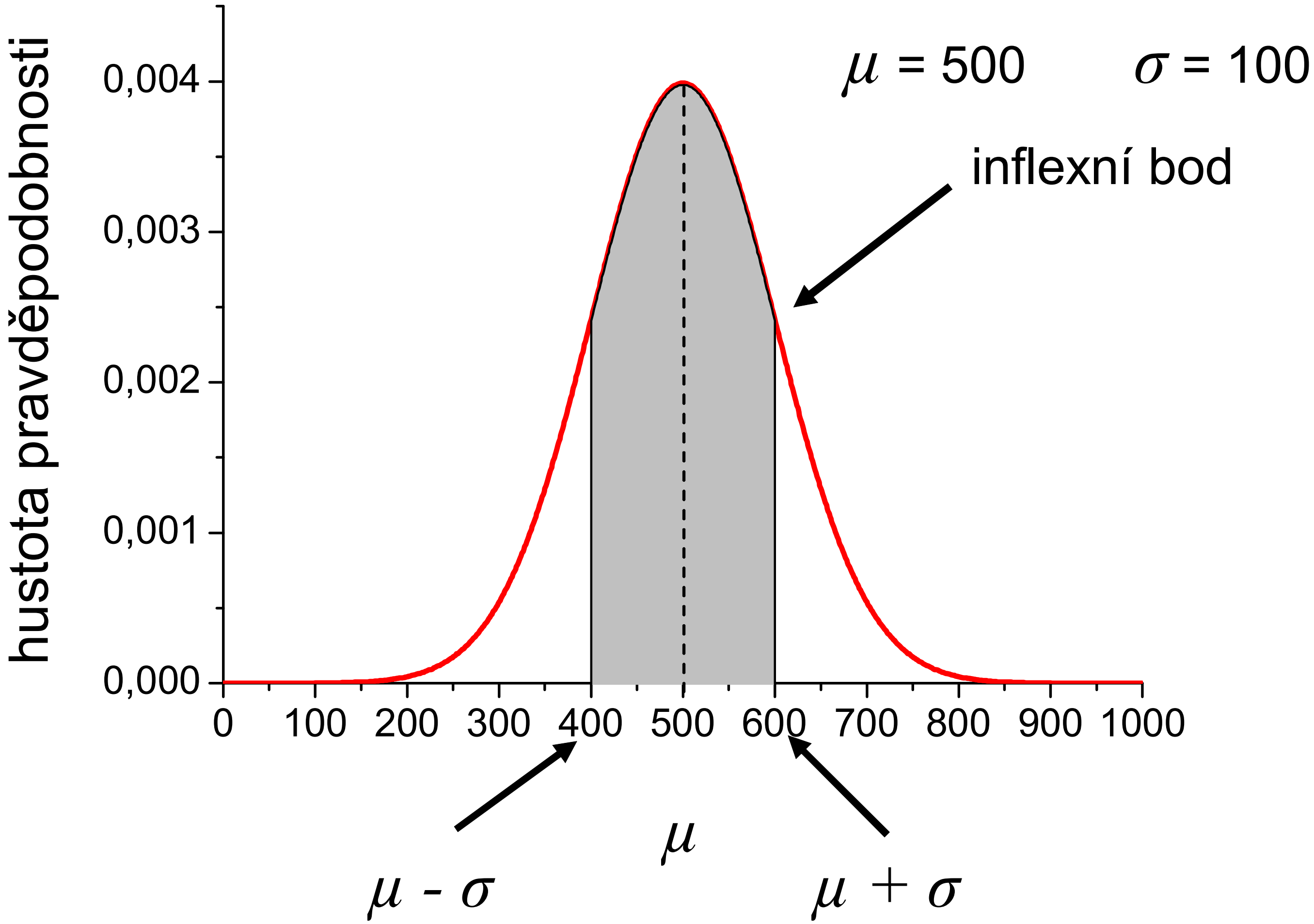
$\mu = 300 \qquad \sigma = 100$



$\mu = 500 \qquad \sigma = 200$



Nakreslete přibližně Gaussovo rozdělení se střední hodnotou 54 a směrodatnou odchylkou 10.

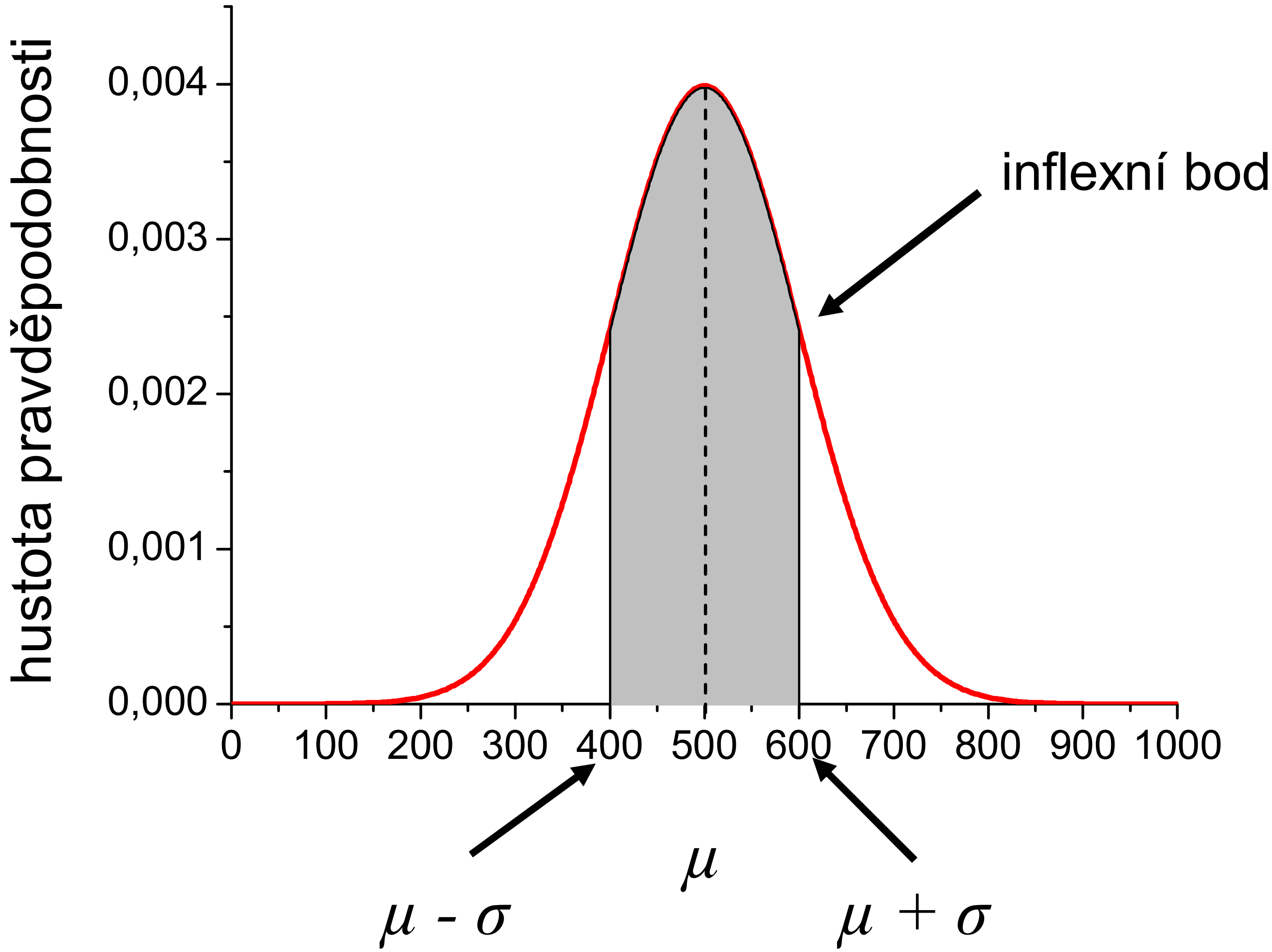


$$\int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} p(x)\, dx = \int_{\mu-\sigma}^{\mu+\sigma} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = 0{,}68$$

Měříme-li veličinu, která se řídí normálním rozdělením se střední hodnotou μ a směrodatnou odchylkou σ, je pravděpodobnost toho, že při dalším měření naměříme hodnotu z intervalu $(\mu - \sigma, \mu + \sigma)$ rovna 68%.

Jaká je pravděpodobnost, že při dalším měření naměříme hodnotu z intervalu $(\mu, \mu + \sigma)$?

Odhadněte, jaké je pravděpodobnost naměření hodnoty z intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$.



Definujeme tzv. **krajní chybu** vztahem:

$$\kappa = 3 \cdot \sigma$$

Pravděpodobnost naměření hodnoty v intervalu $(\mu - 3\sigma, \mu + 3\sigma)$ je rovna

$$99,7\%$$

krajní chyba = jistota

Měříme veličinu - náhodnou proměnnou – a chceme určit odhad její střední hodnoty a chyby, tedy výraz:

$$x = (\mathrm{hodnota} \pm \mathrm{chyba})\left[\mathrm{jednotky}\right]$$

$$x = (\overline{x} \pm s_x)$$

Opakujeme n – krát měření za stejných podmínek, odhad střední hodnoty získáme jako:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

aritmetický průměr

a odhad směrodatné odchylky (chyby) jako

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4

Vypočtěte odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky.

x= 3,4 imp/10s

s_x=0,55 imp/10s

Další modelová rozdělení

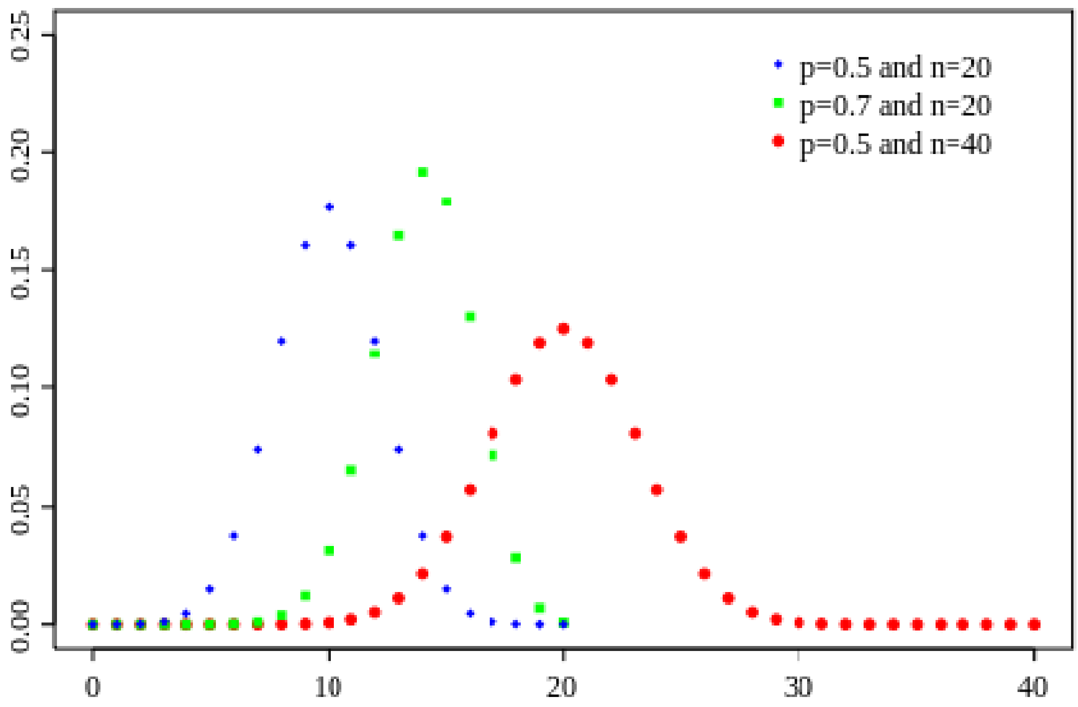
Binomické rozdělení

Nechť při jednom pokusu (měření) má daný jev (úspěch) pravděpodobnost p. Pak pravděpodobnost toho, že při n pokusech nastane r krát úspěch je dána binomickým rozdělením:

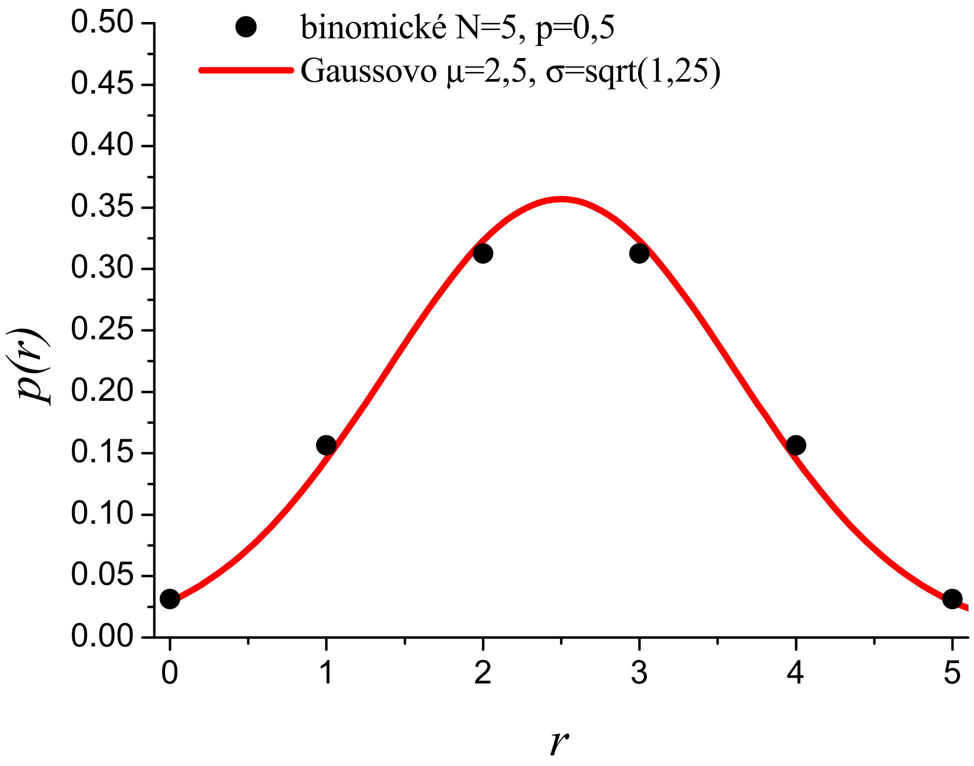
$$P_n(r) = \binom{n}{r} p^r (1-p)^{n-r}$$

