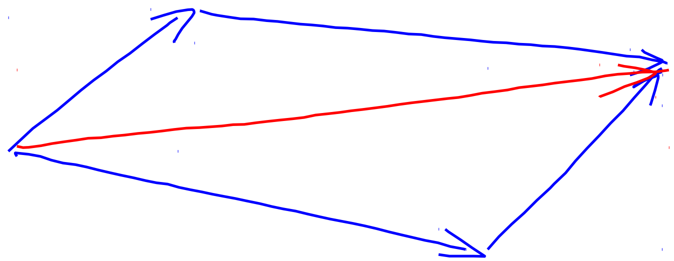
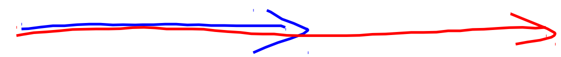
VEKTOROVÉ PROSTORY

Ze středoškolské fyziky známe „vektory"



součet vektorů

$c \cdot \vec{u}$ násobení vektoru skalárem



Tyto dvě operace mají některé hezké vlastnosti.

Zobecněním těchto vektorů a operací vznikl pojem **vektorového prostoru**. V dalším $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

(5) $\forall a \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u}, \vec{v} \in U \qquad a \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = (a \cdot \vec{u}) + (a \cdot \vec{v})$

(6) $\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in U \qquad (a+b) \cdot \vec{u} = (a \cdot \vec{u}) + (b \cdot \vec{u})$

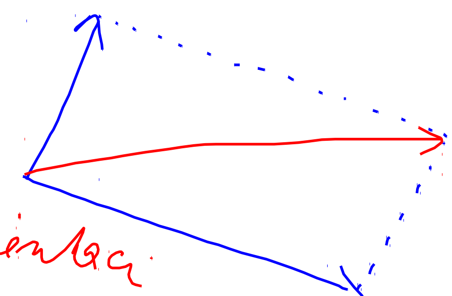
(7) $\forall a, b \in \mathbb{K},\ \forall \vec{u} \in U \qquad a \circ (b \circ \vec{u}) = (a \cdot b) \circ \vec{u}$

(8) $\forall \vec{u} \in U \qquad 1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Příklady:

① Vektory v $\mathbb{R}^2$ .... geometrické orientované úsečky s počátkem v nějakém pevném bodě

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ sčítání pomocí rovnoběžníku



násobení číslem a, $a > 0$
vynásobíme délku a necháme orientaci
$a < 0$ změníme orientaci a vynásobíme délku abs. hodnotou

5

(2) $U = \mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots x_n),\ x_i \in \mathbb{R}\}$

$(x_1, x_2, \dots x_n) + (y_1, y_2, \dots y_n) = (x_1+y_1, \dots, x_n+y_n)$

$a(x_1, x_2, \dots x_n) = (ax_1, ax_2, \dots ax_n)$

$\mathbb{R}^n$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$ (skaláry jsou $\mathbb{R}$)

(3) $U = \mathbb{C}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n),\ x_i \in \mathbb{C}\}$

$\mathbb{K} = \mathbb{C}$ $\quad a(x_1, x_2, \dots x_n) = (ax_1, ax_2, \dots a \cdot x_n)$

součet rovněž stejně jako ve 2

$\mathbb{C}^n$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$.

7

Definice sčítání pro zobrazení $M \to \mathbb{K}$

$$f, g : M \to \mathbb{K} \qquad f+g : M \to \mathbb{K}$$

$$\forall m \in M : \quad (f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

$$a \in \mathbb{K} \qquad af : M \to \mathbb{K}$$

$$(af)(m) = a \cdot f(m)$$

Takto definované operace mají požadované vlastnosti, neboť operace $+$ a $\cdot$ na $\mathbb{K}$ mají podobné vlastnosti.

6 Příklad z matematické analýzy

$[a, b]$ interval $\quad C[a,b]$ jsou spojité reálné funkce na konkrétním intervalu

Z vlastností operací + a · v definici vekt. prostoru lze odvodit další vlastnosti (tyto vlastnosti pak obvykle v příkladech zřejmé).

