

# **SPECIÁLNÍ A OBECNÁ TEORIE RELATIVITY**

Jana Jurmanová

# Situace ve fyzice do Einsteina

- „Celá fyzika je již v podstatě hotová s výjimkou ...“
- Mechanika je ucelená fyzikální teorie slavicí úspěchy v astronomii
- Elektrodynamika – úspěchy při vysvětlení elektromagnetických i optických jevů
- Názory na podstatu světla – korpuskulární kontra vlnová teorie (nyní vede vlnová).



# Inerciální systém

- 1. Newtonův zákon – existuje inerciální soustava, vůči ní lze určovat klid a pohyb (soustava vzdálených hvězd = absolutní prostor)
- Každá soustava, která je vůči této soustavě v klidu či rovnoměrném přímočarém pohybu, je též inerciální.
- Prostředí potřebné pro šíření světla je totožné s absolutním prostorem.

# Prostředí pro šíření světla – ÉTER



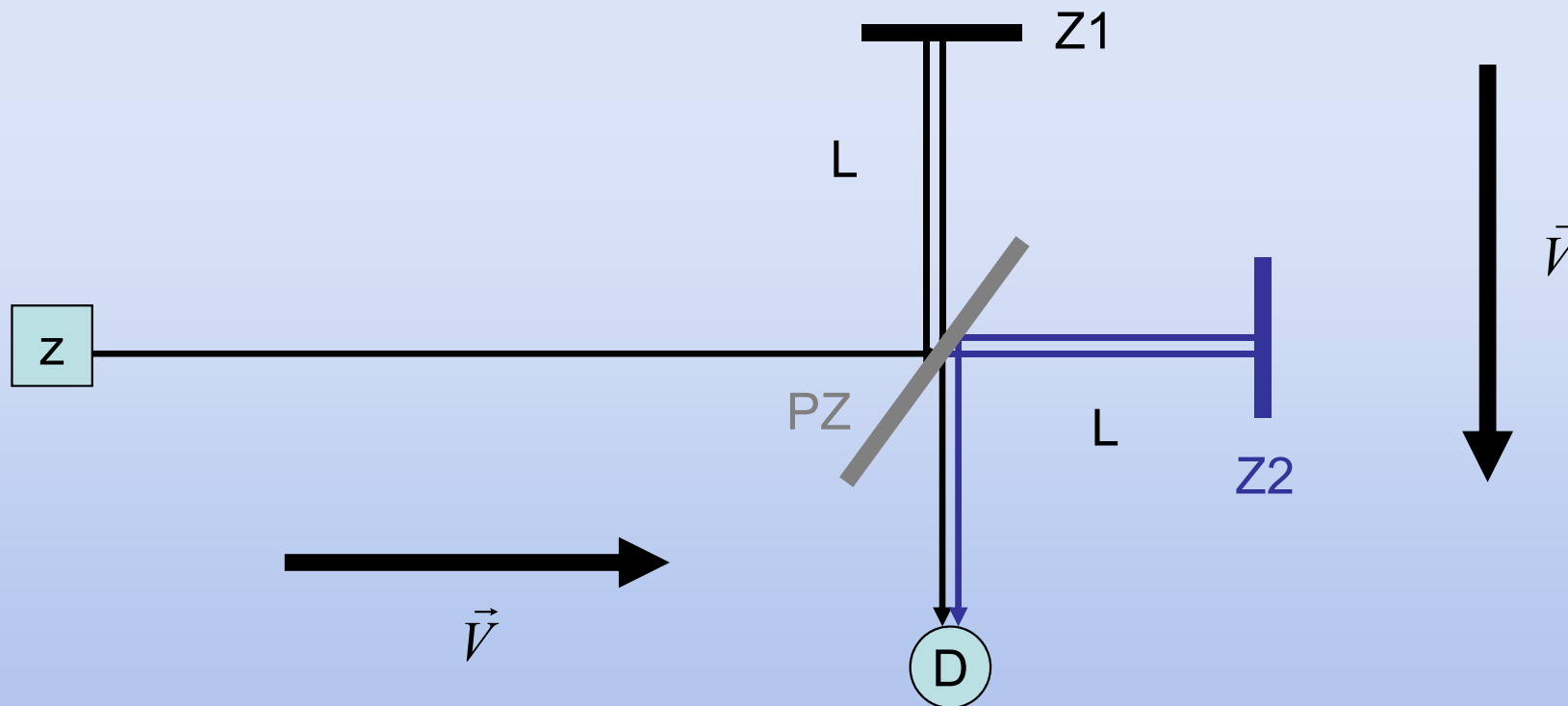
Éter by měl vyplňovat celý vesmír a mít následující vlastnosti:

1. Je dokonale prostupný pro hmotná tělesa.
2. Je absolutně nehybný vůči světlu, které se v něm šíří.



# Éter je absolutní

- Snaha o změření rychlosti pohybu éteru vůči Zemi – měření času je nepřesné, raději interferenční jevy
- Michelson-Morleyho experiment



# Rozbor Michelsonova-Morleyova experimentu

- Paprsek, který nemění směr pohybu a odráží se na zrcadle Z2, doputuje do detektoru za čas  $T_1 = \frac{L}{c+V} - \frac{L}{c-V}$
- Paprsek, který se odráží od zrcadla Z1, doputuje do detektoru za čas  $T_2 = \frac{L}{\sqrt{c^2 - V^2}}$
- Dráhový rozdíl  $d$  je roven  $c$ -násobku rozdílu časů, čili  $L\left(\frac{V}{c}\right)^2$
- Jednotlivá interferenční maxima jsou vzdálena o  $\lambda$ , takže lze pozorovat posuv o  $m = d / \lambda$  proužku vůči stavu, kdy by se Země nepohybovala.
- Otočíme-li zařízení o pravý úhel, dojde k posunu proužků na druhou stranu, celkový posuv  $2m = \frac{2L}{\lambda} \left(\frac{V}{c}\right)^2$
- Pro  $V=30\text{km/s}$ ,  $L=10\text{m}$ ,  $\lambda=500\text{nm}$  je  $m=0,4 \dots$  ale posuv nepozorován!

# „Prerelativita“ do Einsteina

- Snaha o vysvětlení výsledků Michelsonova-Morleyho experimentu
- Fitz-Gerald, Lorentz –rameno interferometru se zkracuje ve směru pohybu (důsledek působení elmg. sil na elektricky nabitě částice ramene)
- Poincaré: pohyb vůči éteru je principiálně nezjistitelný.
- Einstein:  
„Co bych viděl, kdybych letěl spolu se světelným paprskem?“

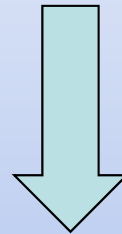


# Platí: Maxwellovy rovnice

- „A řekl Bůh:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} & \operatorname{rot} \vec{H} &= \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho & \operatorname{div} \vec{B} &= 0 \end{aligned}$$

a bylo světlo.“



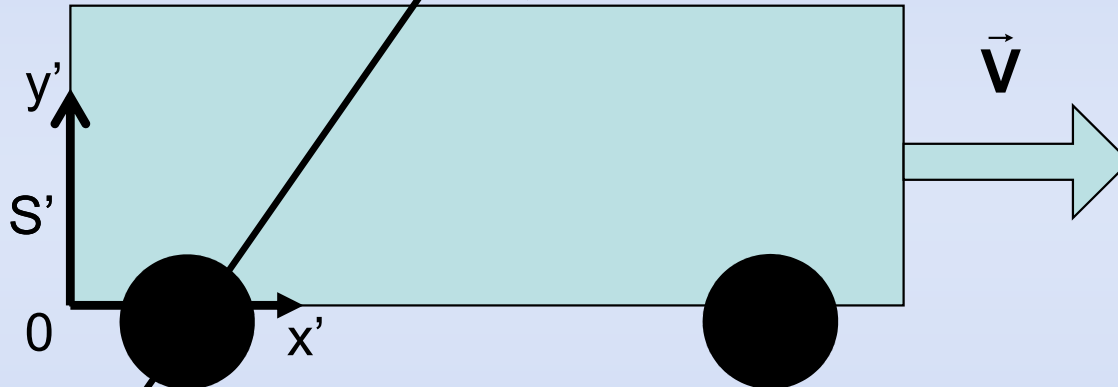
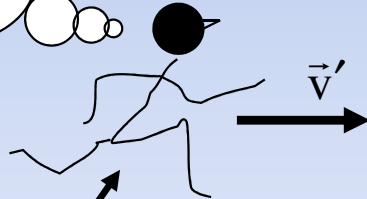
$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

Rychlost šíření světla závisí jen na vlastnostech prostředí, v němž se šíří.

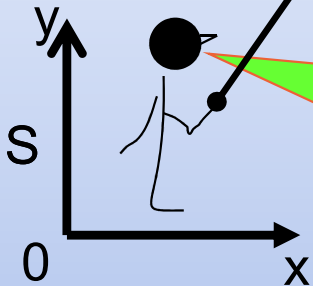


# Platí: Skládání rychlostí

Moje rychlost má velikost  $v'$  (vzhledem k vlaku).



Vlak jede rychlostí  $V$  (vzhledem ke kolejím).