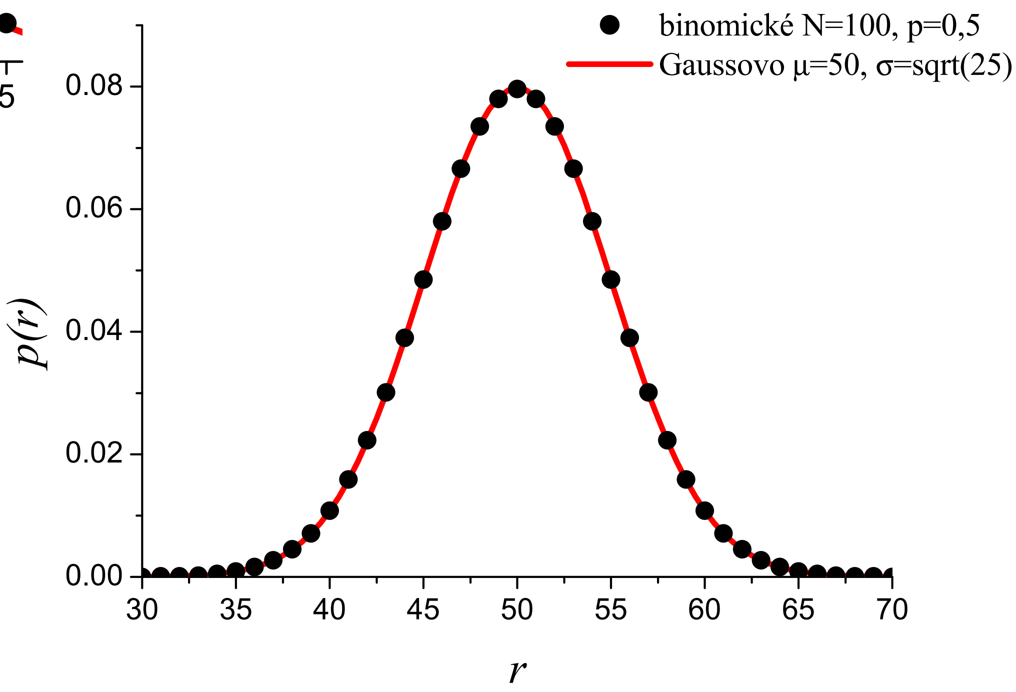
střední hodnota $\mu = np$

disperze $D = np(1-p)$



Pro velká n se binomické rozdělení blíží normálnímu (Gaussovu)





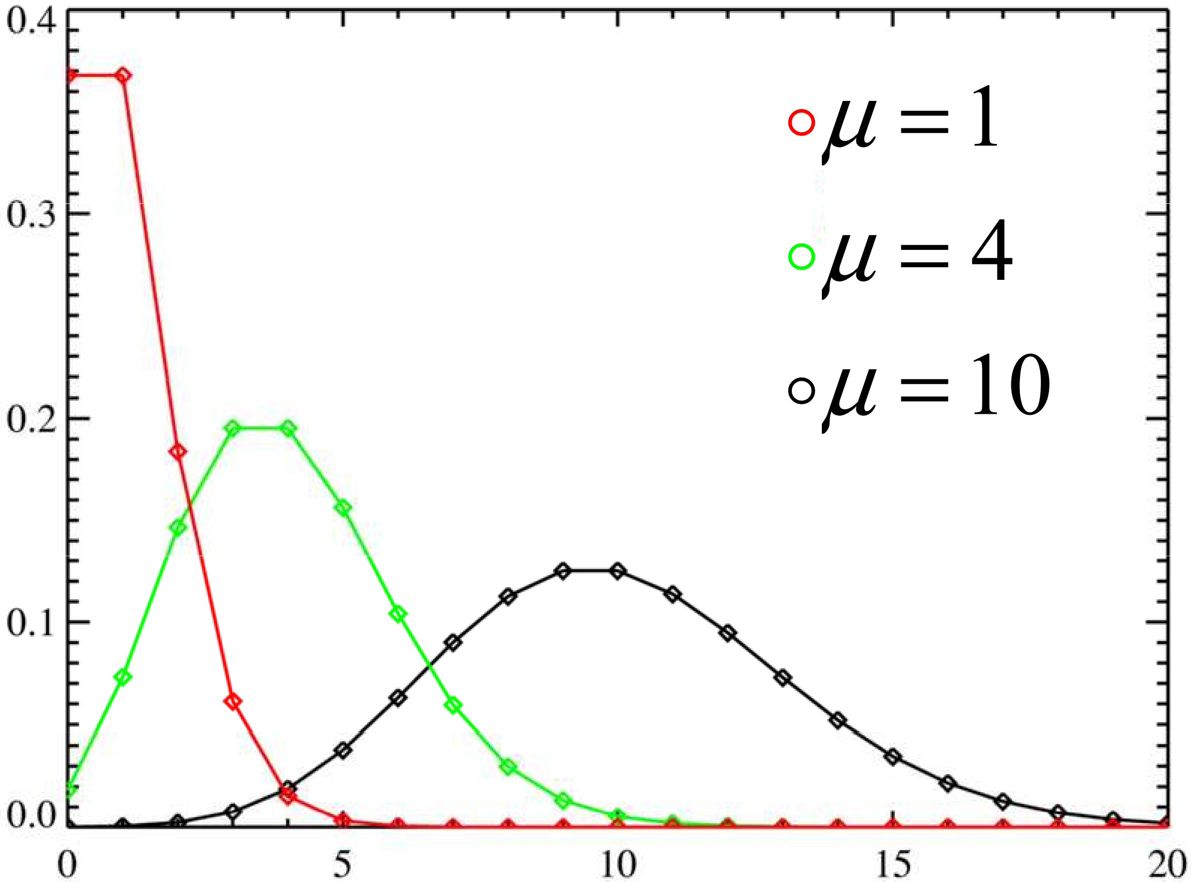
Poissonovo rozdělení

Nechť jistá náhodná událost nastává v časovém intervalu Δt se střední hodnotou μ. Pak pravděpodobnost, že v tomto časovém intervalu dojde k r událostem je dána Poissonovým rozdělením

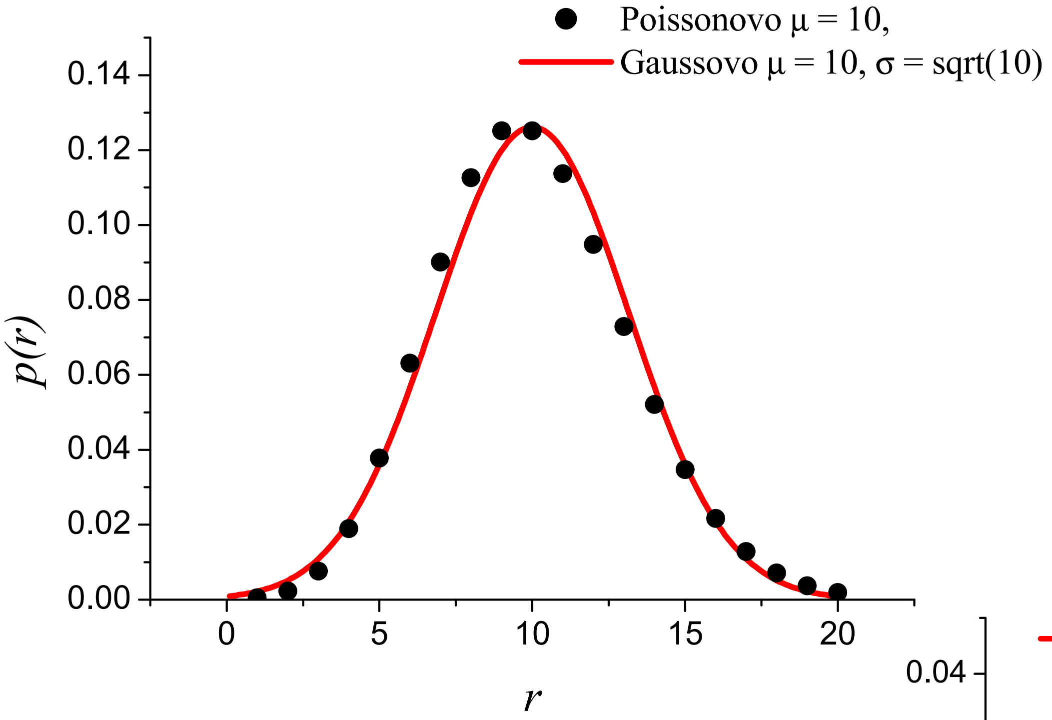
$$P_\mu(r) = \frac{\mu^r e^{-\mu}}{r!}$$

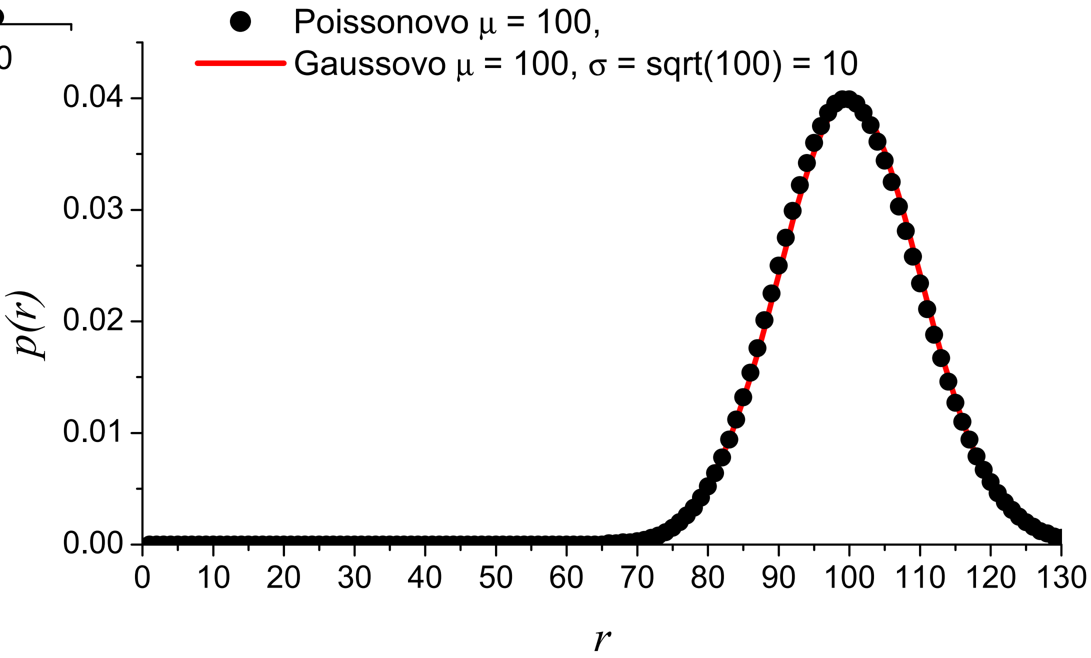
střední hodnota $\mu = \mu$

disperze $D = \mu$



Pro velká n se Poissonovo rozdělení blíží normálnímu (Gaussovu)





Chyba nepřímo měřených veličin

Nepřímo měřená veličina – nemáme „přístroj“ ale žádanou veličinu počítáme z jiných přímo měřených veličin.

Uveďte dva příklady přímo měřené a dva příklady nepřímo měřené veličiny.

Navrhněte dva experimenty, ve kterých by hustota kapaliny byla jednou přímo měřená a jednou nepřímo měřená veličina.