Další vlastnosti operací + a ·

(1) Pro $0 \in \mathbb{K}$ a $\vec{u} \in U$ platí $0 \cdot \vec{u} = \vec{0}$

$$(0+0)\cdot\vec{u} = 0\cdot\vec{u} \quad (6)$$

$$0\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{u} = 0\cdot\vec{u}$$

Vezmeme opačný prvek k $0\cdot\vec{u}$ a přičteme zprava k rovnici

$$\left(0\cdot\vec{u} + 0\cdot\vec{u}\right) + \left(-0\cdot\vec{u}\right) = 0\cdot\vec{u} + \left(-0\cdot\vec{u}\right)$$

$$(2) \quad 0\cdot\vec{u} + \left(0\cdot\vec{u} + \left(-0\cdot\vec{u}\right)\right) = \vec{0} \quad (4)$$

$$0\cdot\vec{u} + \vec{0} \;(4) = \vec{0}$$

$$0\cdot\vec{u} = \vec{0}$$

11

4 $$(-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}$$

$$(1+(-1))\cdot\vec{u} = 0\cdot\vec{u} = \vec{0}$$

$$1\cdot\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{0}$$

$$\vec{u} + (-1)\vec{u} = \vec{u} + (-\vec{u})$$ přičteme zleva $-\vec{u}$

$$-\vec{u} + \left(\vec{u} + (-1)\vec{u}\right) = -\vec{u} + \left(\vec{u} + (-\vec{u})\right)$$

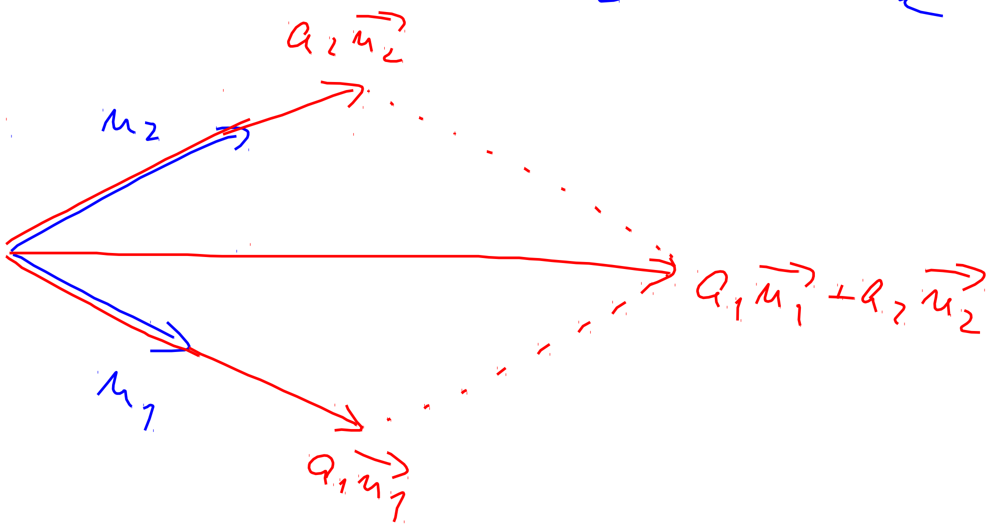
$$\underbrace{(-\vec{u} + \vec{u})}_{\vec{0}} + (-1)\cdot\vec{u} = \underbrace{(-\vec{u} + \vec{u})}_{\vec{0}} + (-\vec{u})$$

$$\vec{0} + (-1)\vec{u} = \vec{0} + (-\vec{u})$$

$$(-1)\cdot\vec{u} = -\vec{u}.$$

Lineární kombinace vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ je vektor

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k = \sum_{i=1}^{k} a_i\vec{u}_i \in U.$$



Vektorový podprostor vekt. prostoru U je neprázdná podmnožina $V \subseteq U$ taková, že platí:

(1) $\forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V \quad \vec{v}_1 + \vec{v}_2 \in V$

(2) $\forall a \in K \ \forall \vec{v} \in V \quad a\vec{v} \in V$

13

Príklady: 1) $V = \{ (s+t,\ s-t,\ 2t) \in \mathbb{R}^3,\ \ s,t \in \mathbb{R} \} \subseteq \mathbb{R}^3$ vekt. priestor.