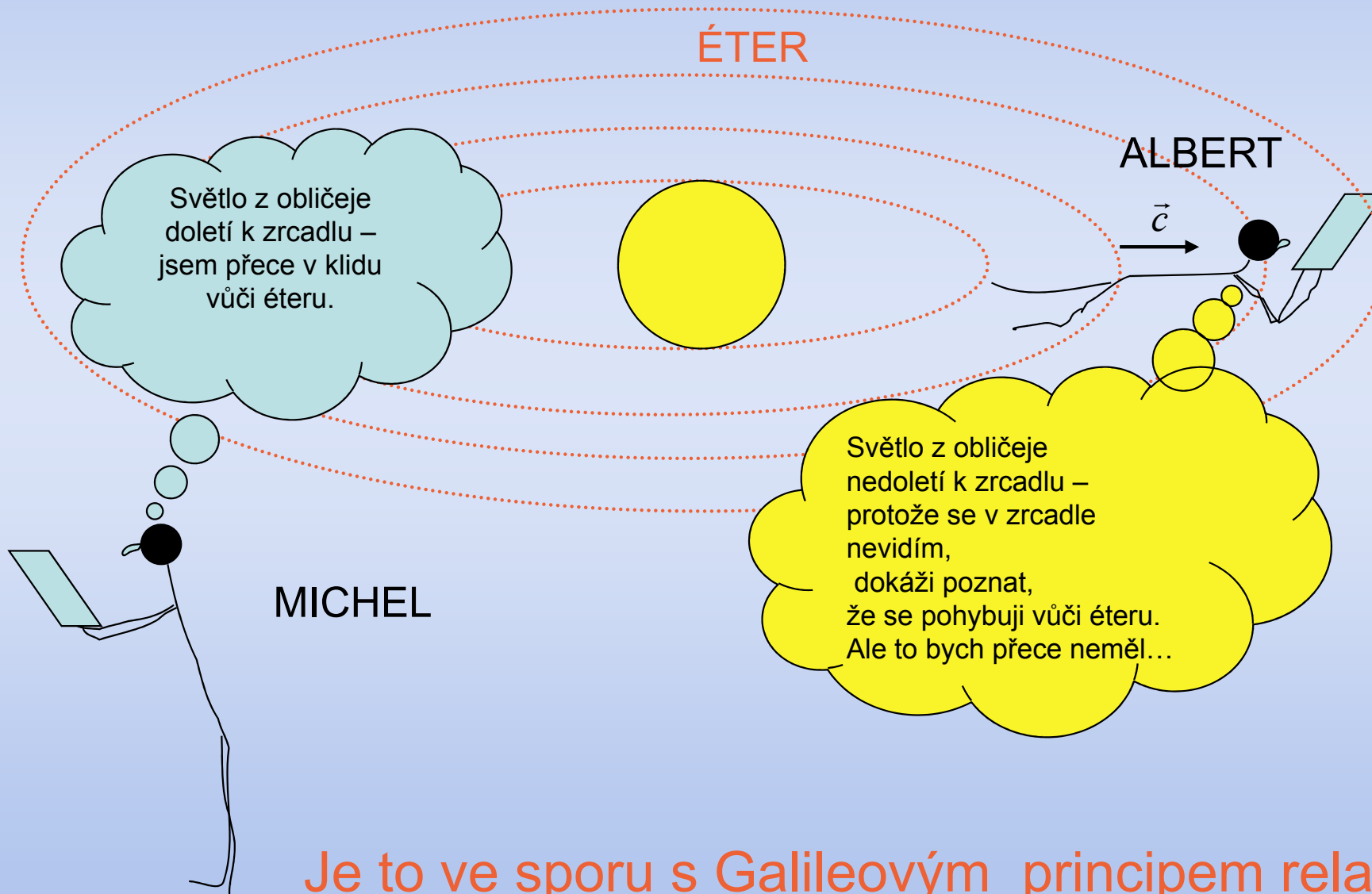
Jeho rychlost vzhledem ke kolejím má velikost  $v'+V$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

Klasické skládání rychlostí

A CO NA TO ALBERT EINSTEIN?

# Co kdybych ... letěl spolu se světelným paprskem?



Je to ve sporu s Galileovým principem relativity.

# Princip relativity

- Ve všech inerciálních soustavách platí stejné fyzikální zákony (= to, je-li daný systém v klidu či pohybuje-li se rovnoměrně přímočaře, nepoznáme, dokud „nevykoukneme“ ven).

(GALILEO GALILEI,  
1564-1642 )



# Přijmu tedy princip relativity jako postulát...



Což je ve sporu s konečnou rychlostí  $c$  šíření elektromagnetického vlnění ve vakuu, která plyne z Maxwellových rovnic – **neměnnost  $c$  přijmu jako druhý postulát.**

# Je tedy třeba upravit klasický zákon skládání rychlostí:

- Takže pro pohyb v jedné přímce (pouze x) musí platit

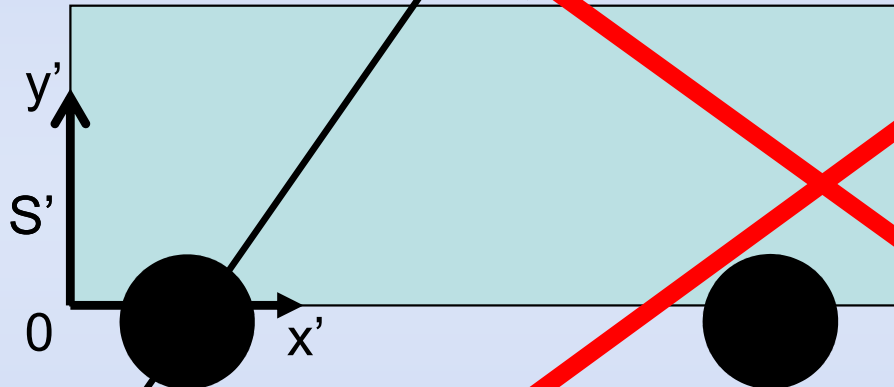
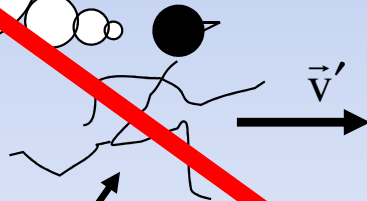
$$v = v' + V \quad \Rightarrow \quad v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$$

- Tedy pro  $v'=c$  (a stejně i pro  $V=c$ )

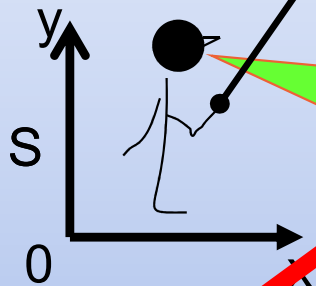
$$v = \frac{c + V}{1 + \frac{cV}{c^2}} = \frac{c \left( 1 + \frac{V}{c} \right)}{\left( 1 + \frac{V}{c} \right)} = c$$

# Platí: Skládání rychlostí

Moje rychlost má velikost  $v$  (vzhledem k vlaku).



Vlak jede rychlostí  $V$  (vzhledem ke kolejím).