Mějme nepřímo měřenou veličinu y, která je funkcí přímo měřených veličin $p_1, p_2, \ldots\ldots, p_m$.

$$y = f(p_1, p_2, \ldots\ldots p_m)$$

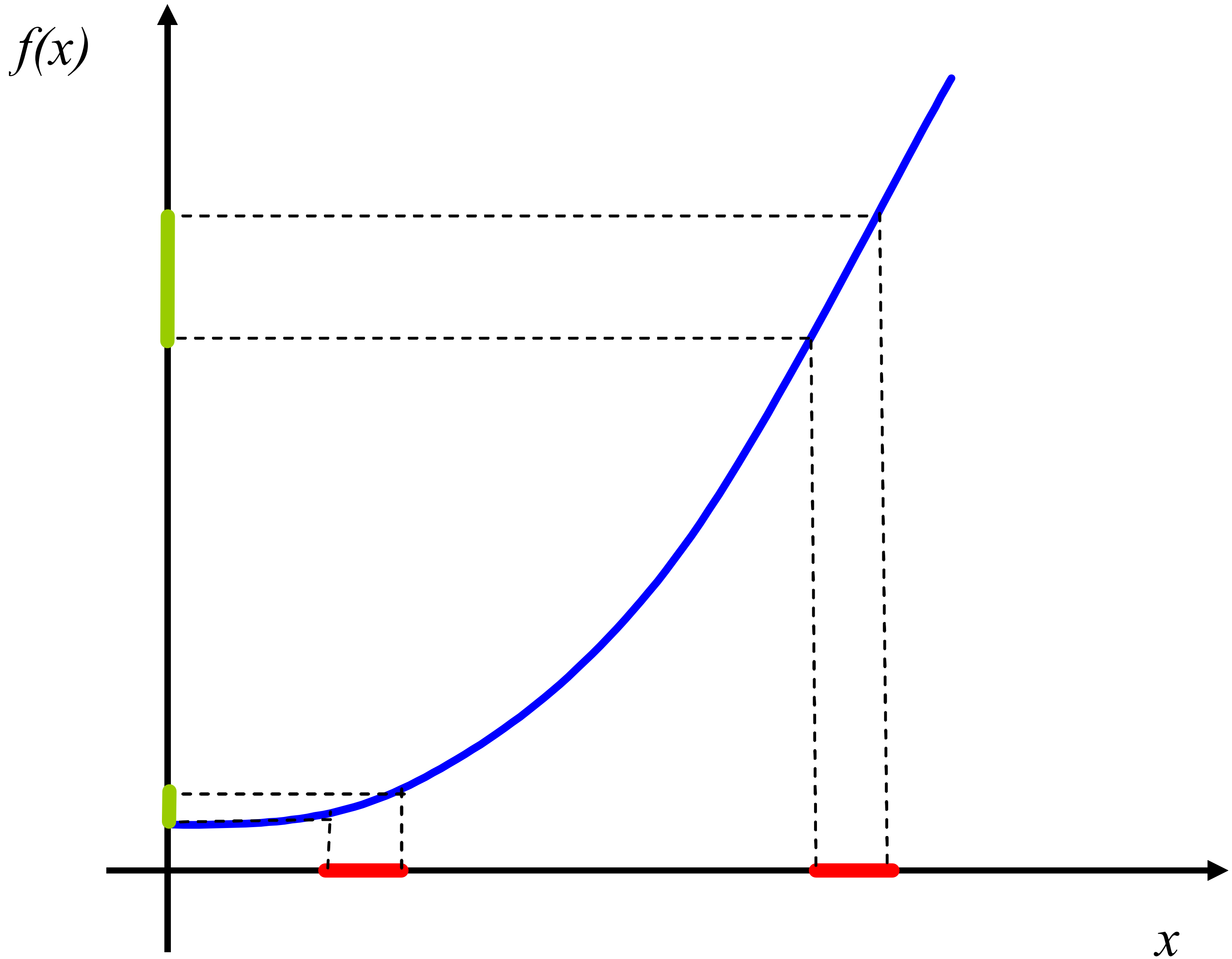
přičemž pro každou přímo měřenou veličinu jsme určili:

$$p_i = (\overline{p}_i \pm s_{p_i})$$

střední hodnotu a odchylku veličiny y určíme takto:

$$\overline{y} = f(\overline{p}_1, \overline{p}_2, \ldots\ldots, \overline{p}_m)$$

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial p_1}\right)^2 s_{p_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_2}\right)^2 s_{p_2}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial p_m}\right)^2 s_{p_m}^2}$$



f(x)
x

Nepřímo měřená veličina y je rovna součtu dvou přímo měřených veličin

$$y = x_1 + x_2$$

Například měříme délku 4m místnosti ale máme k dispozici pouze 3m svinovací metr.

Najděte vztah pro odchylku veličiny y.

$$s_y = \sqrt{\left(\frac{\partial y}{\partial p_1}\right)^2 s_{p_1}^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial p_2}\right)^2 s_{p_2}^2 + \cdots\cdots + \left(\frac{\partial y}{\partial p_m}\right)^2 s_{p_m}^2}$$

Nepřímo měřená veličina y je rovna násobku přímo měřené veličiny

$$y = k \cdot x$$

Například obvod kružnice počítaný z průměru.

Najděte vztah pro odchylku veličiny y.

Najděte vztah pro relativní odchylku veličiny y.

Nepřímo měřená veličina y je rovna součinu dvou přímo měřených veličin

$$y = x_1 \cdot x_2$$

Například plocha obdélníkového pozemku.

Najděte vztah pro odchylku veličiny y.

Najděte vztah pro relativní odchylku veličiny y.

Nepřímo měřená veličina y je rovna podílu dvou přímo měřených veličin

$$y = \frac{x_1}{x_2}$$

Například průměrná rychlost jako podíl dráhy a času.

Najděte vztah pro odchylku veličiny y.

Najděte vztah pro relativní odchylku veličiny y.

Nepřímo měřená veličina y je rovna mocnině přímo měřené veličiny

$$y = x^n$$

Například plocha čtverce či objem krychle.

Najděte vztah pro odchylku veličiny y.

Najděte vztah pro relativní odchylku veličiny y.

Měříme hustotu materiálu, který máme k dispozici ve tvaru válce. Pro hustotu platí:

$$\rho = \frac{m}{V} = \frac{4m}{\pi d^2 v}$$

Najděte vztah pro absolutní i relativní odchylku veličiny ρ.

Vypočtěte odchylku aritmetického průměru

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

Připomeňme si:

Opakujeme n – krát měření za stejných podmínek, odhad střední hodnoty získáme jako:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

aritmetický průměr

a odhad směrodatné odchylky jako

$$s_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n-1}}$$

Směrodatná odchylka popisuje šířku rozdělení

Udává interval, ve kterém je 68% pravděpodobnost, že příští naměřená hodnota bude ležet v tomto intervalu.

Obvykle, pokud napíšeme výraz:

$$x = (\overline{x} \pm s_x)$$

veličinou s_x myslíme odchylku aritmetického průměru, spíše bychom tedy měli psát:

$$x = (\overline{x} \pm s_{\overline{x}})$$

Tedy pro určení intervalu

$$x = (\overline{x} \pm s_{\overline{x}})$$

Počítáme veličiny takto:

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$$

Při měření intenzity pozadí ionizujícího záření byly naměřeny následující hodnoty:

číslo měření	intenzita (imp/10s)
1	3
2	4
3	3
4	3
5	4

Vypočtěte odhad střední hodnoty a směrodatné odchylky aritmetického průměru.

x= 3,4 imp/10s

s_x=0,24 imp/10s

Pokud jsme za stejných podmínek opakovali **velký počet měření**, udává interval

$$x = (\overline{x} \pm s_{\overline{x}})$$

68% pravděpodobnost, že správná hodnota leží uvnitř tohoto intervalu

a interval

$$x = (\overline{x} \pm \kappa_{\overline{x}}) = (\overline{x} \pm 3 \cdot s_{\overline{x}})$$

dává „jistotu“

Pokud měření opakujeme jen malým počtem pokusů, které statisticky vyhodnotíme, je pravděpodobnost, že správná hodnota leží v intervalu

$$x = (\overline{x} \pm s_{\overline{x}})$$

a) větší než 68%

b) menší než 68%

c) rovna 68%

Intervaly spolehlivosti

Existuje způsob, jak zkonstruovat interval, který by při zadaném počtu statisticky vyhodnocených měření poskytnul požadovanou spolehlivost, tj. pravděpodobnost s jakou správná hodnota leží uvnitř vymezeného intervalu.

Interval vytvoříme z hodnot $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ a $s_{\overline{x}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n(n-1)}}$

rozšířením či zúžením intervalu $x = (\overline{x} \pm s_{\overline{x}})$

vhodným koeficientem $t_{\nu,p}$

kde *v* je tzv. počet stupňů volnosti: *v* = *n – 1* a *p* je pravděpodobnost.

Studentovy koeficienty

počet stupňů volnosti $n = N - 1$, kde N je počet měření

n	hladina spolehlivosti				
	0,5000	0,6827	0,9000	0,9545	0,9973
1	1,000	1,837	6,314	13,96	235,8
2	0,817	1,321	2,920	4,526	19,21
3	0,765	1,197	2,353	3,307	9,219
4	0,741	1,141	2,132	2,869	6,620
5	0,727	1,110	2,015	2,649	5,507
6	0,718	1,091	1,943	2,516	4,904
7	0,711	1,077	1,895	2,429	4,530
8	0,706	1,067	1,860	2,366	4,277
9	0,703	1,059	1,833	2,320	4,094
10	0,700	1,053	1,812	2,284	3,957
11	0,697	1,048	1,796	2,255	3,850
12	0,695	1,043	1,782	2,231	3,764
13	0,693	1,040	1,771	2,212	3,694
14	0,692	1,037	1,761	2,195	3,636
15	0,691	1,034	1,753	2,182	3,586
16	0,690	1,032	1,746	2,169	3,544
17	0,689	1,030	1,740	2,158	3,508
18	0,688	1,028	1,734	2,149	3,475
19	0,688	1,027	1,729	2,141	3,447
20	0,687	1,026	1,725	2,133	3,422
25	0,684	1,021	1,708	2,105	3,329
30	0,683	1,017	1,697	2,087	3,270
40	0,681	1,013	1,684	2,064	3,199
50	0,679	1,010	1,676	2,051	3,157
70	0,678	1,007	1,667	2,036	3,111
100	0,677	1,005	1,660	2,025	3,077
200	0,676	1,003	1,653	2,013	3,040
∞	0,675	1,000	1,645	2,000	3,000

$$x = (\bar{x} \pm t_{\nu,p} \cdot s_{\bar{x}})$$

tzv. Studentovy koeficienty

Z pěti naměřených hodnot byly statistickým zpracováním získány následující údaje:

$$x = (11{,}2 \pm 0{,}7)$$

Určete interval spolehlivosti odpovídající pravděpodobnosti 68%

Studentovy koeficienty

počet stupňů volnosti $n = N - 1$, kde N je počet měření

n	hladina spolehlivosti				
	0,5000	0,6827	0,9000	0,9545	0,9973
1	1,000	1,837	6,314	13,96	235,8
2	0,817	1,321	2,920	4,526	19,21
3	0,765	1,197	2,353	3,307	9,219
4	0,741	1,141	2,132	2,869	6,620
5	0,727	1,110	2,015	2,649	5,507
6	0,718	1,091	1,943	2,516	4,904
7	0,711	1,077	1,895	2,429	4,530
8	0,706	1,067	1,860	2,366	4,277
9	0,703	1,059	1,833	2,320	4,094
10	0,700	1,053	1,812	2,284	3,957
11	0,697	1,048	1,796	2,255	3,850
12	0,695	1,043	1,782	2,231	3,764
13	0,693	1,040	1,771	2,212	3,694
14	0,692	1,037	1,761	2,195	3,636
15	0,691	1,034	1,753	2,182	3,586
16	0,690	1,032	1,746	2,169	3,544
17	0,689	1,030	1,740	2,158	3,508
18	0,688	1,028	1,734	2,149	3,475
19	0,688	1,027	1,729	2,141	3,447
20	0,687	1,026	1,725	2,133	3,422
25	0,684	1,021	1,708	2,105	3,329
30	0,683	1,017	1,697	2,087	3,270
40	0,681	1,013	1,684	2,064	3,199
50	0,679	1,010	1,676	2,051	3,157
70	0,678	1,007	1,667	2,036	3,111
100	0,677	1,005	1,660	2,025	3,077
200	0,676	1,003	1,653	2,013	3,040
∞	0,675	1,000	1,645	2,000	3,000

Ocelovým pásmem měříme rozměry učebny s následujícími výsledky:

$$a = (523 \pm 3)\mathrm{cm}$$

$$b = (675 \pm 4)\mathrm{cm}$$

Určete střední hodnotu plochy místnosti a její směrodatnou odchylku.

$$S = (35{,}4 \pm 0{,}3)\mathrm{m}^2$$

Měření tíhového zrychlení z doby kmity matematického kyvadla

Napište vztah pro dobu kmitu matematického kyvadla, jaké veličiny musíme přímo měřit? Ze vztahu vyjádřete tíhové zrychlení.

Odvoďte vztah pro odchylku tíhového zrychlení.

Vyhodnoťte měření doby kmitu

číslo měření	T (s)
1	1,42
2	1,40
3	1,39
4	1,43
5	1,41

Vyhodnoťte měření délky kyvadla

číslo měření	l (cm)
1	50,2
2	50,4
3	49,8
4	49,9
5	50,1

Určete střední hodnotu a odchylku (aritmetického průměru) tíhového zrychlení. S využitím Studentových koeficientů sestavte intervaly spolehlivosti 68% a 99,7%.

Struktura protokolu

Hlavička

Teorie:

Stručné shrnutí teoretického popisu měřeného jevu, veličiny. Základní vztahy, popis experimentálního uspořádání.