Ukážeme, že V je vekt. podpriestor

$$v_1 = (s+t,\ s-t,\ 2t) \in V$$

$$v_2 = (\bar{s}+\bar{t},\ \bar{s}-\bar{t},\ 2\bar{t}) \in V$$

$$v_1+v_2 = \left((s+\bar{s})+(t+\bar{t}),\ (s+\bar{s})-(t+\bar{t}),\ 2(t+\bar{t}) \right) \in V$$

$$a v_1 = (as+at,\ as-at,\ 2at) \in V$$

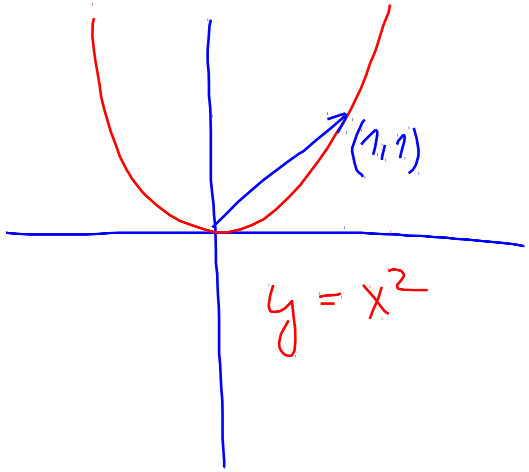
2) $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^n,\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\ Ax = 0 \right\}$ A je nejaká matica $k \times n$

$V \subseteq \mathbb{R}^n$, V je vektorový podpriestor

$x, y \in V$ $Ax = 0$, $Ay = 0$, $A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$

$x + y \in V$

3 Jak vypadají všechny podprostory v $\mathbb{R}^2$?



$2 \cdot (1,1) = (2,2)$ neleží na parabole

Parabola není vekt. podprostor.

<u>Lemma</u> Je-li $V \subseteq U$ vekt. podprostor, pak $\vec{o} \in V$.

$V \neq \emptyset$. Nechť $\vec{v} \in V$, potom $a \cdot \vec{v} \in V$, vezmeme $a = 0$.

$$0 \cdot \vec{v} = \vec{o} \in V.$$

Lemma V každém vektorovém prostoru U jsou vždy podprostory $\{\vec{o}\}$ a celé U. Mluvíme o triviálních podprostorech.

Vraťme se k $\mathbb{R}^2$. Může mít podprostory

$\{(0,0)\}$

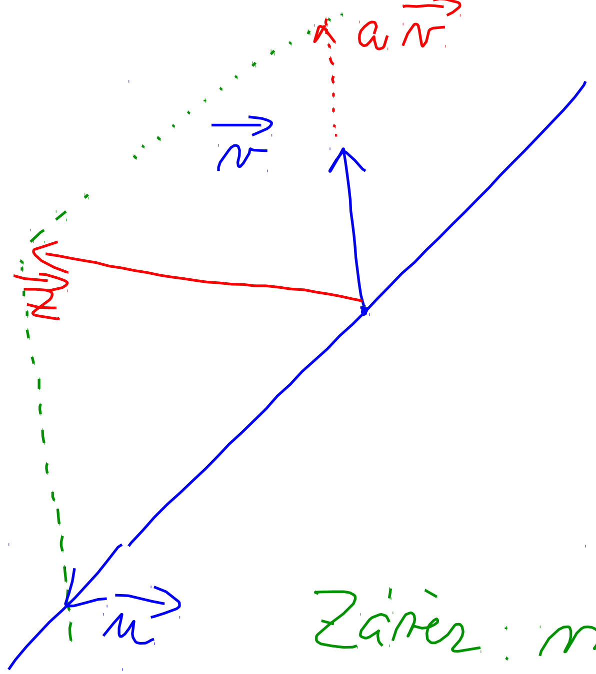
$\mathbb{R}^2$

Nechť podprostor v $\mathbb{R}^2$ obsahuje nenulový vektor $\vec{v}$. Pak obsahuje všechny jeho násobky. Jeho násobky vytvoří přímku procházející počátkem.

Taková přímka je rovněž vekt. podprostorem.

K seznamu podprostorů v $\mathbb{R}^2$ přidáme všechny přímky procházející počátkem.

Je-li V podprostor v $\mathbb{R}^2$, který obsahuje přímku procházející počátkem a navíc ještě nějaký vektor, pak $V = \mathbb{R}^2$.



$\vec{z} = \vec{u} + a\vec{v}$

$\vec{u}$: leží na přímce, tedy ve V

$a\vec{v}$: leží ve V

$\vec{z}$ jako součet vektorů z V leží ve V

Závěr: všechny vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou $\{(0,0)\}$, přímky procházející počátkem, $\mathbb{R}^2$.

Všechny podprostory v $\mathbb{R}^3$: $\{(0,0,0)\}$, přímky proch. počátkem, roviny proch. počátkem, $\mathbb{R}^3$

Lineární obal vektorů

Nechť U je vekt. podprostor nad $\mathbb{K}$ a $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k \in U$. Potom lineární obal vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ je množina

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k] = \{u \in U;\ \exists a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K},\ u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k\}$$

$$= \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i u_i \in U,\ a_i \in \mathbb{K} \right\}$$

značíme $[\emptyset] = \{\vec{0}\}$.