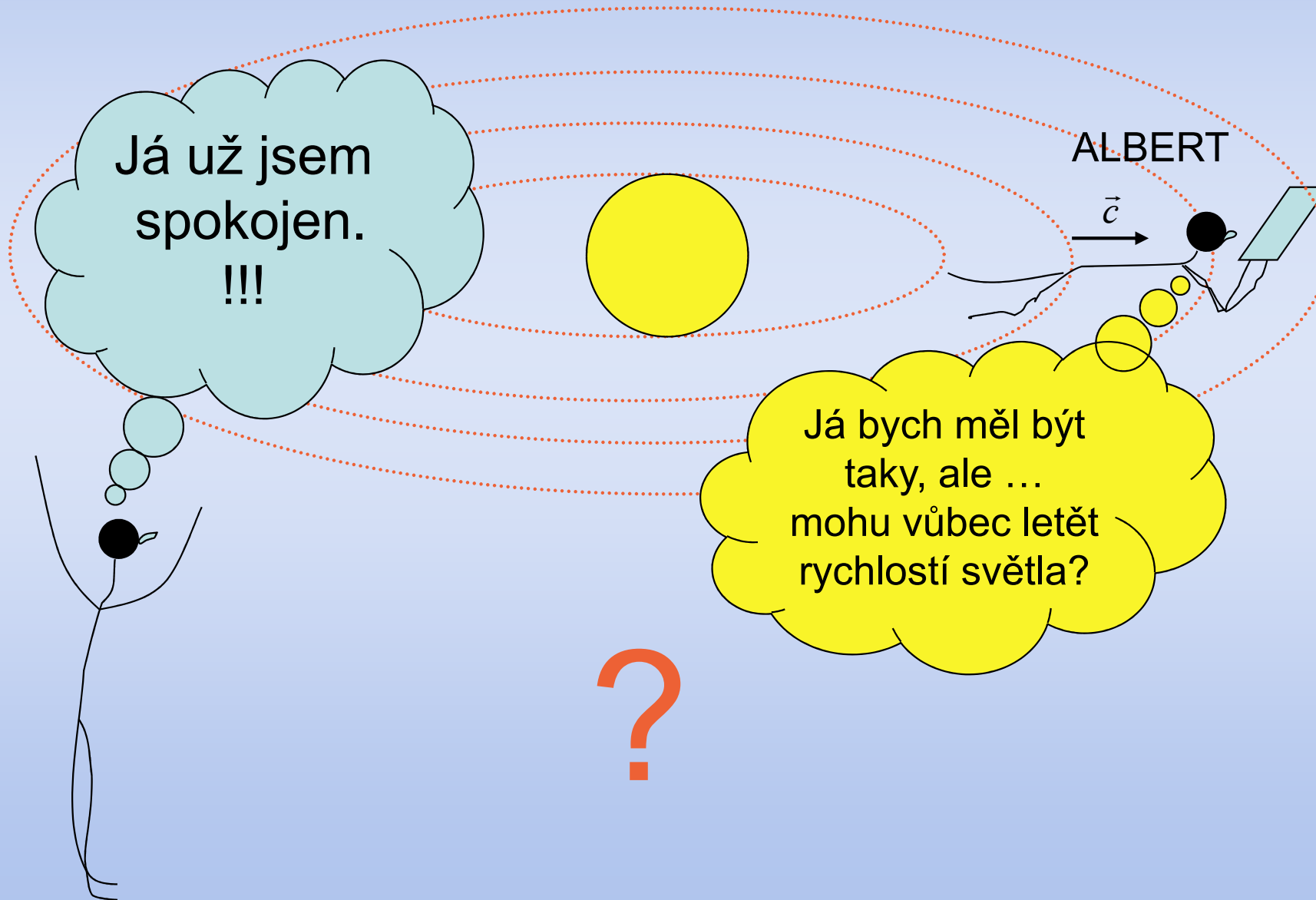


Jeho rychlost vzhledem ke kolejím má velikost  $v'+V$

$$\vec{v} = \vec{v}' + \vec{V}$$

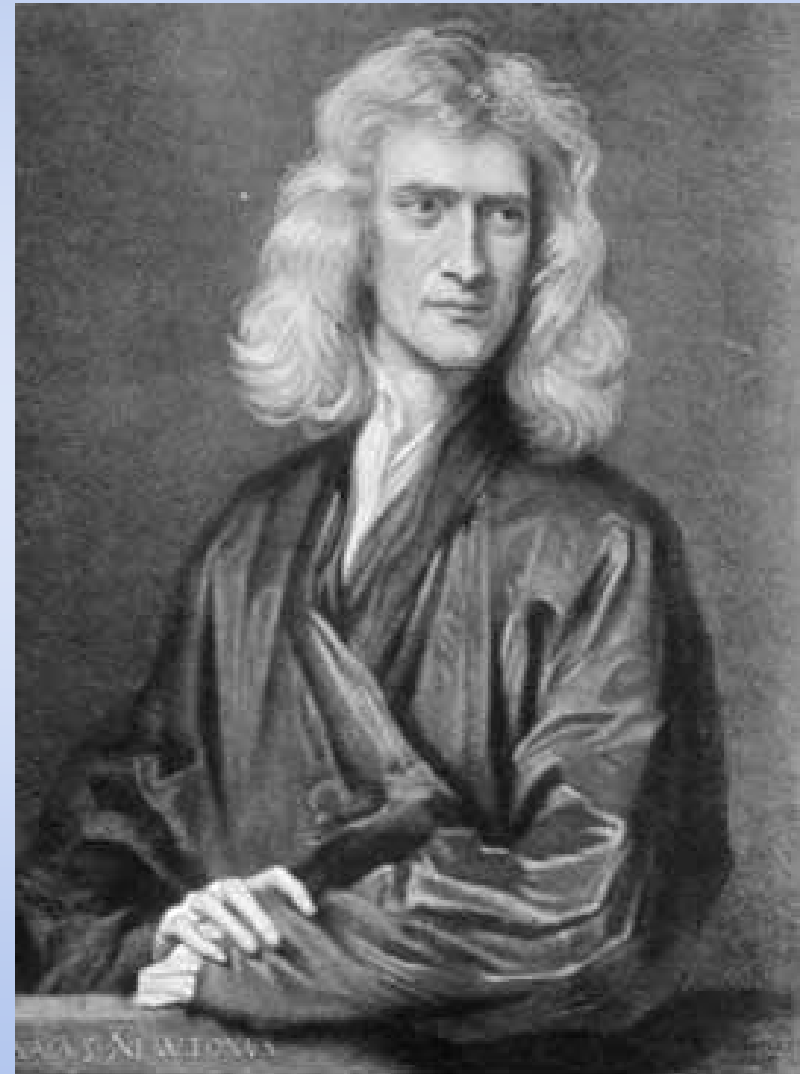
Klasické skládání rychlostí

# ALE ....



# Názory klasické (newtonovské) mechaniky na čas a prostor

- Čas je absolutní.  
(„*Absolutní, pravdivý, v matematice používaný čas sám o sobě plyne již ze své přirozené podstaty rovnoměrně, nezávisle na vnějších podmínkách.*“  
ISAAC NEWTON, 1643-1727)
- Prostorové vzdálenosti jsou také absolutní.





# Nová transformace souřadnic

- Stará (Galileiho) transformace souřadnic:

$$t = t' \quad x = x' + Vt'$$
$$y = y' \quad z = z'$$

vede na starý zákon  
skládání rychlostí

$$v = v' + V$$

- Nová (Lorentzova) transformace souřadnic

$$t = \frac{t' + \frac{V}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$y = y' \quad z = z'$$

vede na nový zákon  
skládání rychlostí

$$v = \frac{v' + V}{1 + \frac{v'V}{c^2}}$$

**A NAVÍC:**

# Vede k dilataci času a kontrakci délek

- Události souměstné ( $x'_1 = x'_2$ ):

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad \begin{array}{l} \Delta t = t_2 - t_1 \\ \Delta t' = t'_2 - t'_1 \end{array}$$

- Čas  $\Delta t$  je tedy vždy delší než vlastní čas

$\Delta t' = \Delta \tau$ . Hodiny v systému S se tedy proti hodinám v S' zpožďují – dilatace času díky pohybu.

- Události současné ( $t_1 = t_2$ ):

$$\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}} \quad \begin{array}{l} \Delta x' = x'_2 - x'_1 \\ \Delta x = x_2 - x_1 \end{array}$$

- Ve vlastní vztažné soustavě S' je prostorová vzdálenost větší než v S, délka měřená z jiné vztažné soustavy je kratší než vlastní – kontrakce délek.

# Nejslavnější vztah



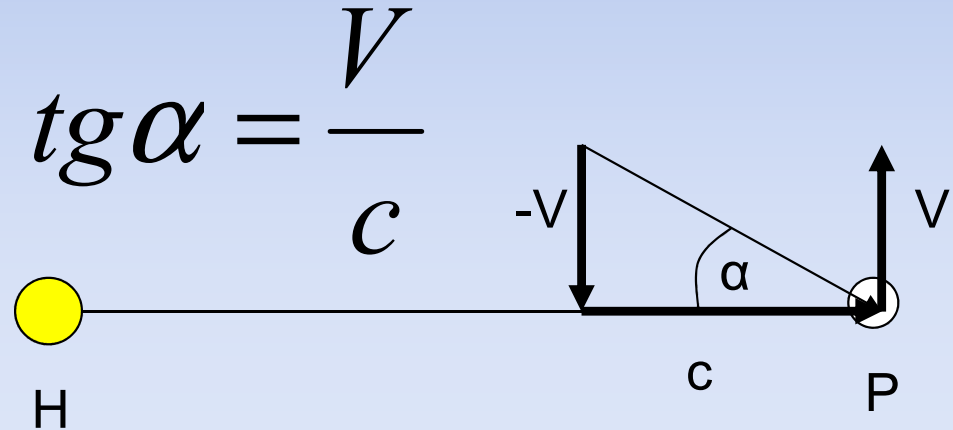
# Elementární odvození ekvivalence hmotnosti a energie

Následující odvození zákona ekvivalence, které nebylo dosud publikováno, má dvě přednosti. Ačkoliv využívá principu speciální relativity, nepředpokládá formální aparát teorie, ale užívá pouze tři dříve známých zákonů:

1. zákona zachování hybnosti
2. výrazu pro tlak záření; to jest pro hybnost komplexu záření pohybujícího se v zadaném směru
3. dobře známého výrazu pro aberaci světla (vliv pohybu Země na zdánlivou polohu stálic – Bradley).

# Aberace stálic a hybnost fotonu

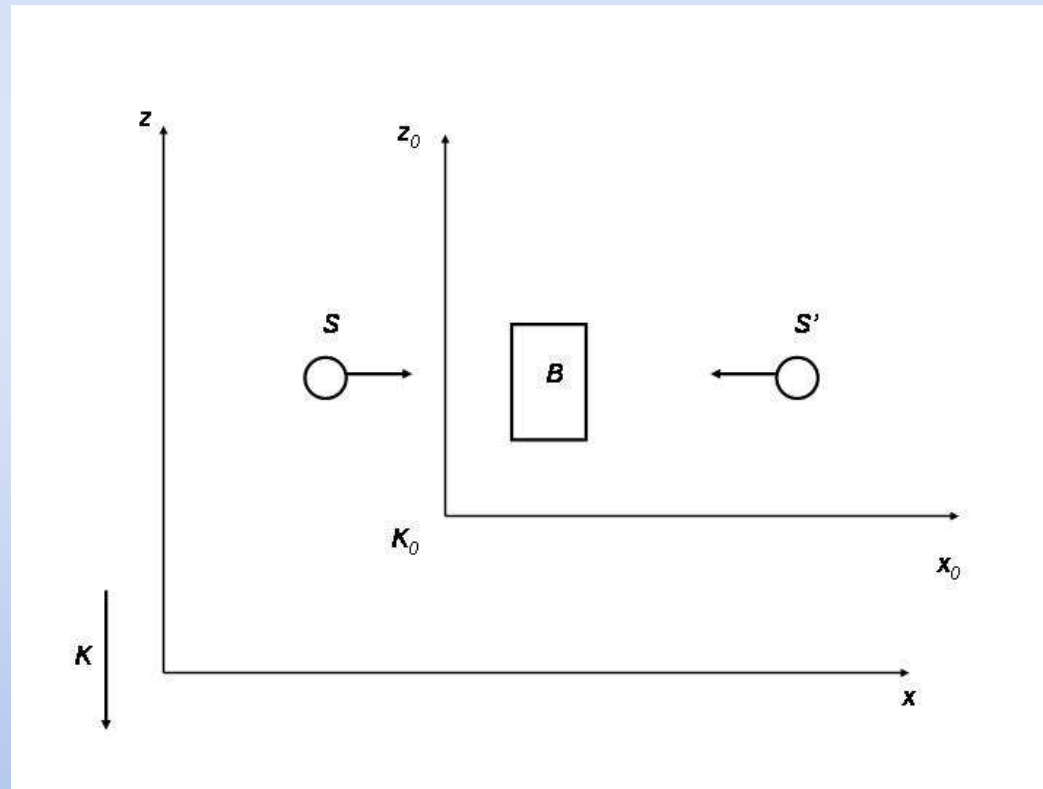
- Objevena již 1727 Bradleyem
- Polohy hvězd na nebeské sféře opisují v průběhu roku elipsy, jejichž velká poloosa má vždy velikost  $\alpha = 20,5''$
- Vysvětlil jako důsledek ročního pohybu Země, díky kterému se mění úhel, pod kterým se k nám pohybují paprsky hvězd