Výsledky měření:

Tabulky naměřených hodnot (při ručním měření), případně grafy závislostí (při automatizovaném měření)

Zpracování měření:

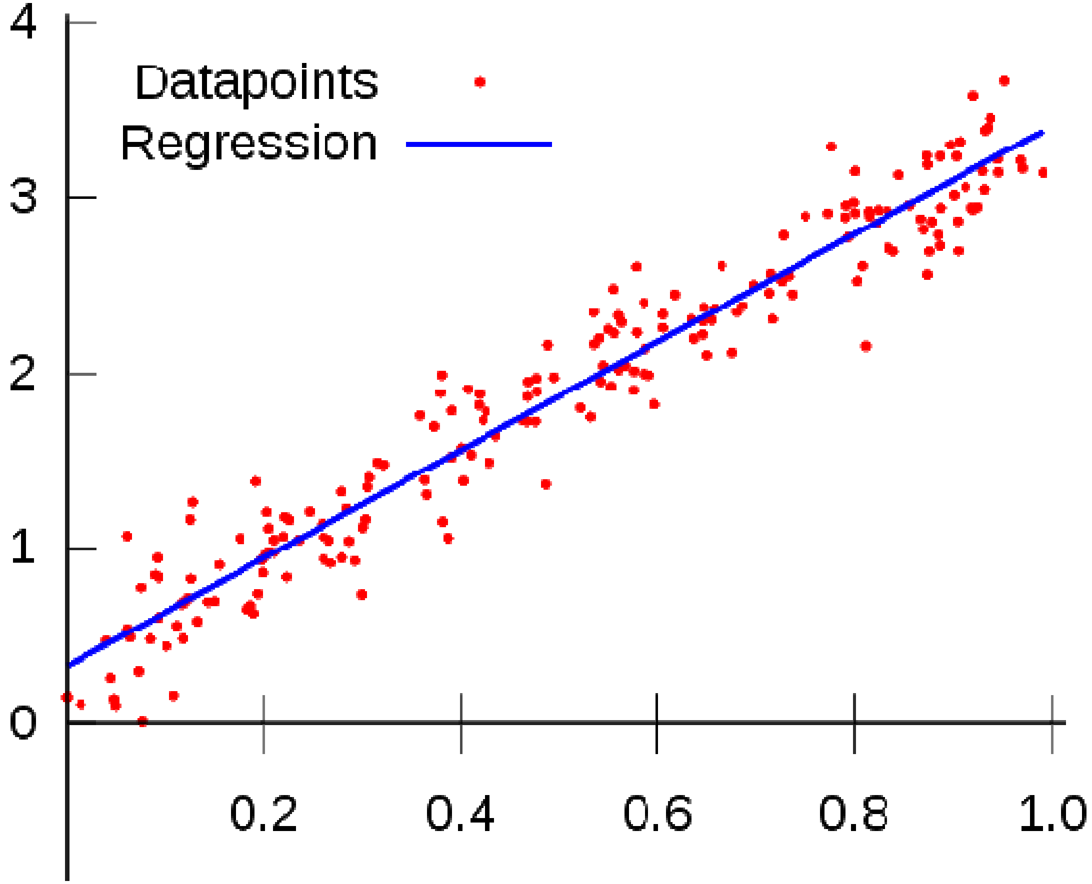
Výpočty středních hodnot, chyb, numerické zpracování měření.

Závěr:

Komentář výsledků, srovnání se známou či očekávanou hodnotou, diskuse možných systematických chyb.

Numerická regrese (fitování)

Numerické metody, při kterých hledáme funkci co nejlépe vystihující (typicky experimentálně studovanou) závislost.



Krok č. 1 volba vhodné funkce

• funkční závislost je známa z teorie jevu

např. závislost intenzity prošlého záření na tloušťce materiálu

$$I = I_o e^{-\mu d}$$

• využijeme nabídku „univerzálních funkcí“

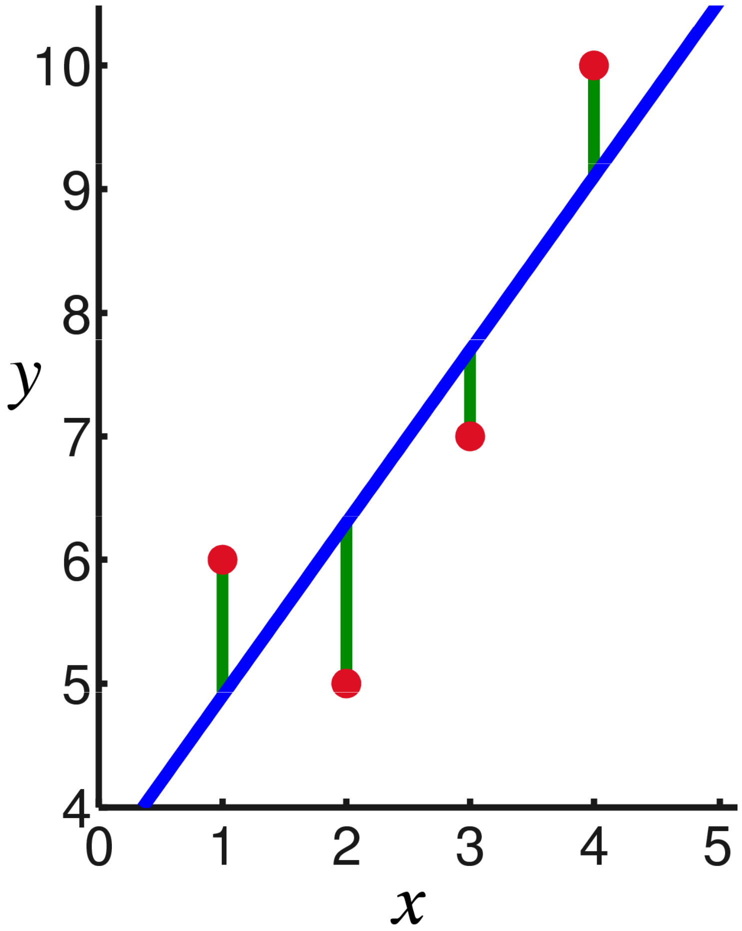
polynomy

$$y = a_o + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + ...$$

Taylorův rozvoj

Krok č. 2 vlastní proložení

Metoda nejmenších čtverců



Minimalizace výrazu

$$s = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i) \right]^2 = \text{minimum}$$

s – součet čtverců

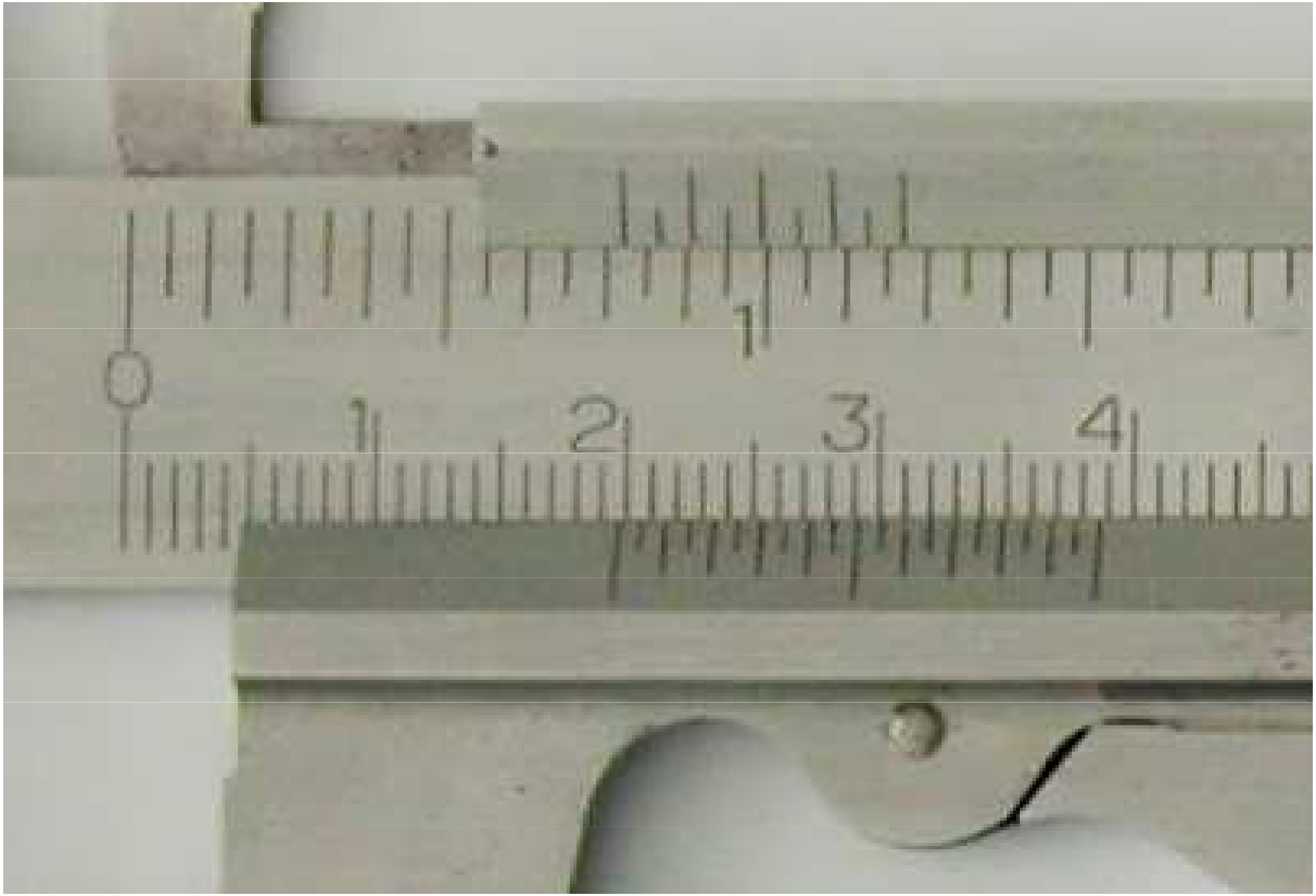
Metody měření vybraných fyzikálních veličin

Měření vzdálenosti

Posuvné měřítko

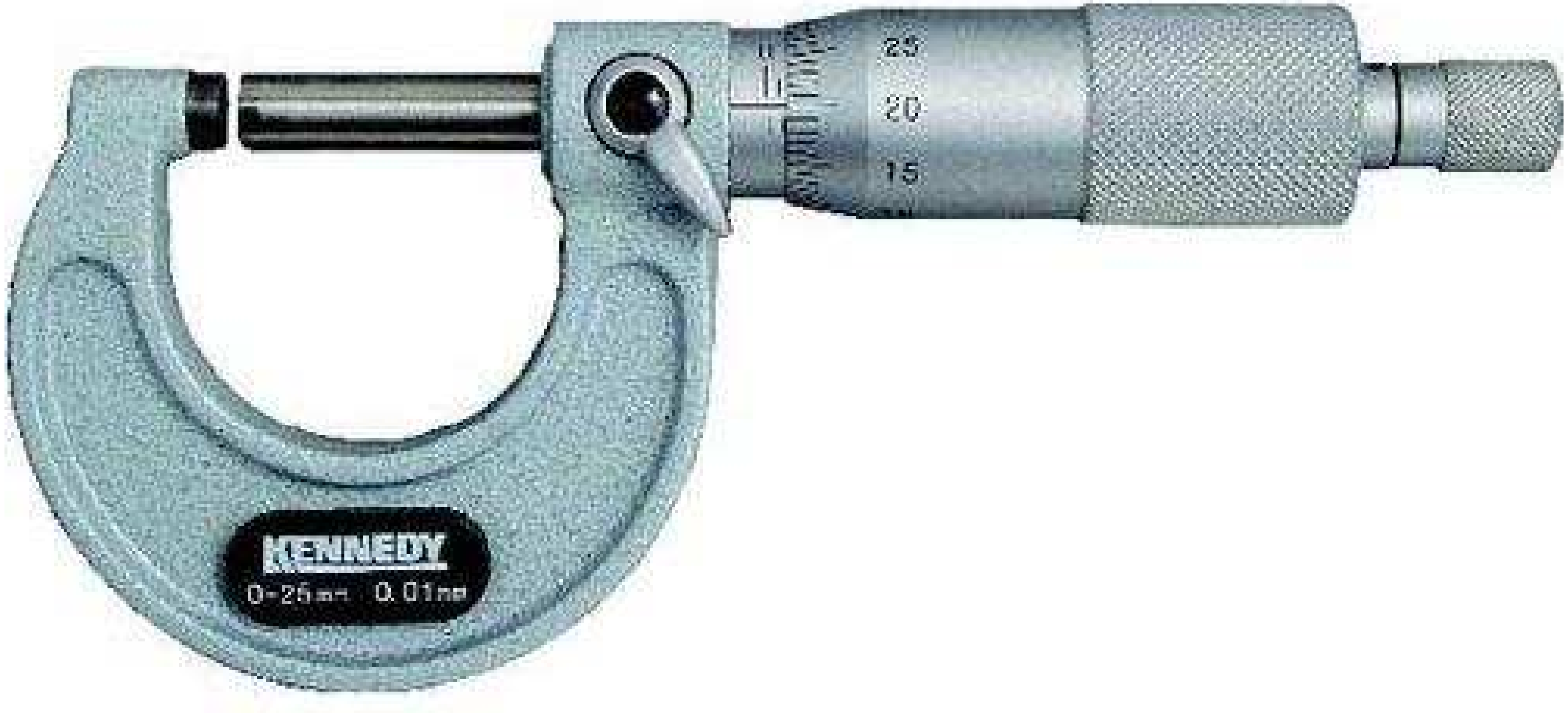
posuvka

Jaký údaj je na posuvném měřítku?




