LIN. ZOBRAZENÍ

U, V vekt. prostory nad $\mathbb{K} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

$\varphi : U \longrightarrow V$ je lineární, jestliže

(1) $\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2)$

(2) $\varphi(au) = a\varphi(u)$

Další odvozené vlastnosti

I. $\varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2) = a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2)$

$$\varphi(a_1 u_1 + a_2 u_2) \overset{(1)}{=} \varphi(a_1 u_1) + \varphi(a_2 u_2) \overset{(2)}{=} a_1 \varphi(u_1) + a_2 \varphi(u_2)$$

II. $\varphi(\vec{o}) = \vec{o}$

$$\varphi(\vec{o}) = \varphi(0\cdot\vec{u}) = 0\cdot\varphi(\vec{u}) = \vec{o}$$

Další příklady lin. zobrazení

4) $\mathbb{C}^M = \{ f : M \to \mathbb{C} \}$ vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

$m_0 \in M$ pevné

$\varphi : \mathbb{C}^M \to \mathbb{C}$ $\quad \varphi(f) = f(m_0)$

je lineární zobrazení $\quad \varphi(f+g) = (f+g)(m_0) = f(m_0) + g(m_0) = \varphi(f) + \varphi(g)$

5 Derivace

$$C^1(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ má spojitou 1. derivaci} \}$$

$$C(\mathbb{R}) = \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f \text{ je spojitá} \}$$

$\varphi(f) = f'$ $\quad \varphi : C^1(\mathbb{R}) \to C(\mathbb{R})$ je lineární

$$\varphi(f+g) = (f+g)' = f' + g' = \varphi(f) + \varphi(g)$$

$$\varphi(af) = (af)' = af' = a\varphi(f)$$

6 Určitý integrál

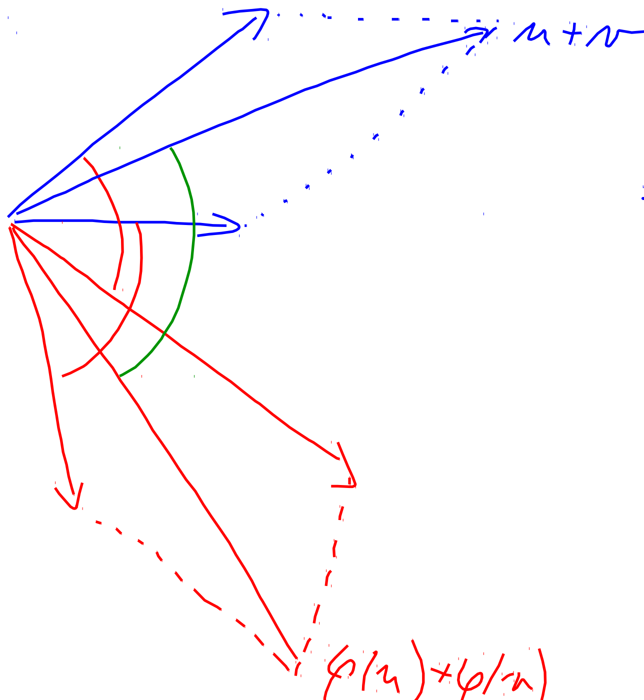
$$C[a,b] = \{ f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ je spojitá} \}$$

$$\varphi : C[a,b] \to \mathbb{R}, \quad \varphi(f) = \int_a^b f(x)\,dx$$

φ je lineární $\quad \varphi(f+g) = \int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx = \varphi(f) + \varphi(g)$

7 Geometrická zobrazení známá ze střední školy

– otočení kolem počátku v $\mathbb{R}^2$ o úhel α



- symetrie podle osy procházející počátkem v $\mathbb{R}^2$
- symetrie podle přímky nebo roviny procházející počátkem v $\mathbb{R}^3$
- posunutí o nenulový vektor v $\mathbb{R}^2$ není lineární, neboť obrazem $\vec{0}$ není $\vec{0}$

Věta: Nechť U, V jsou vektorové prostory nad K a $\varphi: U \to V$ je lineární. Jestliže U má konečnou dimenzi, pak φ je jednoznačně určeno svými hodnotami na vektorech báze.