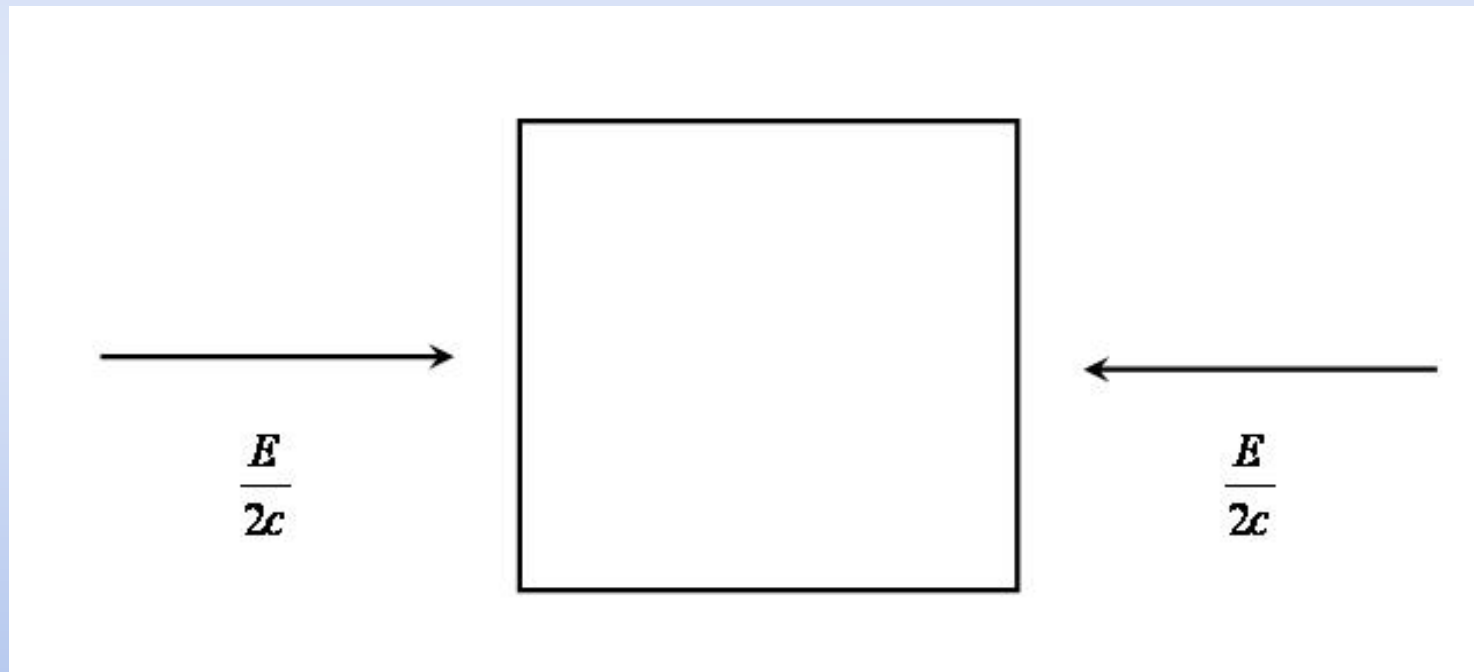
- Hybnost fotonu:

$$p = \frac{E}{c}$$

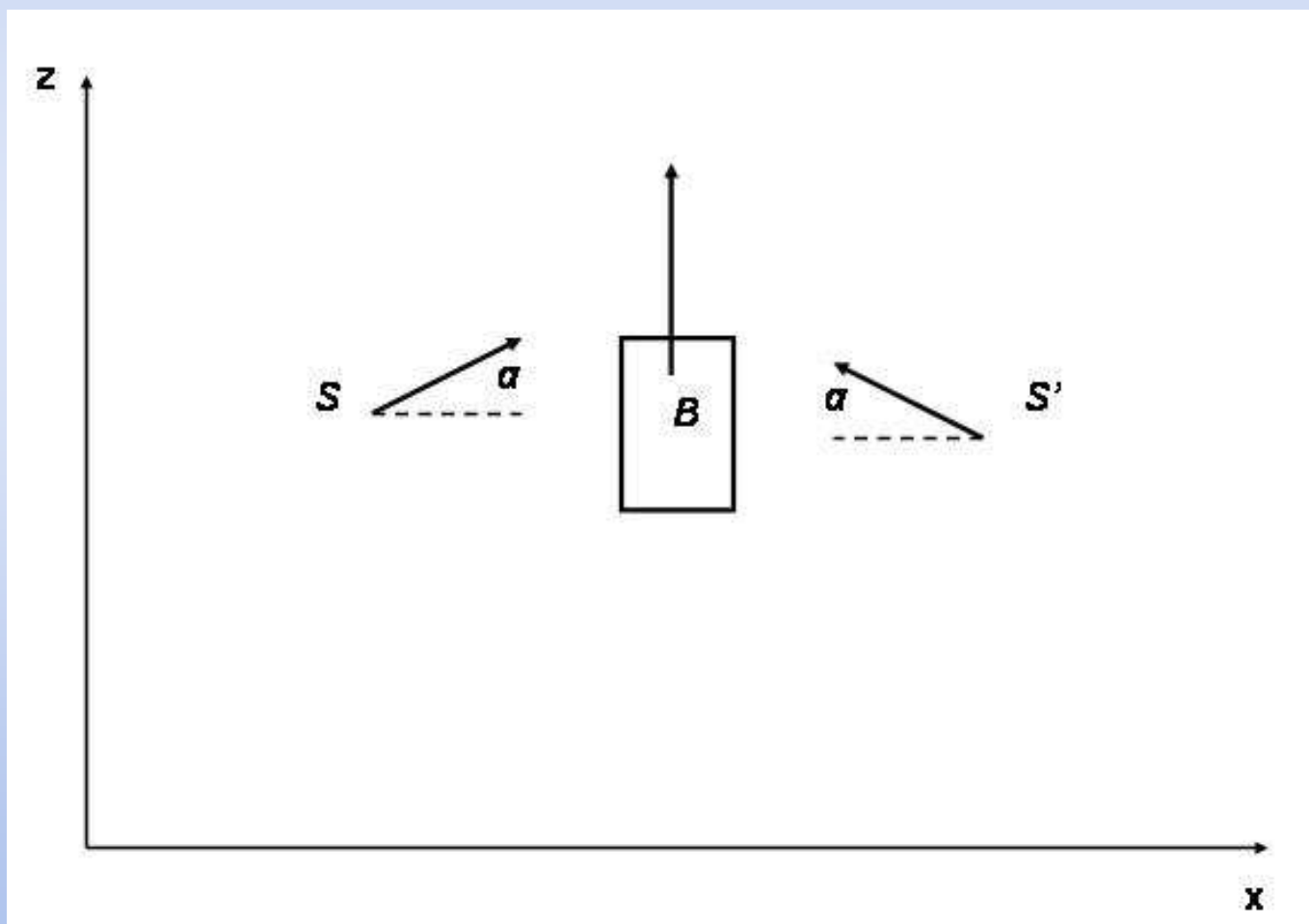
Nejprve uvažujme o následujícím systému. Necht' těleso  $B$  spočívá volně v prostoru vzhledem k souřadnicové soustavě  $K_0$ . Dva komplexy záření  $S$  a  $S'$ , každý o energii  $E/2$ , se pohybují v kladném a záporném směru osy  $x_0$  a jsou zároveň absorbovány tělesem  $B$ .



Touto absorpcí vzroste energie tělesa  $B$  o hodnotu  $E$ .  
Těleso  $B$  zůstává vzhledem k souřadnicové soustavě  $K_0$  z důvodů symetrie v klidu.