0.02mm
0 1 2 3 4 5 6 7
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 0

mikrometr



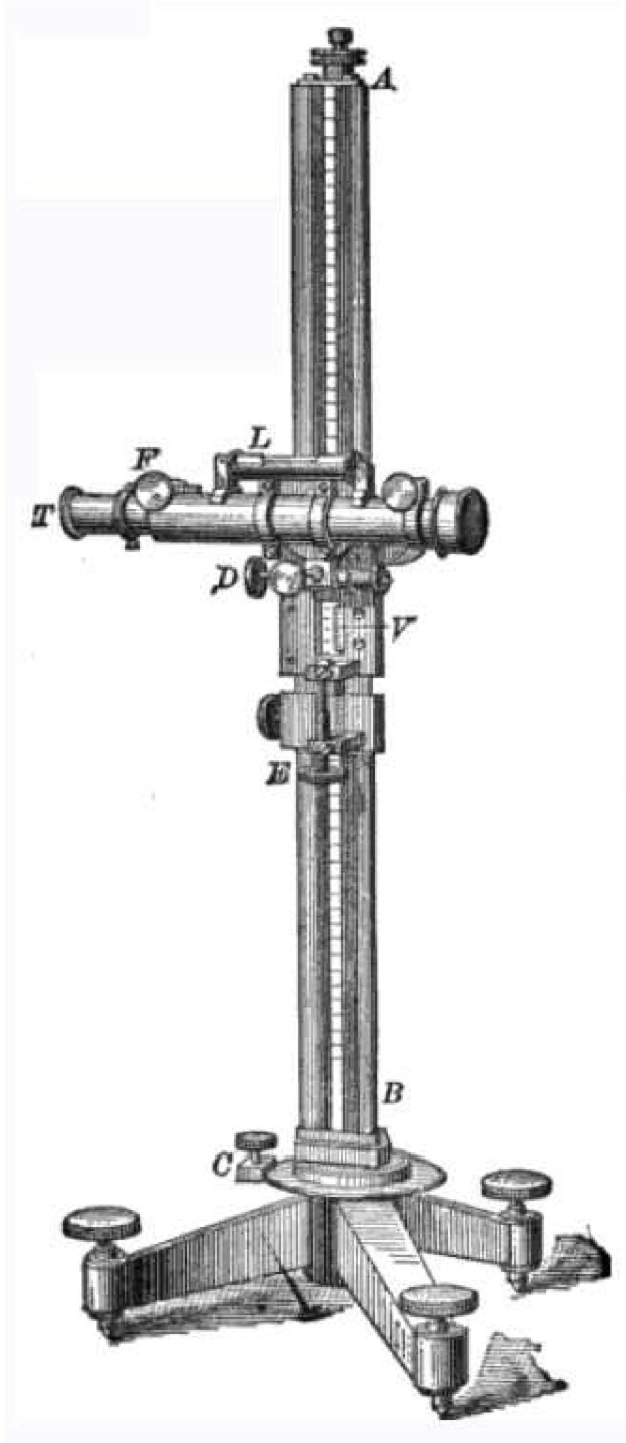
Jaký údaj ukazuje mikrometr?

Jaký údaj ukazuje mikrometr?

Indikátorové hodinky (úchylkoměr)

Jaký údaj ukazuje úchylkoměr?

Katetometr



Ultrazvukový dálkoměr

Laserový dálkoměr

Měření času

Periodické děje

Kmity kyvadla

matematické kyvadlo

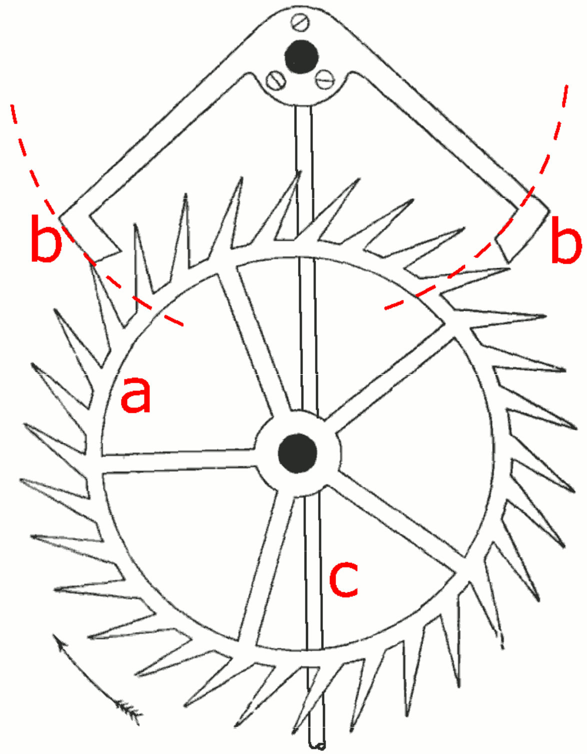
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

fyzické kyvadlo

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mga}}$$

V harmonické aproximaci

V této aproximaci doba kmitu nezávisí na amplitudě výchylky

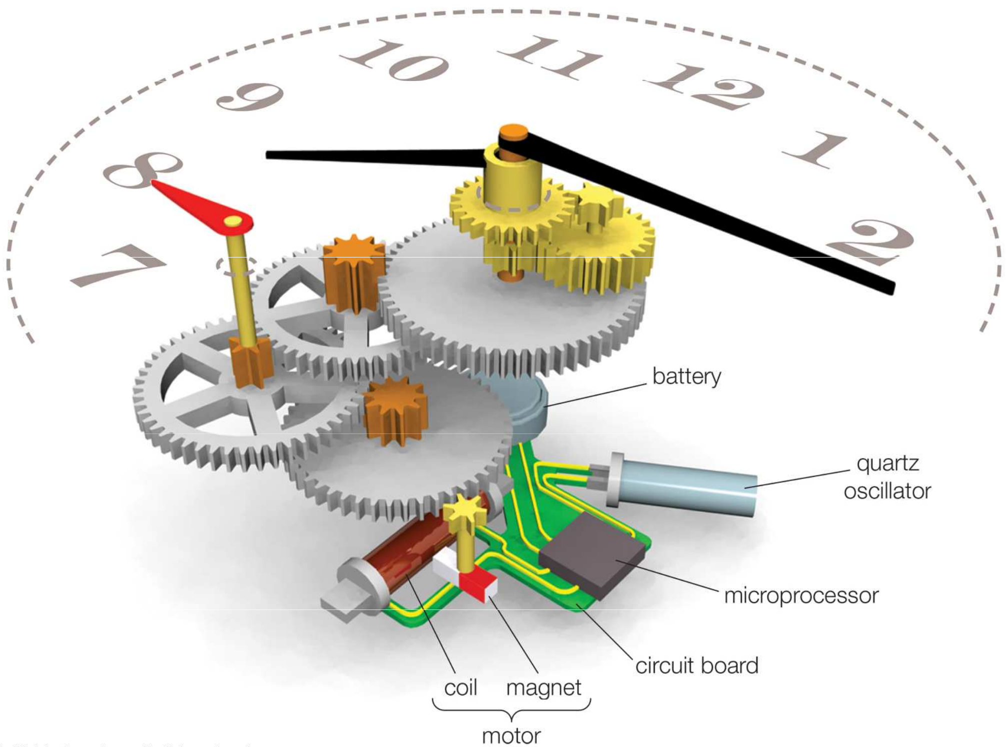

b
b
a
c

Torzní kmity setrvačky

Elastická deformace pružného pera – lineární tedy harmonické (Hookův zákon)

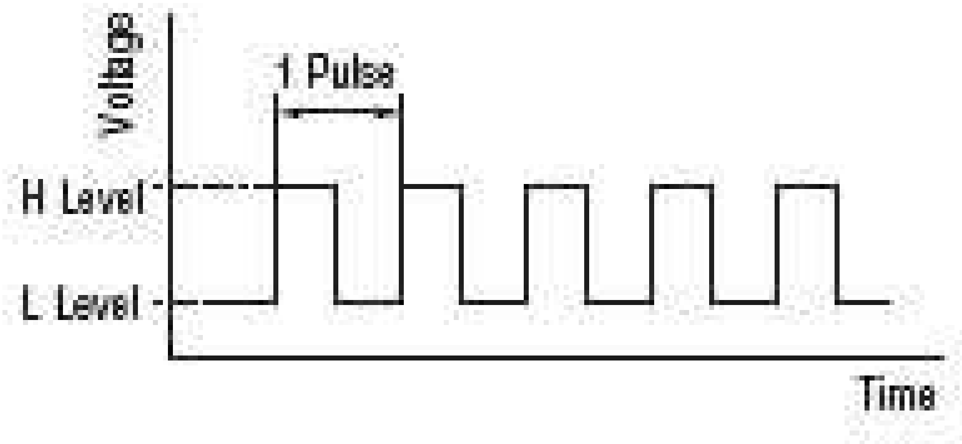
Kmity křemenného krystalu

Piezoelektrický jev



Čas – jedna z nejlépe měřitelných veličin

Oscilátor + čítač



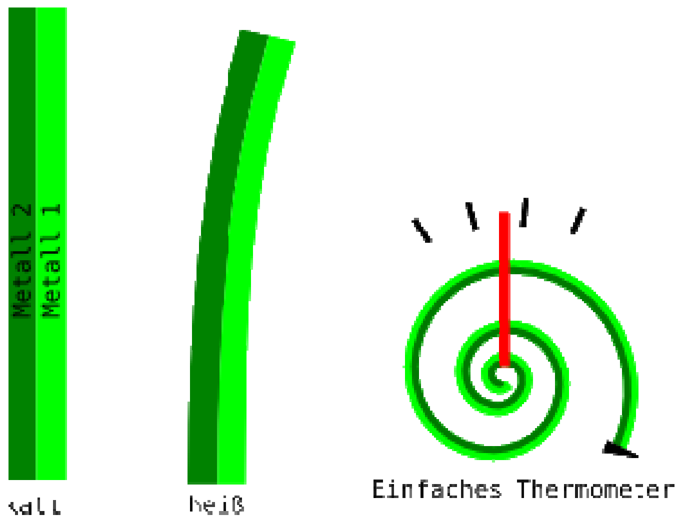
Měření teploty

Kapalinové teploměry

Nakreslete schematicky dva kapalinové teploměry

A: s větší citlivostí, B: s menší citlivostí.

Bimetalový teploměr



Který ze dvou kovů má větší koeficient teplotní roztažnosti?