Důkaz: Nechť $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ je nějaká báze v U. Nechť $u \in U$ je libovolný. Pak u lze jednoznačně psát jako

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$

Potom

$$\varphi(u) = \varphi\left(\sum_{i=1}^{n} a_i u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi(u_i)$$

Hodnotu $\varphi(u)$ spočítáme pouze pomocí hodnot $\varphi(u_i)$ a souřadnic vektoru u.

Příklady na duální věci

1. Každé lineární zobrazení z $\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ je tvaru

$$\varphi(x) = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n \qquad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

V $\mathbb{C}^n$ vezmeme stand. bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \dots$$

Potom

$$\varphi(x) = \varphi(x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n) = x_1 \underbrace{\varphi(e_1)}_{a_1 \in \mathbb{C}} + x_2 \underbrace{\varphi(e_2)}_{a_2 \in \mathbb{C}} + \dots + x_n \underbrace{\varphi(e_n)}_{a_n \in \mathbb{C}}$$

$$= a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n.$$

2 Každé lin. zobrazení z $\mathbb{R}^n$ do $\mathbb{R}^k$ je tvaru

$$\varphi(x) = Ax,$$

kde $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ a A je reálná matice tvaru $k \times n$.

V $\mathbb{R}^n$ vezmeme opět stand. bázi $e_1, e_2, \dots, e_n$.

$\varphi(e_1), \varphi(e_2), \dots \varphi(e_n) \in \mathbb{R}^k$ bereme je jako sloupce

$$\varphi(e_j) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{kj} \end{pmatrix}$$

$$\varphi(x) = \varphi(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n) =$$

$$= x_1\varphi(e_1) + \dots + x_n\varphi(e_n) =$$

$$= x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{k1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{k2} \end{pmatrix} + \dots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sum_j x_j a_{1j} \\ \sum_j x_j a_{2j} \\ \vdots \\ \sum_j x_j a_{kj} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum a_{1j} x_j \\ \sum a_{2j} x_j \\ \vdots \\ \sum a_{kj} x_j \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$= Ax$$

Lemma Identické zobrazení $id : U \to U$, $id(u) = u$ je lineární zobrazení. Složení dvou lin. zobrazení je lineární.

Dk: $\varphi : U \to V$, $\psi : V \to Z$, $\psi \circ \varphi : U \to Z$

$$\psi \circ \varphi(u_1 + u_2) = \psi(\varphi(u_1 + u_2)) = \psi(\varphi(u_1) + \varphi(u_2)) = \psi\varphi(u_1) + \psi\varphi(u_2)$$

Každé lineární zobrazení má dva důležité podprostory.

$$\varphi : U \longrightarrow V$$

Jádro φ ... $\ker \varphi = \{u \in U,\ \varphi(u) = \vec{o}\}$
(kernel)

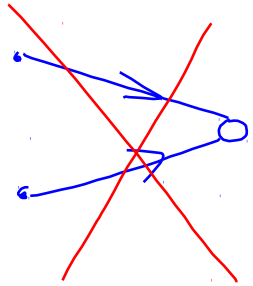
Obraz φ $\quad \operatorname{im} \varphi = \{v \in V,\ \exists u \in U\ \ v = \varphi(u)\}$
(image)
$$= \{\varphi(u) \in V,\ u \in U\}$$

<u>Lemma</u> Jádro a obraz φ jsou podprostory v U, resp. V.

Důkaz pro jádro.
$\ker \varphi \neq \emptyset$ neboť $\vec{o} \in \ker \varphi$
$u_1, u_2 \in \ker \varphi$, tedy $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) = \vec{o}$.
$\varphi(u_1 + u_2) = \varphi(u_1) + \varphi(u_2) = \vec{o} + \vec{o} = \vec{o}$ tedy $u_1 + u_2 \in \ker \varphi$
Obdobně pro násobek.

Lemma: Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je prosté (injektivní), právě když $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$.