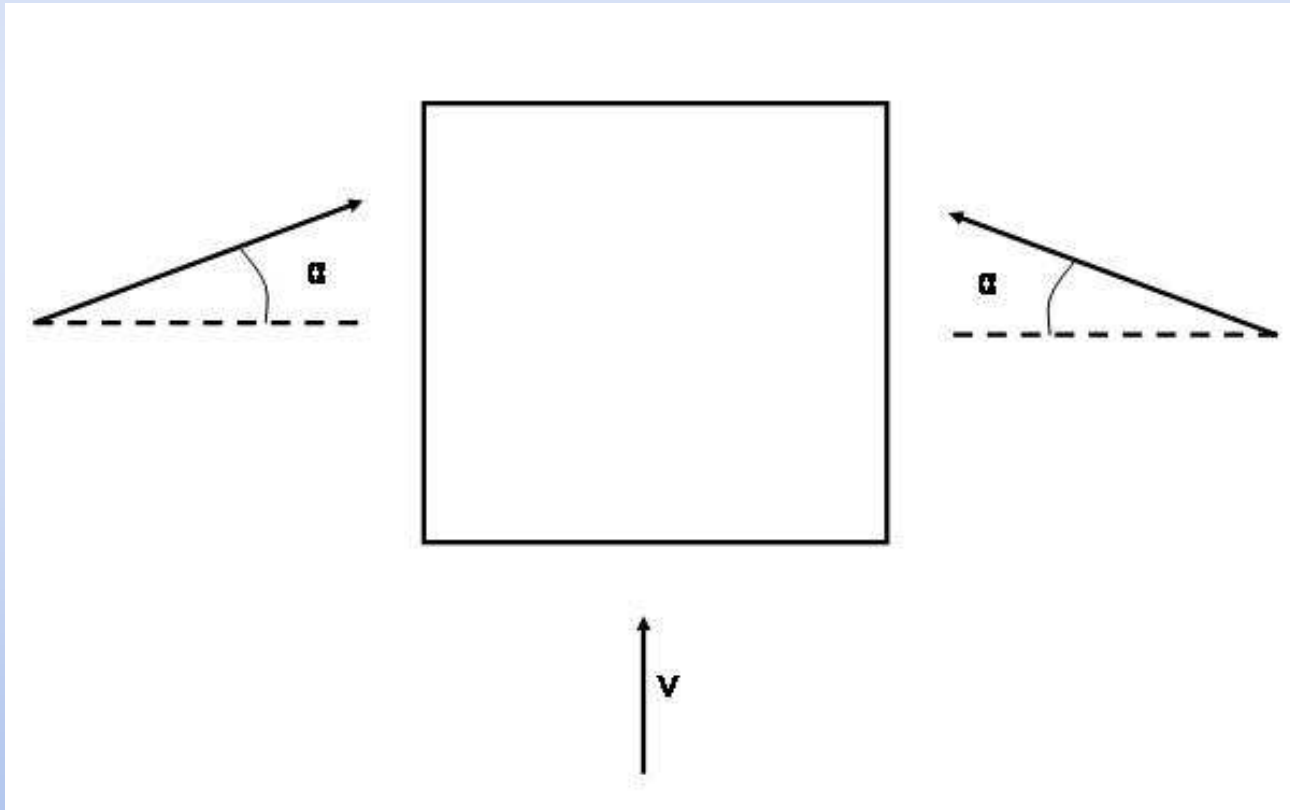


Dále uvažujeme týž proces vzhledem k souřadnicové soustavě  $K$ , která se pohybuje vzhledem k souřadnicové soustavě  $K_0$  konstantní rychlostí  $v$  v záporném směru osy  $z_0$ . Vzhledem k souřadnicové soustavě  $K$  je popis procesu následující:





Těleso  $B$  se pohybuje v kladném směru osy  $z$  rychlostí  $v$ . Oba komplexy záření mají nyní vzhledem k souřadnicové soustavě  $K$  směry, které svírají úhel  $\alpha$  s osou  $x$ . Zákon aberace říká, že v první aproximaci platí  $\alpha=v/c$ , kde  $c$  je rychlost světla. Z úvahy provedené vzhledem k souřadnicové soustavě  $K_0$  víme, že rychlost  $v$  tělesa  $B$  se absorpcí komplexů záření  $S$  a  $S'$  nezmění.



Nyní užitíme zákona zachování hybnosti našeho systému v souřadnicové soustavě  $K$  vzhledem ke směru osy  $z$ .

1. Před absorpcí necht' má těleso  $B$  hmotnost  $M$ ;  $Mv$  je pak výraz pro hybnost tělesa  $B$  (podle klasické mechaniky).

Každý z komplexů záření má energii  $E/2$ , a tudíž podle dobře známého závěru Maxwellovy teorie má hybnost  $E/2c$ . Přesně řečeno je to hybnost komplexu záření  $S$  vzhledem k souřadnicové soustavě  $K_0$ . Avšak je-li  $v$  malé ve srovnání s  $c$ , je hybnost vzhledem k souřadnicové soustavě  $K$  táž až na malou veličinu druhého řádu ( $v^2/c^2$  je malé ve srovnání s 1).

Složka této hybnosti ve směru osy  $z$  je  $(E/2c)\sin\alpha$ , čili s dostatečnou přesností (až na malé veličiny vyššího řádu)  $(E/2c)\alpha$  neboli  $(E/2)(v/c^2)$ . Komplexy záření  $S$  a  $S'$  mají tudíž dohromady hybnost  $E(v/c^2)$  ve směru osy  $z$ .

Celková hybnost systému před absorpcí je tudíž

$$Mv + \frac{E}{c^2} v$$

II. *Po absorpci* nechť má těleso  $B$  hmotnost  $M'$ .

Předpokládáme zde možnost, že hmotnost se zvýší absorpci energie  $E$  (to je nutné proto, aby byl konečný výsledek naší úvahy konzistentní).

Hybnost systému po absorpci je tudíž  $M'v$ .

Nyní předpokládejme platnost zákona zachování hybnosti a aplikujeme jej vzhledem ke směru osy  $z$ . To dává rovnici

$$Mv + \frac{E}{c^2}v = M'v \quad \text{čili} \quad M' - M = \frac{E}{c^2}$$

Tato rovnice vyjadřuje zákon ekvivalence energie a hmotnosti. Vzrůst energie o hodnotu  $E$  je spojen se vzrůstem hmotnosti o hodnotu  $E/c^2$ . Protože energie je podle obvyklé definice určena až na aditivní konstantu, můžeme tuto konstantu volit tak, že platí

$$E = Mc^2.$$

„Jestliže každý gram látky obsahuje tak ohromnou energii, proč to zůstalo tak dlouho nepovšimnuto? Odpověď je dosti jednoduchá: pokud se žádná energie nevydává navenek, nemůže být pozorována. Je to jako kdyby člověk, který je pohádkově bohatý, nikdy neutratil ani nevynaložil jediný cent; nikdo by nemohl říci, jak je bohatý.“

(1946)

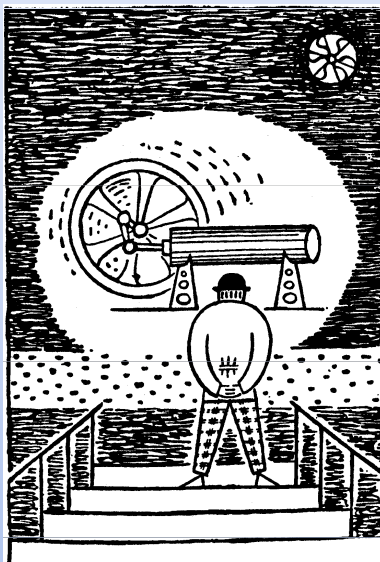
převzato z Albert Einstein,

Z mých pozdějších let (Jak vidím svět II.),

Lidové noviny, Praha 1995

„Dávej pozor, Bondy, co ti řeknu; je to nad lidský rozum, ale není v tom ani kousek švindlu. Tak tedy ten můj Karburátor opravdu spaluje hmotu, dočista spaluje, že z ní nezbude ani prášku; nebo spíš ji rozbije, rozpráší, rozloží v elektrony, zkonzumuje, vymele, já nevím, jak to nazvat; zkrátka úplně ji spotřebuje. Nemáš ani ponětí, jaká ohromná energie je v atomech. S půl centem uhlí v kotli můžeš obeplout parníkem celý svět, osvětlovat celou Prahu, pohánět celou Rustonku nebo co chceš; uhlovým oříškem budeš topit a vařit pro celou rodinu. A nakonec nebude třeba ani uhlí; zatopíme si prvním oblázkem nebo hrstí hlíny, kterou sebereme před domem. Každý kousek hmoty má v sobě víc energie než ohromný parní kotel; jen ji vyždímat! Jen umět hmotu dokonale spálit!“

Karel Čapek, *Továrna na Absolutno*,  
1926



# Může tedy Albert letět rychlostí světla?

- NE, protože by se jeho délka zkrátila na nulu (kontrakce délek).  $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}$
- NE, protože jeho čas by vůbec neplynul (dilatace času)  $\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$
- NE, protože by jej vůbec nešlo na tuto rychlost urychlit:

$$W = Fdx, F = \frac{ma}{\sqrt{\left(1 - \frac{V^2}{c^2}\right)^3}} \Rightarrow E = mc^2 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$

- Albert by tedy musel být foton ( $m_0 = 0$ ).

# Čas a prostor nebo časoprostor

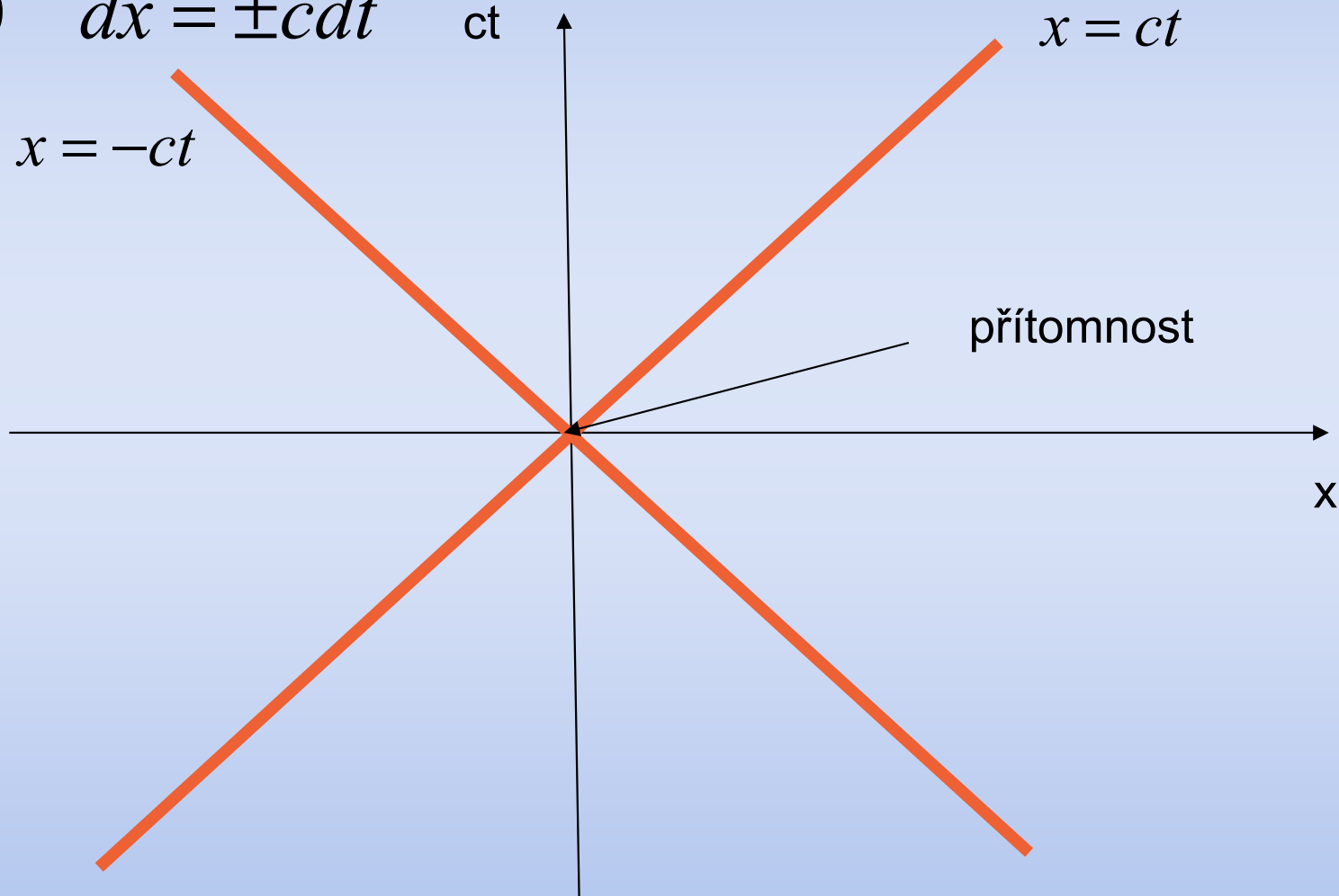
- Přestává být důležitá pouze prostorová vzdálenost  $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2$ , ale podstatná je vzdálenost „časoprostorová“ = interval (pro velmi blízké body  $\Delta x \rightarrow dx$ )

$$ds^2 = c^2 dt^2 - dl^2 = c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