Zeiger
Anzeigeskala
www.bildwoerterbuch.com
Welle
Gehäuse
Bimetallspirale

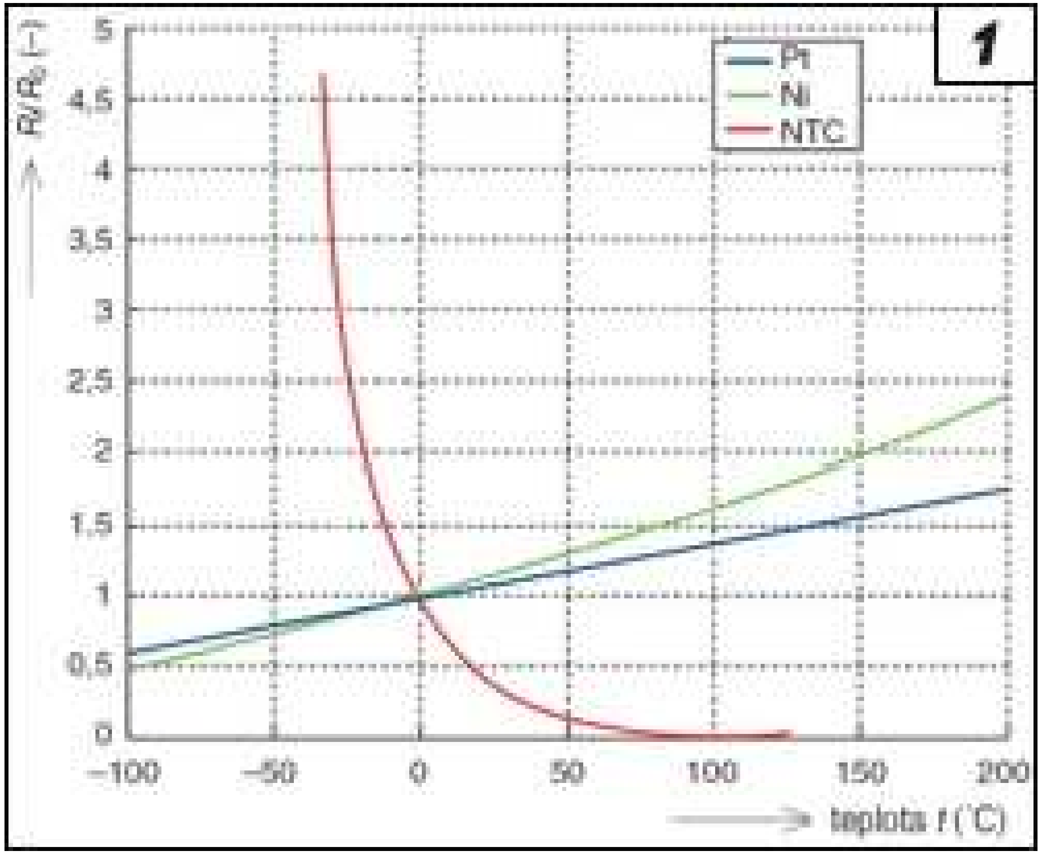
Odporové teploměry

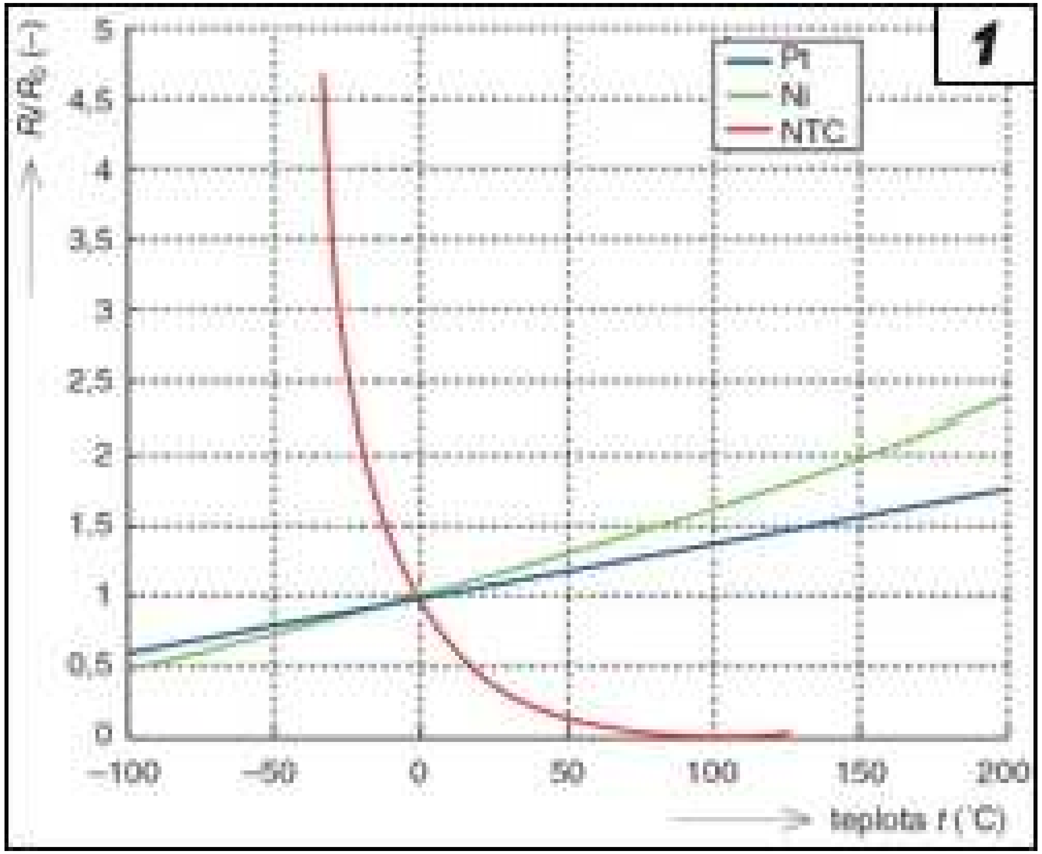
Změna elektrického odporu s teplotou

Kovové: odpor s teplotou roste

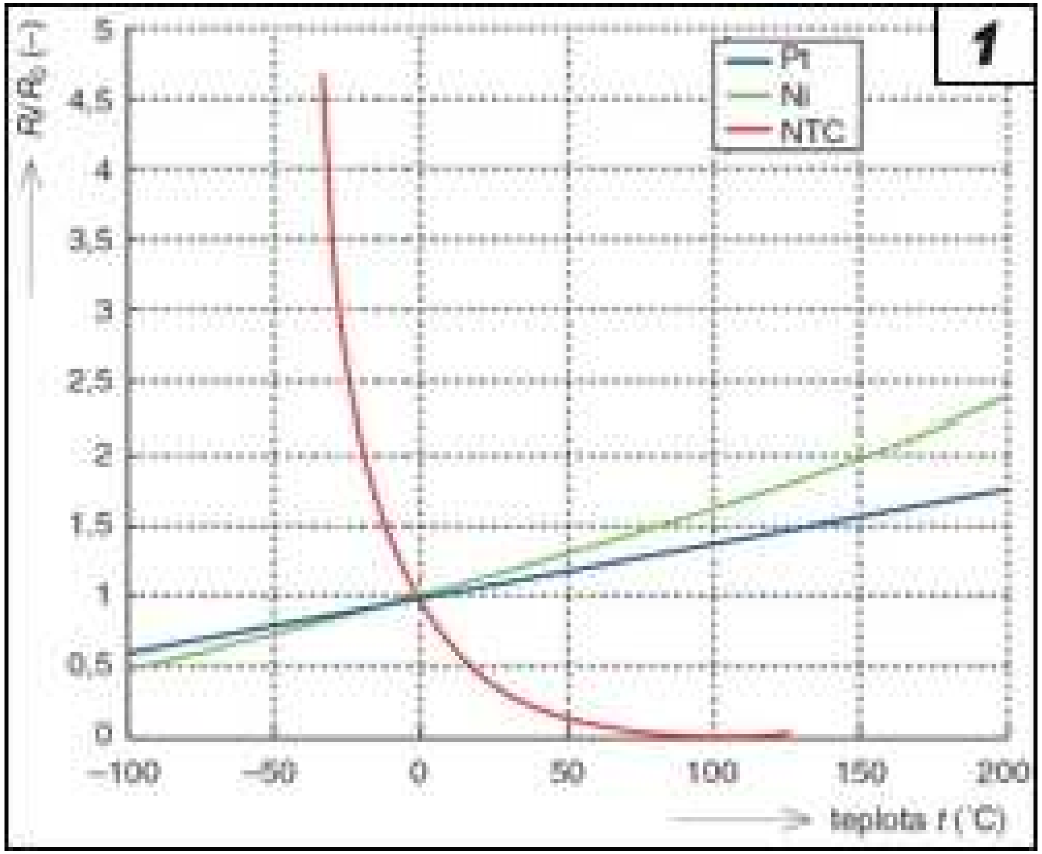
Používané kovy: Ni, Pt

Polovodičové (termistory): odpor s teplotou klesá



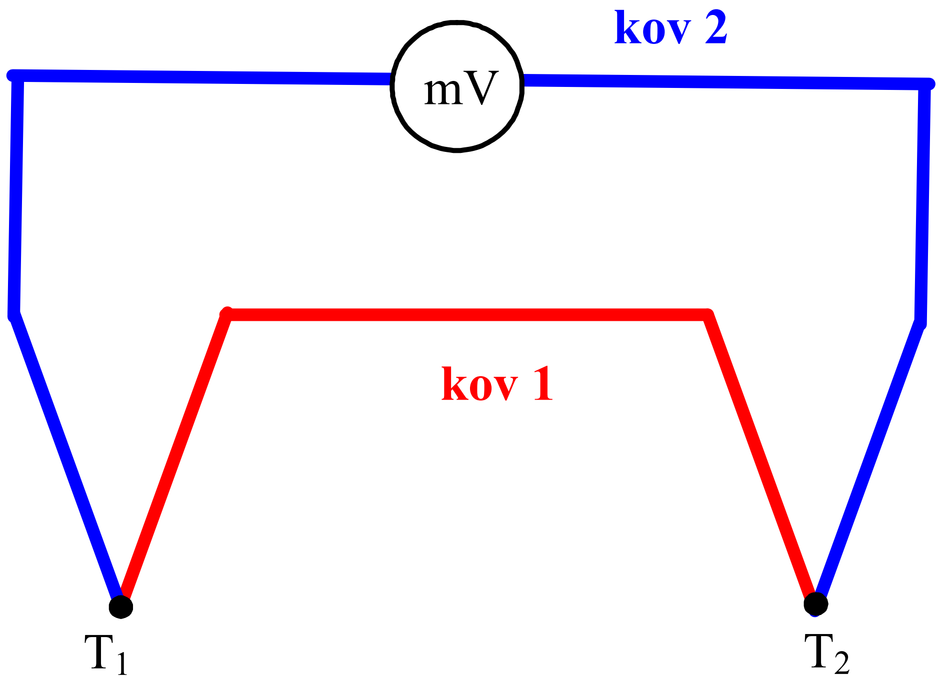


Který teploměr má větší citlivost, platinový nebo niklový?



Při jakých teplotách je NTC termistor (negastor) citlivější, při nižších nebo vyšších?

termočlánek



Termoelektrické napětí

$$U = \alpha (T_2 - T_1)$$

T_1 – referenční teplota

α – termoelektrický koeficient

Jeden z nejpoužívanějších termočlánků je typ K – chromel - alumel

Chromel: 90% Ni, 10% Cr

Alumel: 95% Ni, 2% Mg, 2% Al 1% Si

Termoelektrický koeficient α = 42 μV/°C

Jaké bude napětí při rozdílu teplot 100°C ?

Teplota referenčního spoje je 20°C, napětí na termočlánku typu K je 3,1mV.
Jaká je teplota měřeného spoje?

$$U = \alpha (T_2 - T_1)$$

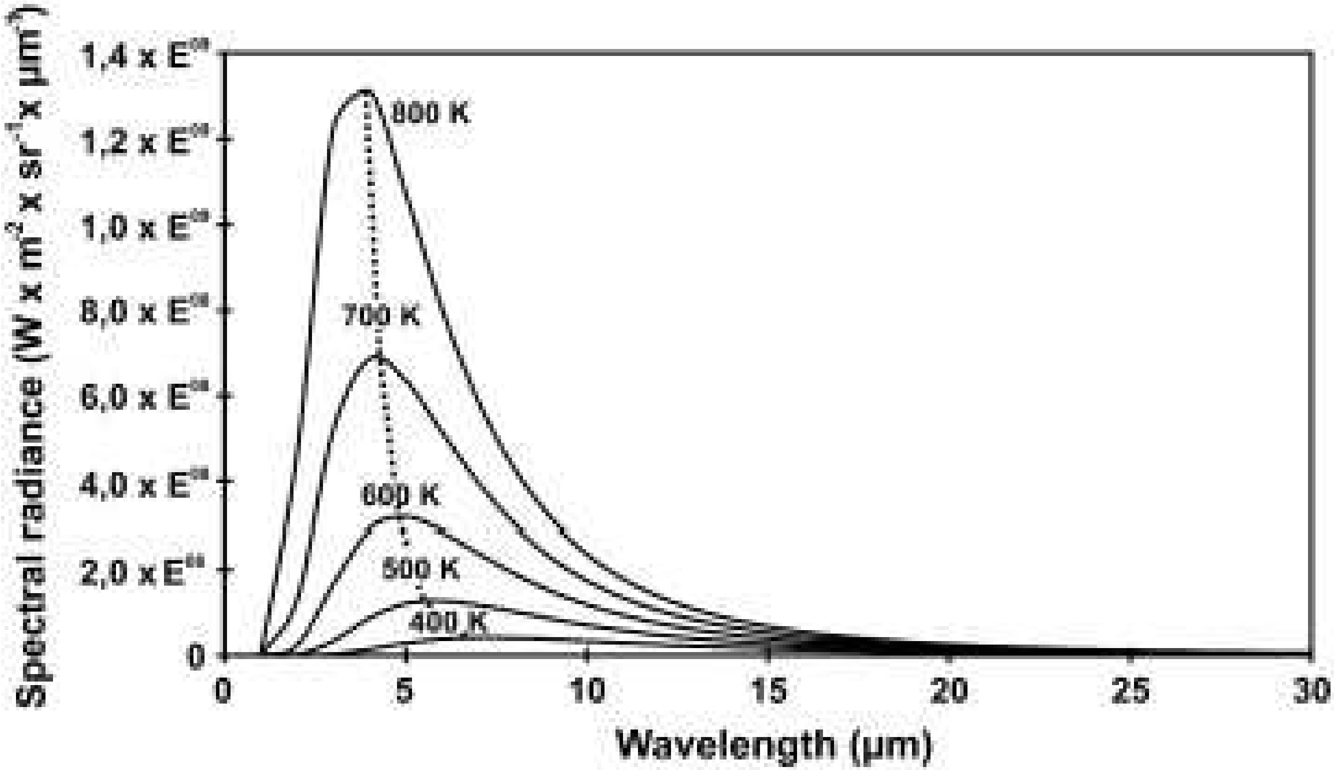
93,8 °C

Kde je tady referenční spoj?

Infračervené teploměry měří záření emitované tělesem

Planckův vyzařovací zákon:

Dokonale černé těleso



$$H_o = \sigma T^4$$

Problém: emisivita

Záření reálného tělesa:

$$H = \varepsilon H_o$$

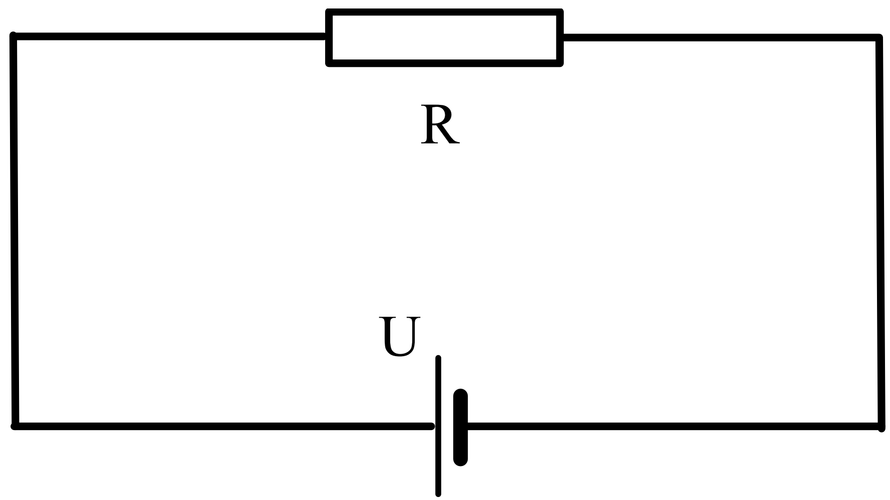
$$\varepsilon \in (0,1)$$

IR teploměr bez korekce na emisivitu vždy ukazuje nižší teplotu, než je skutečná.