Věta: Lineární obal konečné množiny vektorů je vektorový podprostor.

Důkaz: $[\emptyset] = \{\vec{0}\}$ je vekt. podprostor.

Mějme

$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k] = \left\{ \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{u}_i, \; a_i \in \mathbb{K} \right\}$$

$u, v \in [\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k]$, nechť

$$u = \sum_{i=1}^{k} a_i \vec{u}_i, \quad v = \sum_{i=1}^{k} b_i \vec{u}_i$$

$$u + v = \sum a_i \vec{u}_i + \sum b_i \vec{u}_i = \sum_{i=1}^{k} (a_i u_i + b_i u_i) =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} (a_i + b_i) \vec{u}_i \in [u_1, \dots u_k]$$

Podobně s násobkem.

Úloha: Je vektor $\vec{v} \in V$ prvkem lin. obalu $[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k]$?

Vede k hledání řešení rovnice

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k = \vec{v}$$

s neznámými $a_1, a_2, \dots a_k$.

Příklad: $V = Mat_{2\times 2}(\mathbb{R})$

Je $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in \left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$?

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + a_2 \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

(20)

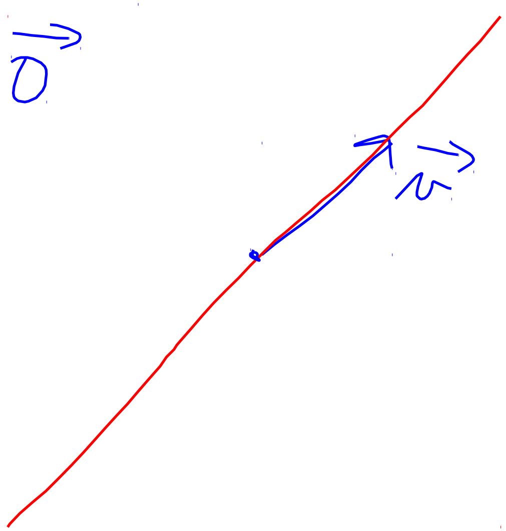
Porovnáním dostaneme soustavu 4 rovnic o neznámých a_1, a_2

$$\left.\begin{aligned} 1 &= a_1 \\ 2 &= 2a_1 + 2a_2 \\ 3 &= a_2 \\ 4 &= a_1 + a_2 \end{aligned}\right\} \text{ soustava nemá řešení}$$

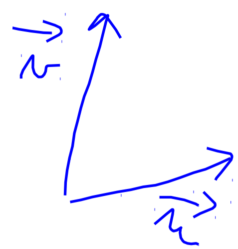
Tedy $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ není v lin. obalu.