- Takto definovaný interval je invariantní vůči Lorentzově transformaci, což znamená  $ds'^2 = ds^2$

# Minkowskiho kužel

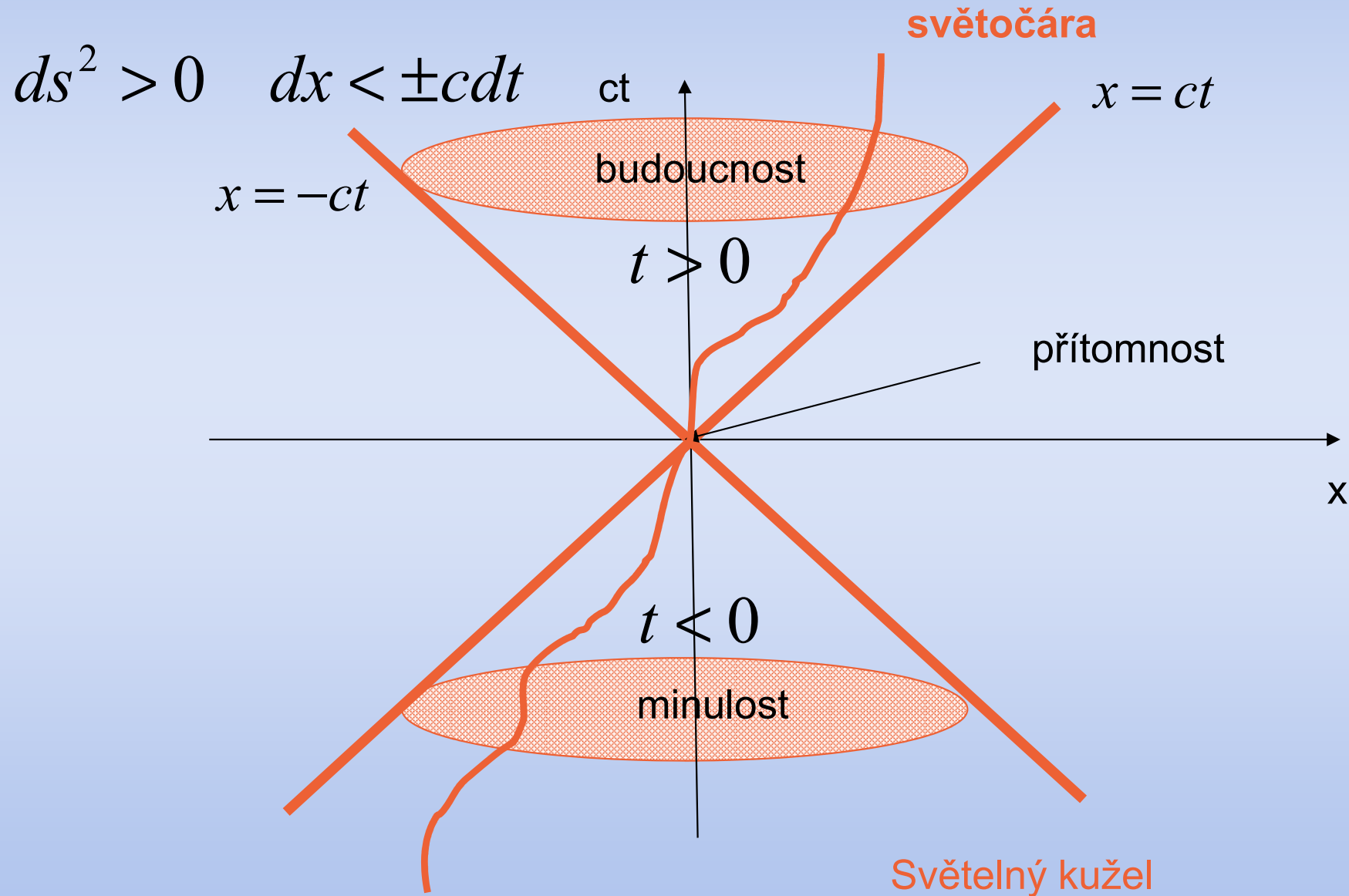
$$ds^2 = 0 \quad dx = \pm c dt$$



Světelný kužel

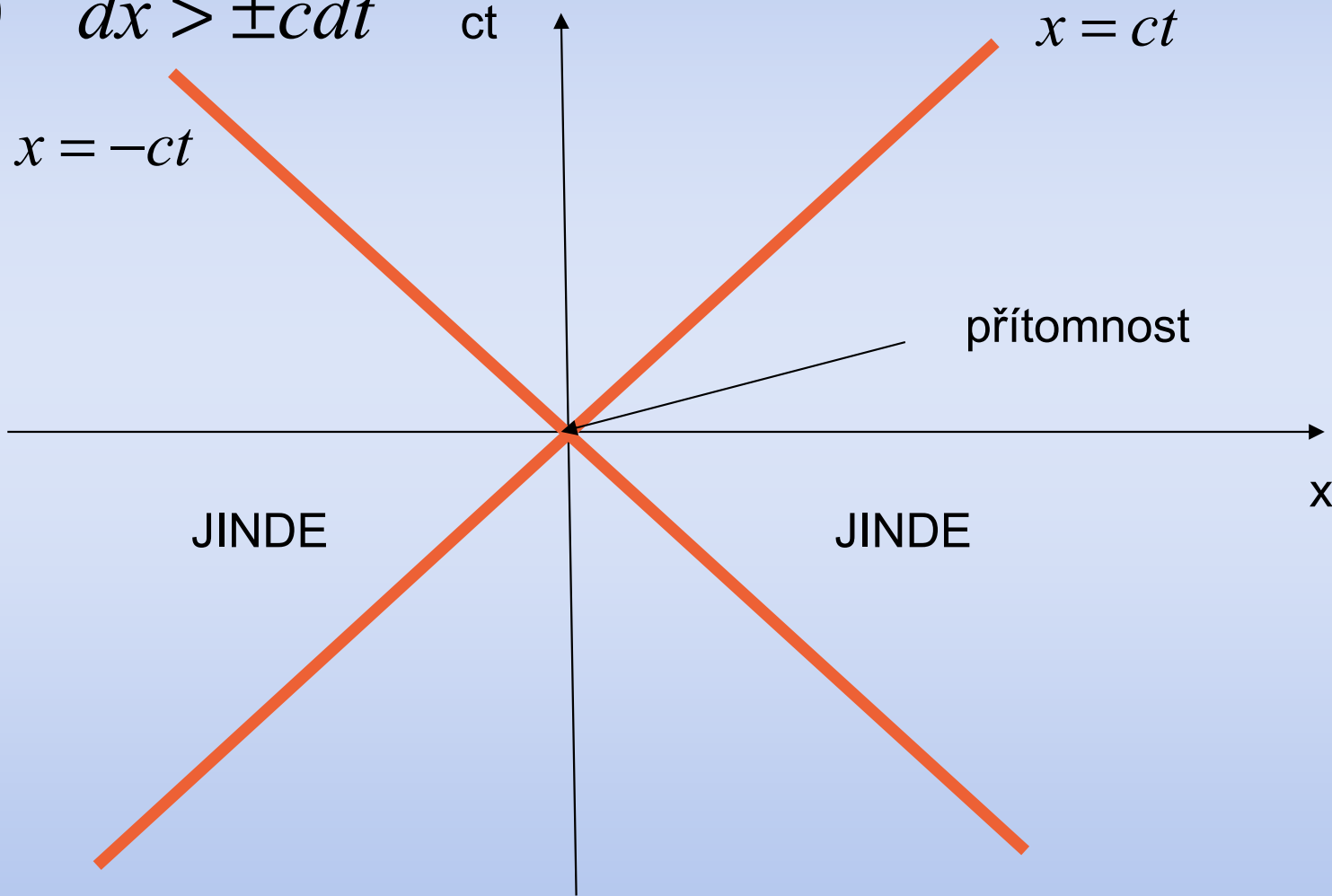


# Minulost a budoucnost



# Jinde

$$ds^2 > 0 \quad dx > \pm cdt$$



$$x = ct$$

$$x = -ct$$

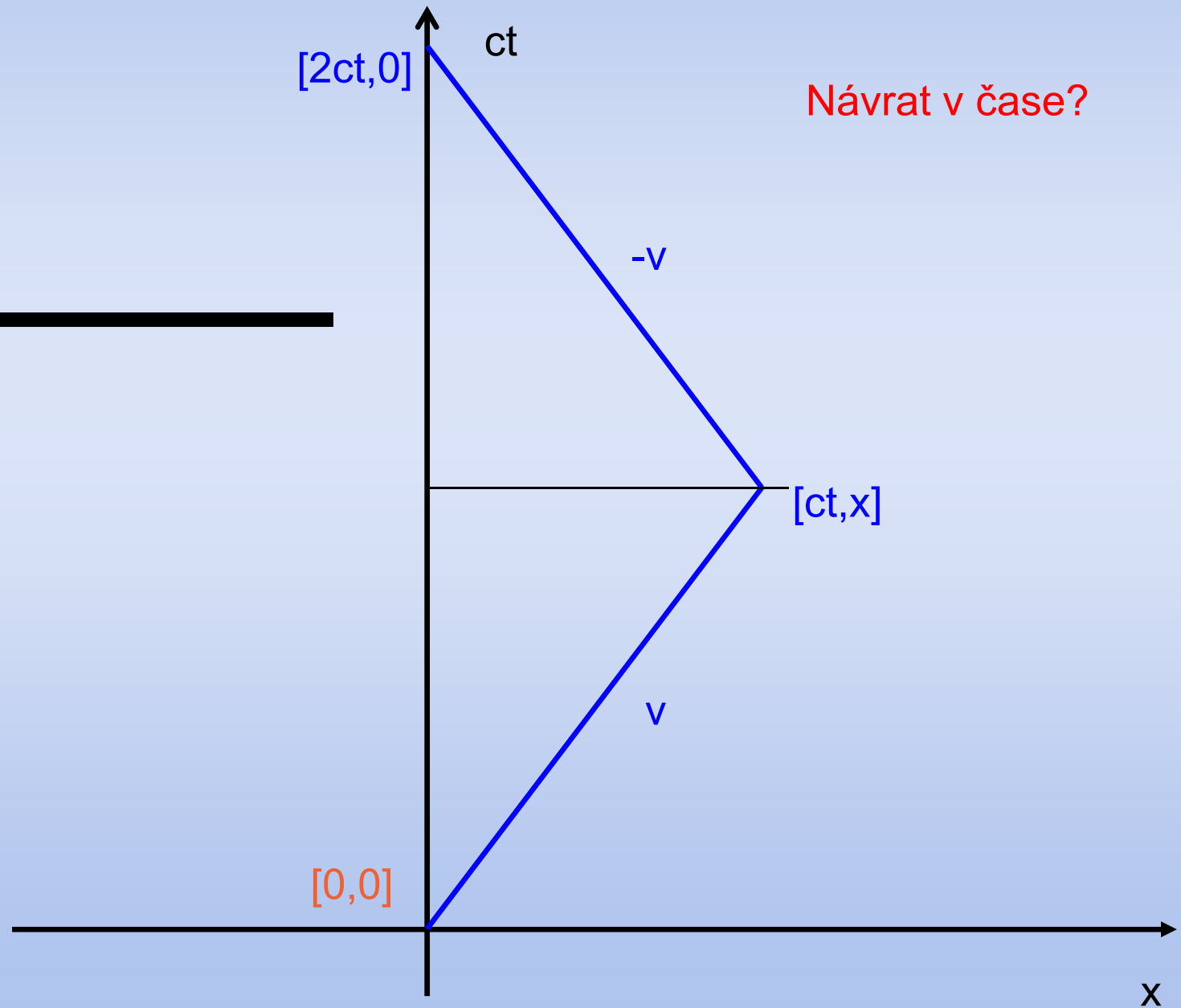
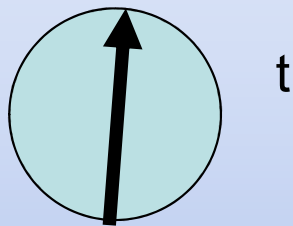
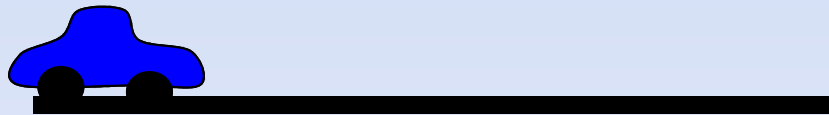
přítomnost

JINDE

JINDE

Světelný kužel

# Návrat v prostoru ( $v < c$ )



# Rozdělení na minulost, přítomnost, budoucnost a jinde je absolutní (invariance intervalu).

- Takže  $ds^2$  nemění při transformaci k nečárkovaným souřadnicím znaménko.
- Minulost zůstává při takovýchto transformacích minulostí a budoucnost budoucností – pro **PODSVĚTELNÉ RYCHLOSTI!**
- Náš svět je kauzální, zatímco svět jinde je nekauzální!!!!

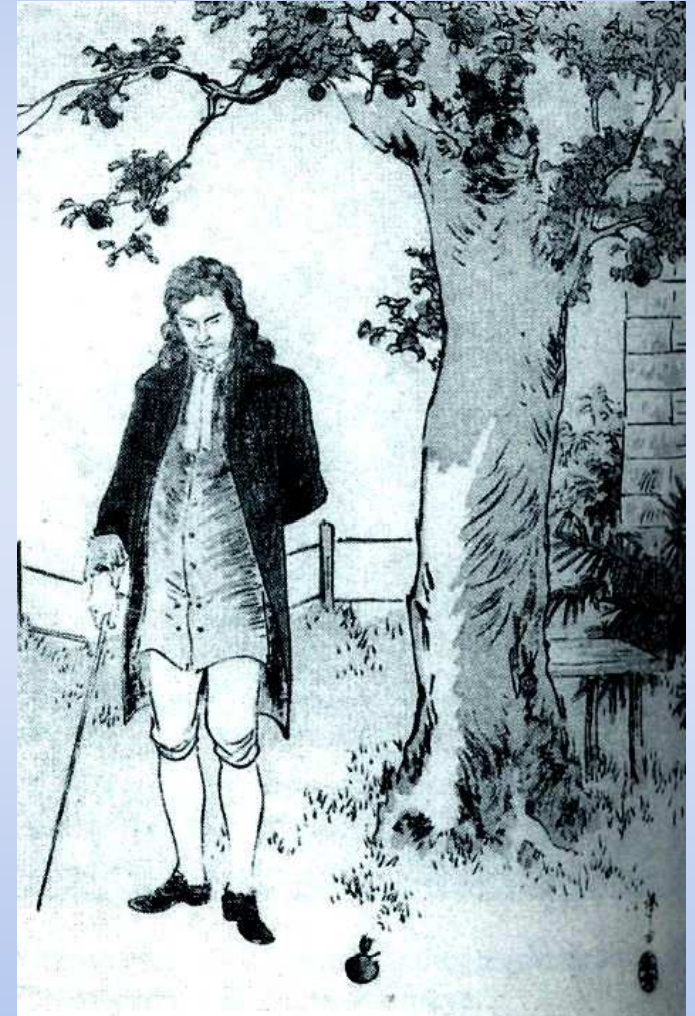
# Kauzalita

- Jsou-li dvě události kauzální (tj. jedna je následkem druhé), musí být jejich pořadí **absolutní**, tj. nezávislé na volbě vztažné soustavy, v níž události popisujeme.