Měření elektrických veličin, napětí, proudu a odporu

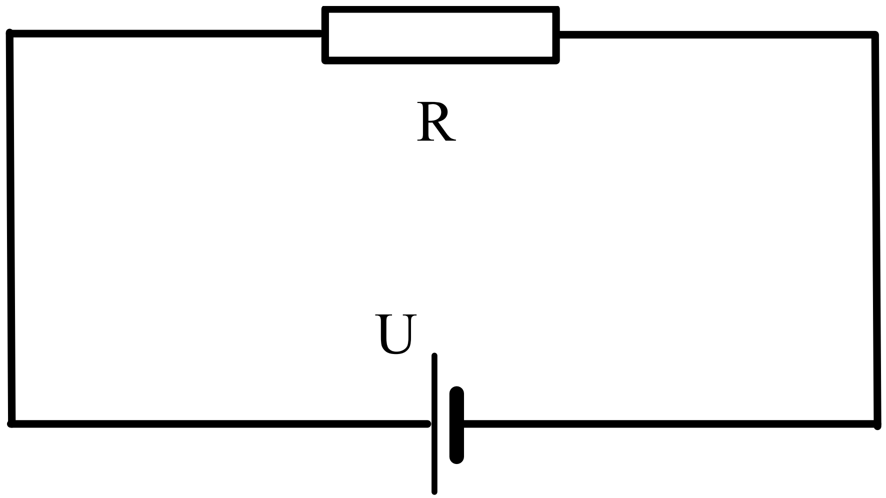
Voltmetr měří rozdíl potenciálů mezi dvěma body.

Chceme měřit napětí na odporu R. Nakreslete zapojení voltmetru

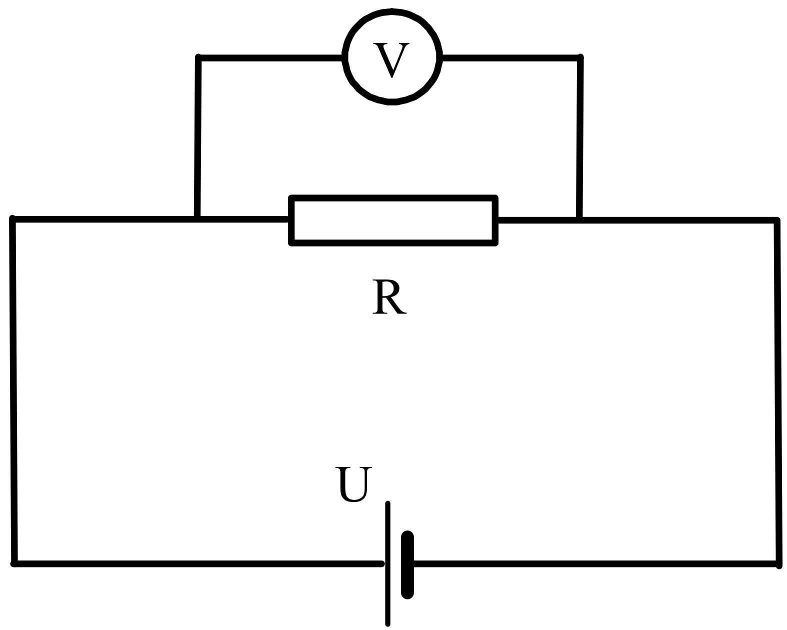


Ampérmetr měří proud, který samotným ampérmetrem protéká

Chceme měřit proud v obvodu. Nakreslete zapojení ampérmetru.



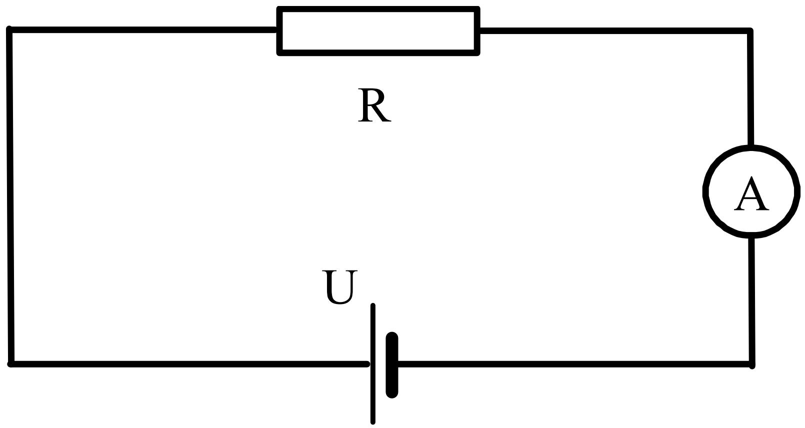
Zapojení voltmetru do obvodu dle obr. méně ovlivní situaci v obvodu pokud:



a) voltmetr má velký vnitřní odpor

b) voltmetr má malý vnitřní odpor

Zapojení ampérmetru do obvodu dle obr. méně ovlivní situaci v obvodu pokud:

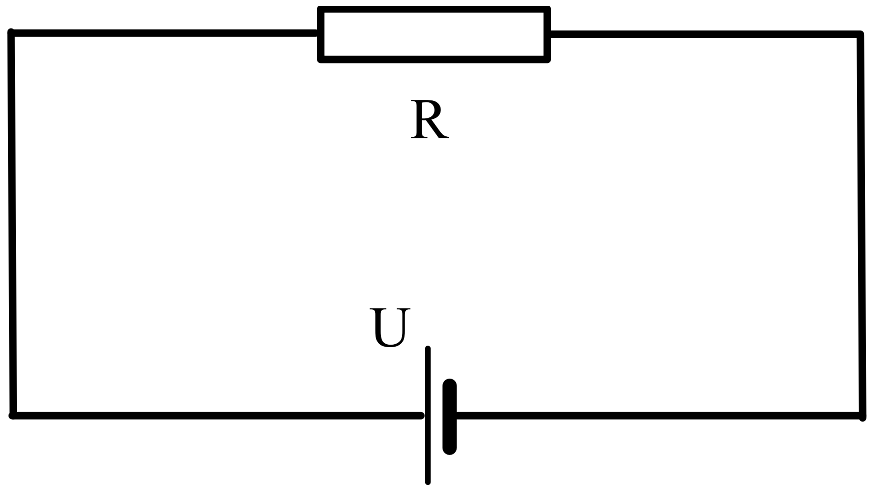


a) ampérmetr má velký vnitřní odpor

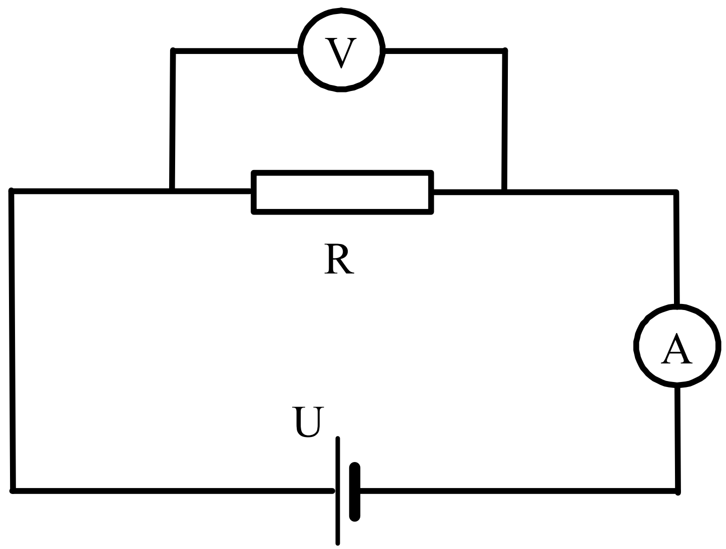
b) ampérmetr má malý vnitřní odpor

Měření odporu – současné měření napětí a proudu

Nakreslete zapojení ampérmetru a voltmetru do obvodu a napište vztah pro výpočet odporu z Ohmova zákona



Označme U_V napětí měřené voltmetrem a I_A proud měřený ampérmetrem.



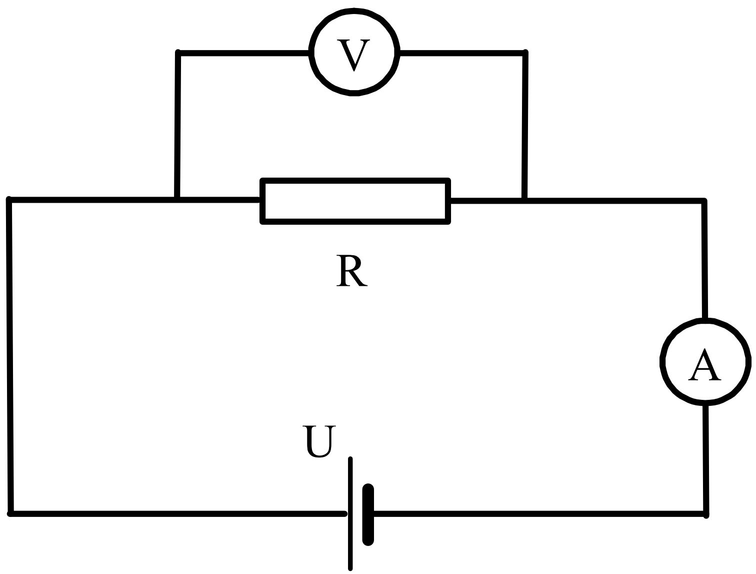
Je níže uvedený vztah správně?

$$R = \frac{U_V}{I_A}$$

Měří voltmetr skutečně napětí na odporu?

Měří ampérmetr skutečně proud tekoucí odporem?

Označme I_V proud tekoucí voltmetrem, I_R proud tekoucí odporem a I_A proud tekoucí (a měřený) ampérmetrem.



Napište správný vztah pro výpočet odporu.

$$R = \frac{U_V}{I_R} = \frac{U_V}{I_A - I_V}$$

Ve vztahu

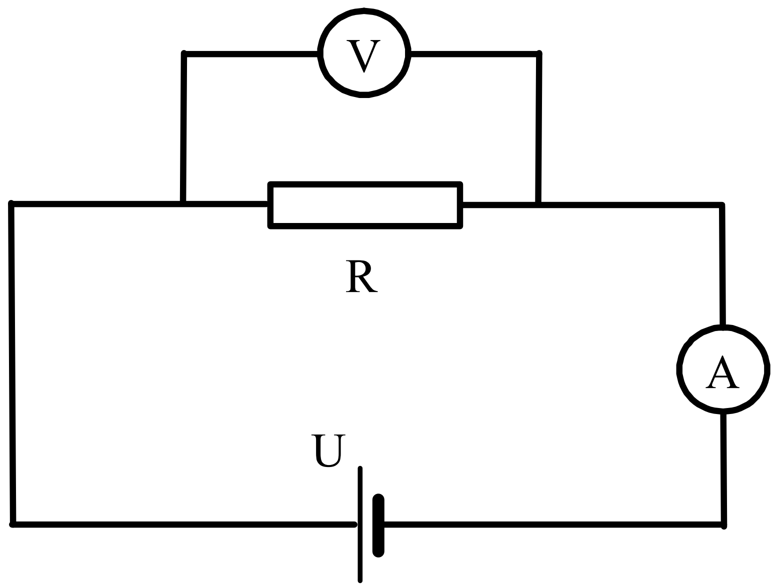
$$R = \frac{U_V}{I_A - I_V}$$

neznáme proud tekoucí voltmetrem I_V. Můžeme jej však spočítat ze známých hodnot, pokud známe vnitřní odpor voltmetru R_V. Napište jak a doplňte jej do výše uvedeného vztahu pro odpor.

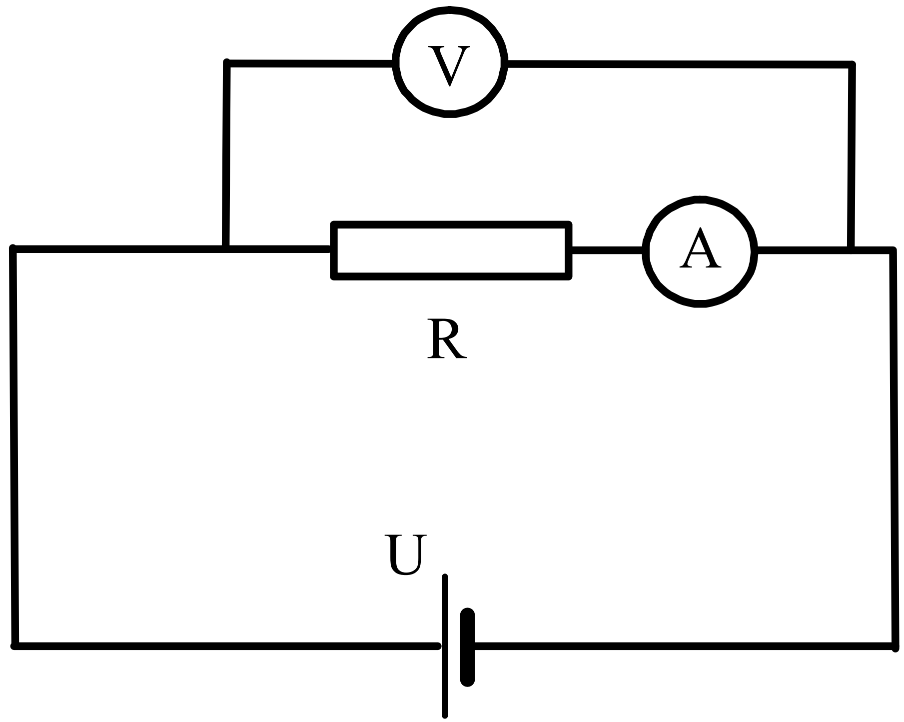
$$R = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}$$

Vnitřní odpor voltmetru vždy udává výrobce

Ampérmetr lze do obvodu zapojit tak, aby měřil správný proud.