Geometrická představa o lin. obalu v $\mathbb{R}^2$

$\vec{v} \neq \vec{0}$



$[\vec{v}] = \{a\vec{v},\ a \in \mathbb{R}\}$ přímka

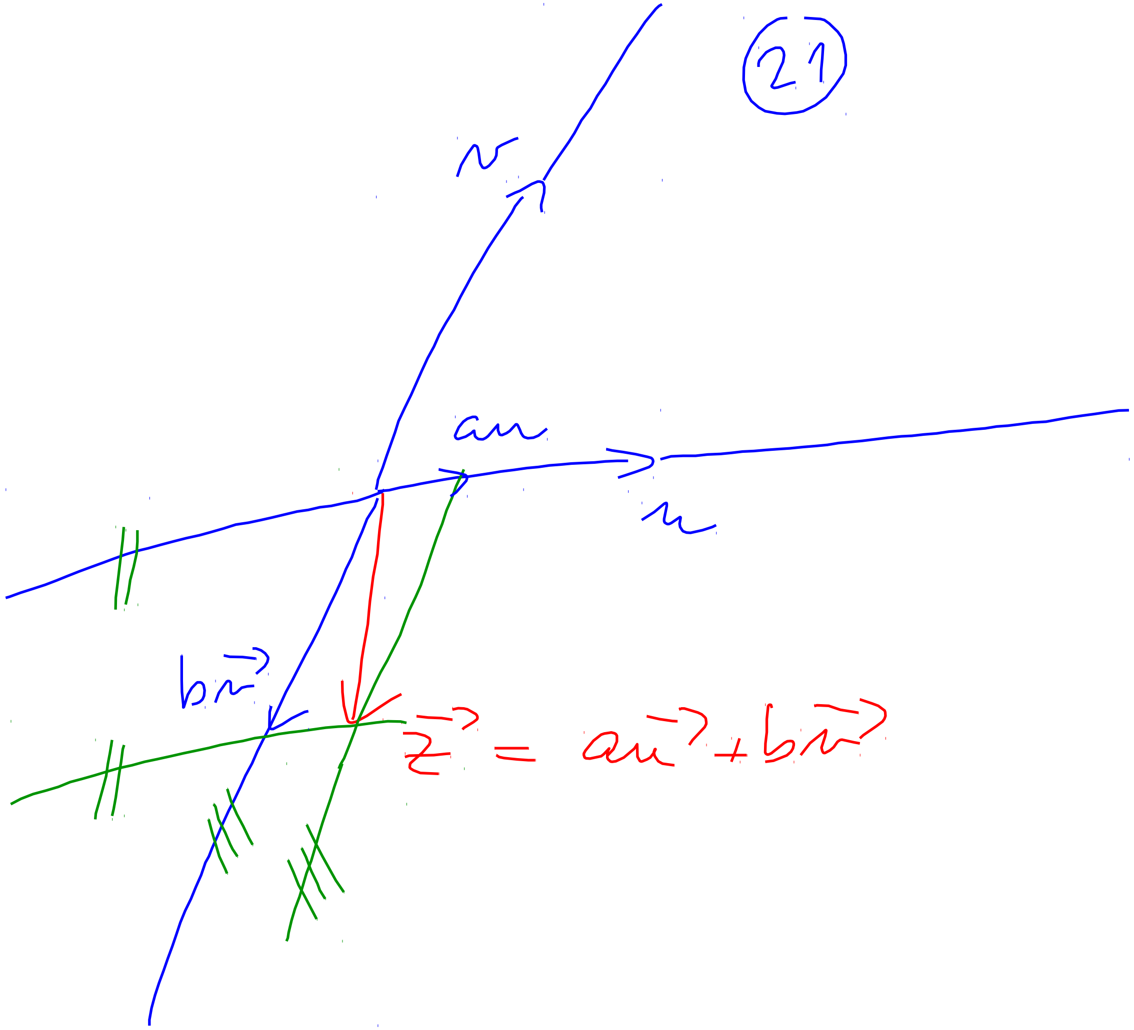


$[\vec{u}, \vec{v}] = \mathbb{R}^2$

Každý vektor $\mathbb{R}^2$ lze napsat

$a\vec{u} + b\vec{v}$

21



$\vec{z} = a\vec{u} + b\vec{v}$

Lineární závislost a nezávislost vektorů

U vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k \in U$

Vektory $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k$ jsou lineárně závislé, jestliže existuje k-tice čísel $(a_1, a_2, \dots a_k) \in \mathbb{K}^k$ různá od $(0, 0, \dots 0)$ taková, že

$$a_1 \vec{u}_1 + a_2 \vec{u}_2 + \dots + a_k \vec{u}_k = \vec{0}.$$

Jestliže bereme $a_1 = a_2 = \dots = a_k = 0$, pak

$$a_1 \vec{u}_1 + \dots + a_k \vec{u}_k = 0 \, \vec{u}_1 + \dots + 0 \, \vec{u}_k = \vec{0} + \vec{0} + \dots + \vec{0} = \vec{0} \quad \text{VŽDY.}$$

<u>Jinak:</u> Vektory $\vec{u_1}, \dots \vec{u_k}$ jsou lin. závislé, jestliže rovnice $a_1\vec{u_1}+\dots+a_k\vec{u_k}=\vec{0}$ s neznámými $a_1, a_2, \dots a_k$ má řešení $(a_1, a_2, \dots a_k) \neq (0, 0, \dots 0)$.

Vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ jsou lineárně nezávislé, jestliže $\forall\, a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}$ platí

$$a_1\vec{u_1}+a_2\vec{u_2}+\dots+a_k\vec{u_k}=\vec{0} \Longrightarrow a_1=a_2=\dots=a_k=0$$

<u>Jinak:</u> Vektory $u_1, u_2, \dots u_k$ jsou lin. nezávislé, jestliže rovnice $a_1\vec{u_1}+a_2\vec{u_2}+\dots+a_k\vec{u_k}=\vec{0}$ s neznámými $a_1, a_2, \dots a_k$ má $\boxed{\text{pouze}}$ nulové řešení $(a_1, a_2, \dots a_k) = (0, 0, \dots 0)$