- Uvedené závěry plynou z Lorentzovy transformace pro čas:

$$cdt' = \frac{cdt - \frac{V}{c} dx}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$$
$$\begin{array}{ll} cdt > dx & dt' > dt (V \leq c) \\ cdt = dx & dt' = 0 (V = c) \\ cdt < dx & dt' > 0 \Rightarrow dt < 0 (V > c) \end{array}$$

# Volný pád

- Volný pád = pád v neodporujícím prostředí
- *I.N.: „ ... poznatek gravitace ... byl zprostředkován pádem jablka, když (Newton) seděl a přemýšlel. Proč by měla jablka padat vždy kolmo k zemi, uvažoval. Proč by jejich dráha nemohla vést stranou nebo vzhůru, proč směřuje ustavičně ke středu země? Bezpochyby je příčinou to, že je země přitahuje... je tu síla, které teď říkáme gravitace a která prostupuje celým vesmírem.“*
- *A.E.: „Všechna tělesa padají ve vakuu se stejným zrychlením.“*

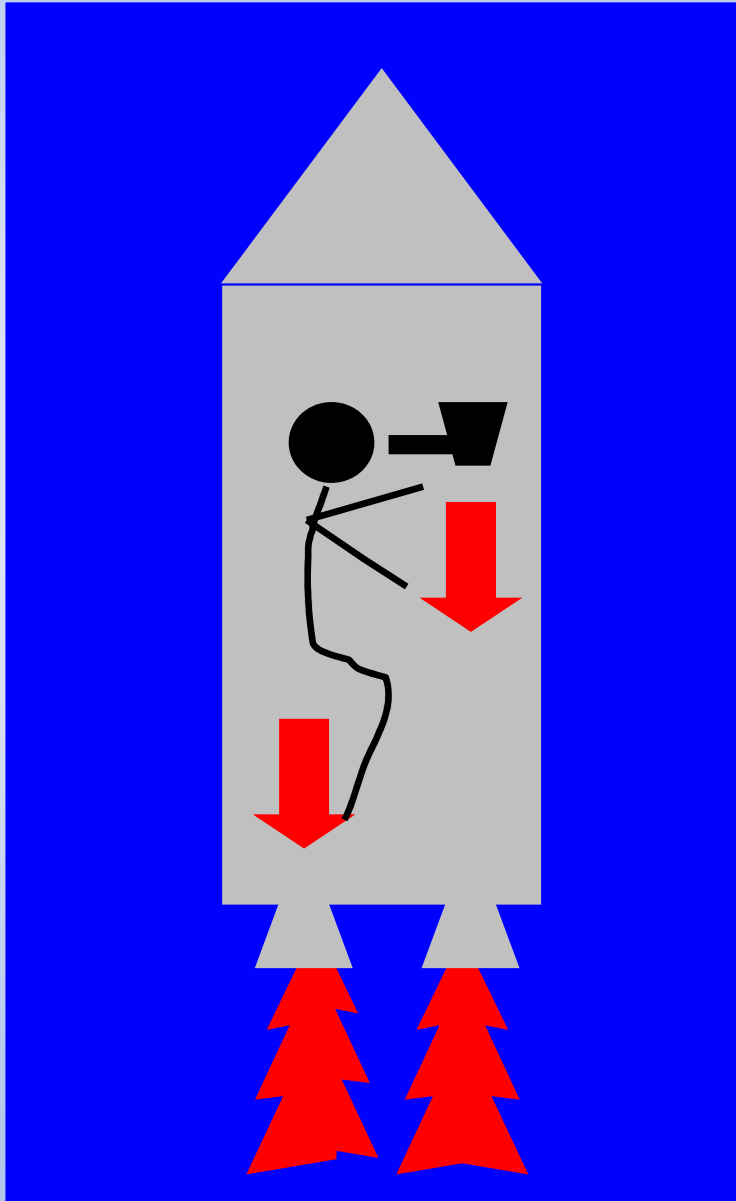


# Tíže a beztíže



- *Tíha = síla, kterou působíme na závěs či na podložku*
- *Ztráta kontaktu se závěsem a podložkou a pád volným pádem = padající osoba je ve stavu beztíže*