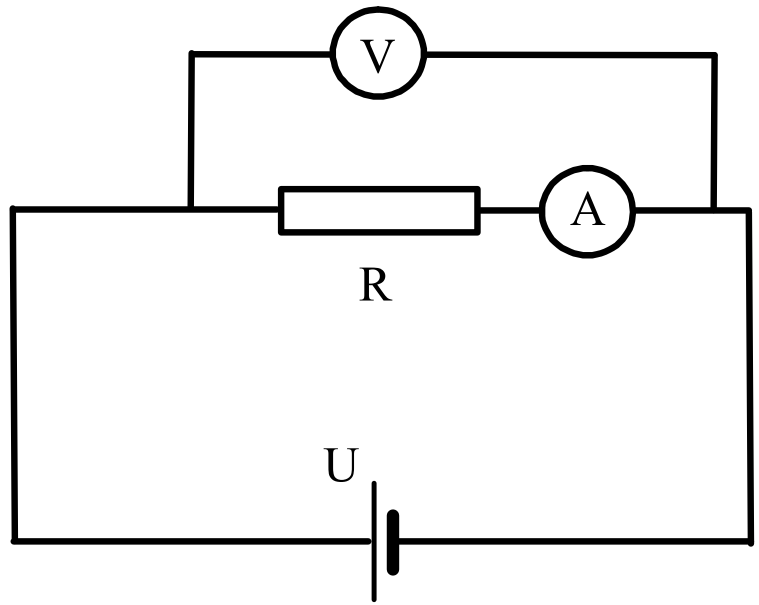


nakreslete toto zapojení



Jeden problém jsme vyřešili a druhý vytvořili. Jaký?

Označme U_V napětí na voltmetru (a voltmetrem měřené), U_R napětí na odporu a U_A napětí na ampérmetru.

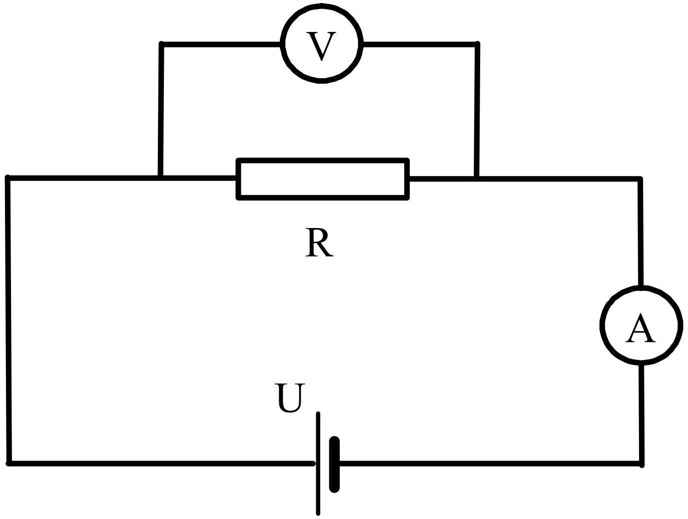


Odvoďte správný vztah pro výpočet odporu z naměřených veličin.

$$R = \frac{U_V - U_A}{I_A} = \frac{U_V - R_A I_A}{I_A}$$

Shrnutí

metoda A

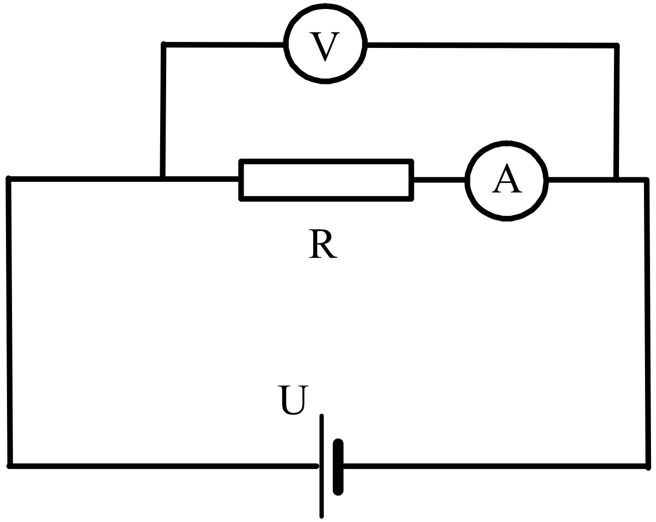


$$R = \frac{U_V}{I_A - \frac{U_V}{R_V}}$$

vhodné pro malé odpory

$$R \ll R_V$$

metoda B



$$R = \frac{U_V - R_A\, I_A}{I_A}$$

vhodné pro velké odpory

$$R \gg R_A$$

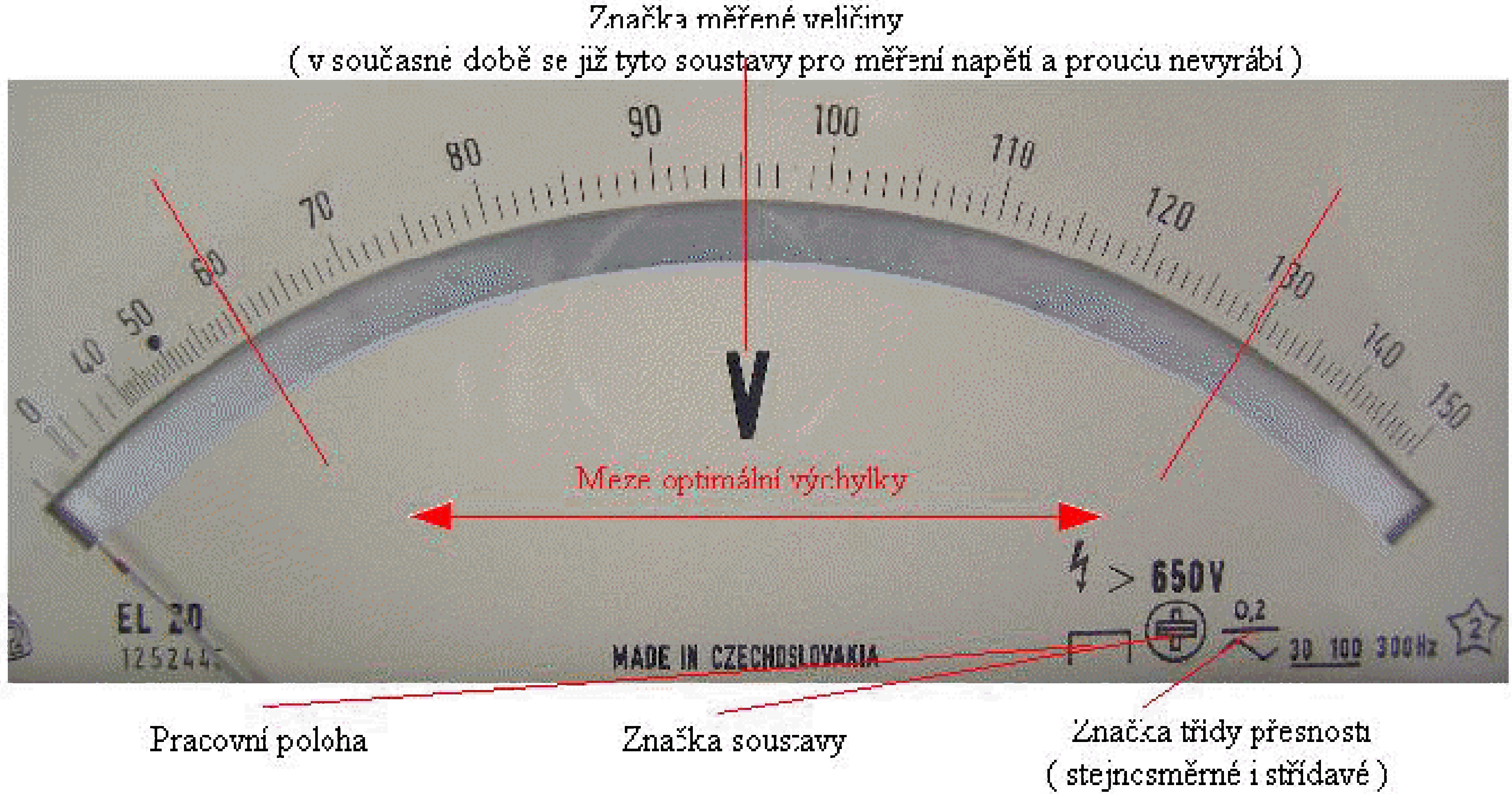
Určení chyby elektrických měřicích přístrojů

chybu udává výrobce vždy jako **krajní chybu**

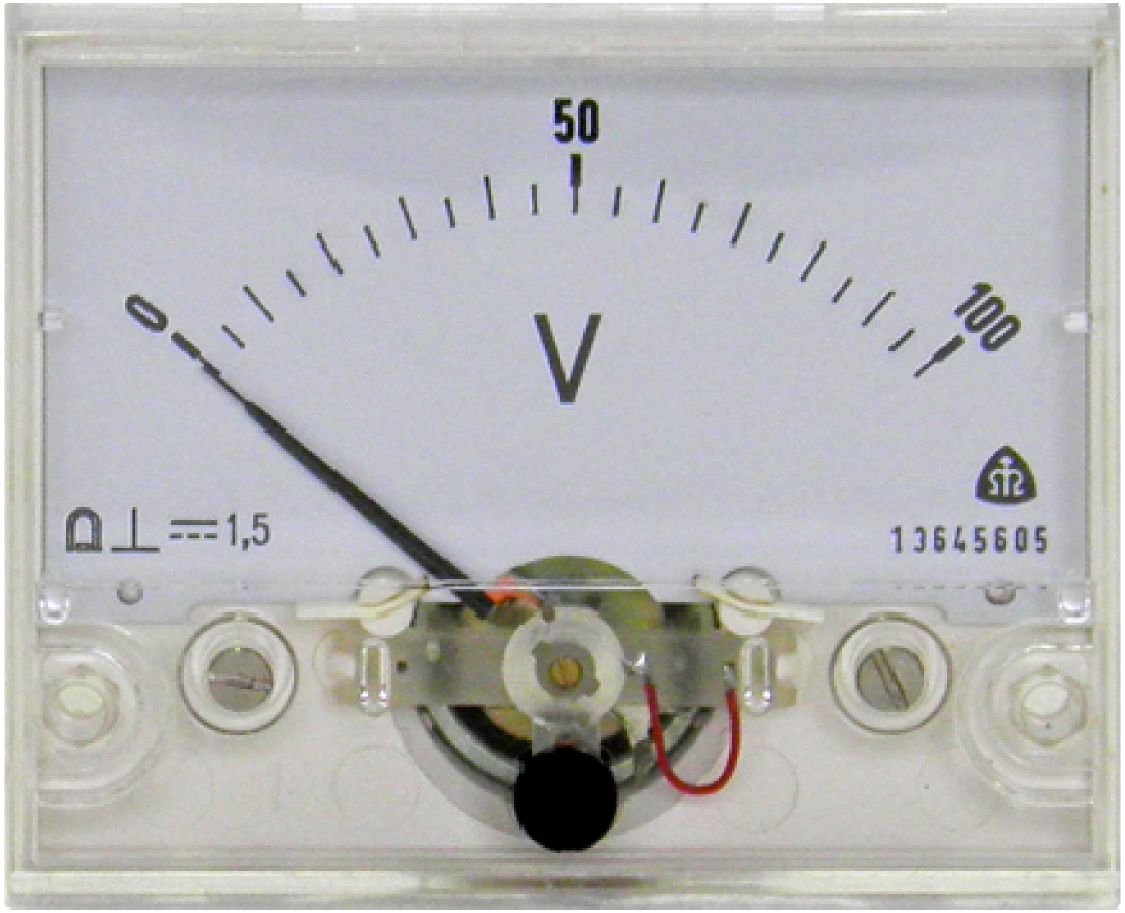
$$s_x = \frac{\kappa_x}{3}$$

Analogové přístroje – třída přesnosti

krajní chyba jako procento z rozsahu



Jaká je směrodatná odchylka při měření napětí tímto přístrojem?



Digitální přístroje

způsoby zadání krajní chyby:

procento měřené hodnoty + procento rozsahu

procento měřené hodnoty + počet „digit“

Určete směrodatnou odchylku digitálního přístroje z následujících údajů:

display: 4,25 V

Informace o chybě: 0,5% of reading + 3 digit