# Tíže a beztíže



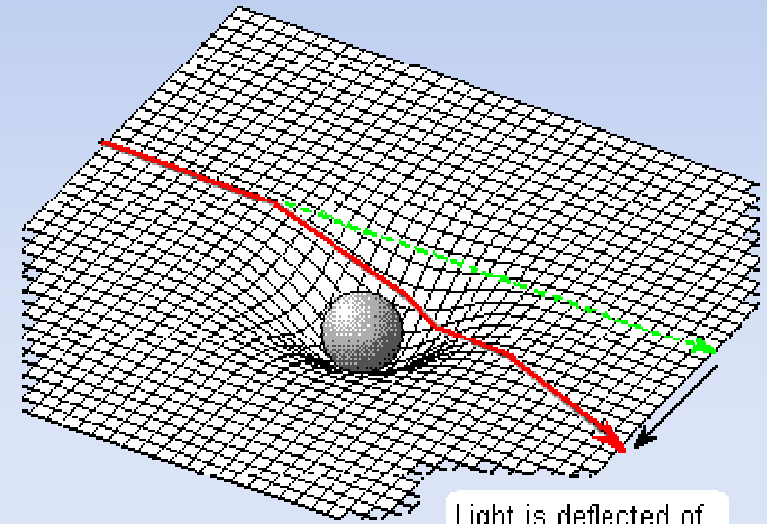
- Možnost simulace účinků gravitačního pole pomocí zrychlení (raketa) – jen lokálně, nehomogenní (a hlavně centrální) pole simulovat nejde!
- A.E.: „Všechna tělesa padají ve vakuu se stejným zrychlením.“ = PRINCIP LOKÁLNÍ EKVIVALENCE
- Výsledná síla působící na těleso ve stavu beztíže je nulová  
LOKÁLNĚ GEODETICKÝ SYSTÉM



# Základy OTR

- Einsteinova rovnice

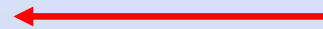
$$G_{ik} = \kappa T_{ik}$$



nrumiano



Prostor říká hmotě,  
jak se v něm má  
pohybovat.

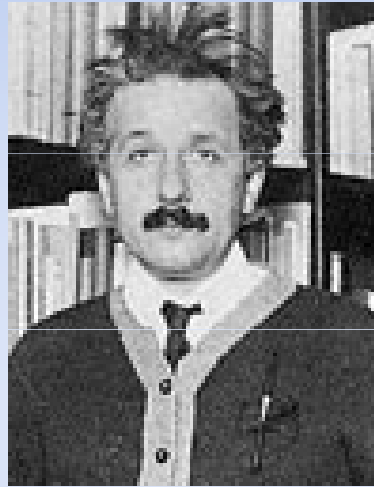


Hmota říká prostoru,  
jak se má zakřivit.

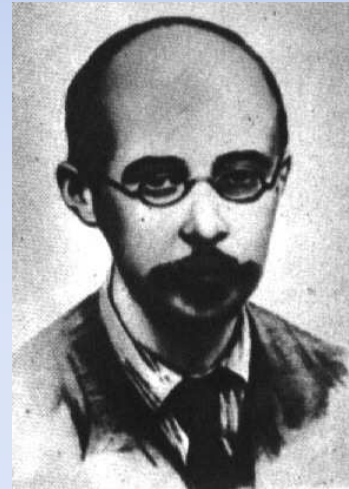
# Základy kosmologie

- Kosmologický princip – vesmír je homogenní a izotropní  $\Rightarrow$  dána volba  $T_{ik}$
- Einstein 1917 – první kosmologický model
- Vesmír je prostorově uzavřený (kladná křivost) a statický
- Nutnost zavedení kosmologické konstanty ozn.  $\Lambda$
- Friedmann 1922: vesmír s kladnou křivostí, ale s časovým vývojem
- Celá třída modelů – jen si vybrat

# Einstein kontra Fridman



*„Výsledky týkající se nestacionárního vesmíru, obsažené v této práci, se mi zdají být podezřelé.“*  
Ve Fridmanově článku je chyba, „význam této práce je v tom, že dokazuje (nutnost) konstantnosti (poloměru vesmíru v čase).“



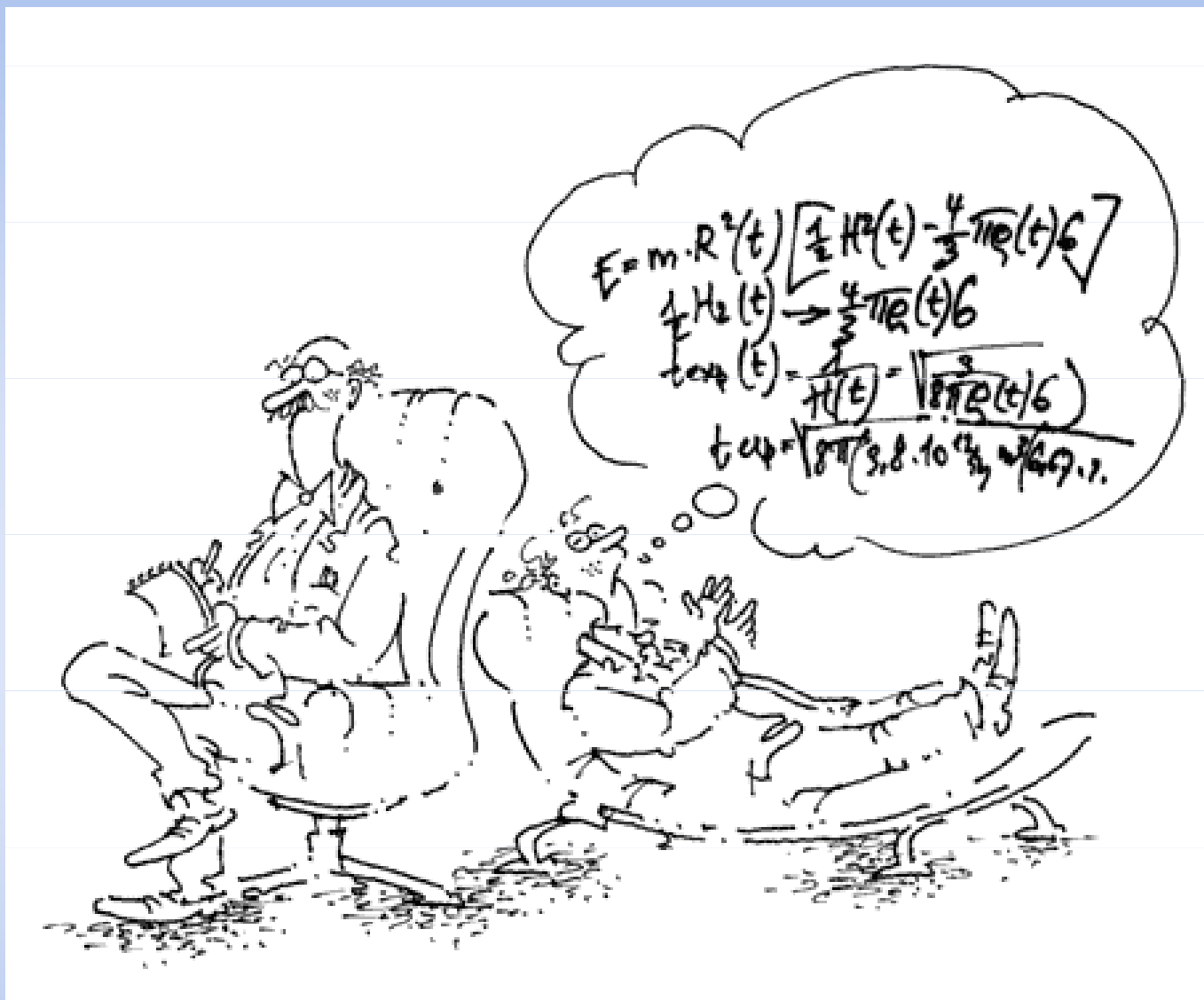
*Existují i nestatické modely vesmíru s kladnou prostorovou křivostí.*

Osobní dopis, obsahující pravděpodobně podrobný výpočet výsledků uvedených v článku.

# Uznání génia



- „V předchozí poznámce jsem podrobil kritice výše uvedenou práci. Ale má kritika, jak jsem se ujistil z Friedmannova dopisu doručeného mi panem Krutkovem, se zakládala na chybě ve výpočtech. Považuji Friedmannovy výsledky za správné a vrhající na problém nové světlo. Ukazuje se, že polní rovnice povolují spolu se statickými i dynamické (tj. v čase proměnné) centrálně-symetrické řešení pro strukturu prostoru.“ (1923)
- 1932 – Einsteinův – de Sitterův model vesmíru: vytvořen na základě uznání Friedmannových výsledků



Děkuji za pozornost.