Důkaz: Injektivní zobrazení … $\varphi(u_1) = \varphi(u_2) \Longrightarrow u_1 = u_2$.



Důkaz lemmatu

φ je injektivní $\Longrightarrow \ker \varphi = \{\vec{o}\}$.

Nechť $u \in \ker \varphi$. Pak $\varphi(u) = \vec{o} = \varphi(\vec{o})$. Protože φ je injektivní, musí být $u = \vec{o}$.

$\ker \varphi = \{\vec{o}\} \Longrightarrow \varphi$ je injektivní.

$u_1, u_2 \in U$, $\varphi(u_1) = \varphi(u_2)$.

$$\varphi(u_1) - \varphi(u_2) = \vec{o}$$

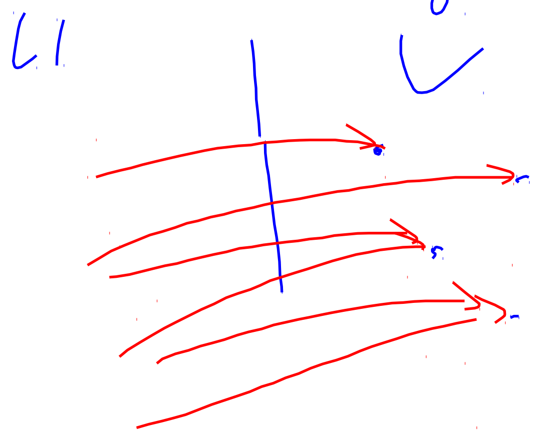
$$\varphi(u_1 - u_2) = \vec{o}$$

Protože $\ker \varphi = \{\vec{o}\}$ a $u_1 - u_2 \in \ker \varphi$, tedy $u_1 - u_2 = \vec{o} \Longrightarrow u_1 = u_2$ a φ je injektivní.

Lemma: $\varphi: U \to V$ je na (surjektivní) právě když

$$\operatorname{im} \varphi = V.$$

Toto platí pro všechna zobrazení, nejen lineární a je to v podstatě definice surjektivního zobrazení



Věta o dimenzích jádra a obrazu

Nechť $\varphi: U \to V$ je lineární a U má konečnou dimenzi. Pak platí:

$$\dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi = \dim U.$$

12

Důkaz: $\ker\varphi \subseteq U$, $\operatorname{im}\varphi \subseteq V$

Vybereme nejdříve nějakou bázi podprostoru $\ker\varphi$

$u_1, u_2, \dots, u_k$

Tuto bázi doplníme na bázi celého prostoru U

$u_1, u_2, \dots, u_k, u_{k+1}, \dots, u_n$

Nyní $\dim\ker\varphi = k$, $\dim U = n$, pokusíme dokázat, že

$$\dim\operatorname{im}\varphi = n-k.$$

K tomu stačí dokázat, že vektory

$$\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$$

tvoří bázi $\operatorname{im}\varphi$

(1) Tyto vektory generují $\operatorname{im}\varphi$. Typický prvek v $\operatorname{im}\varphi$ je $\varphi(u)$, $u \in U$

$$u = a_1 u_1 + \dots + a_k u_k + a_{k+1} u_{k+1} + \dots + a_n u_n.$$

$$\varphi(u) = \varphi\Big(\sum_i a_i u_i\Big) = \sum_i a_i \varphi(u_i) = a_1 \underbrace{\varphi(u_1)}_{=0} + \dots + a_k \underbrace{\varphi(u_k)}_{=0} + a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n \varphi(u_n)$$

$$= a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n \varphi(u_n)$$

2. Vektory $\varphi(u_{k+1}), \dots, \varphi(u_n)$ jsou lin. nezávislé.

Nechť

$$a_{k+1}\varphi(u_{k+1}) + \dots + a_n\varphi(u_n) = \vec{o}$$

$$\varphi(a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n) = \vec{o}$$

$$a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n \in \ker\varphi$$

$$a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_n u_n = b_1u_1 + b_2u_2 + \dots + b_ku_k$$

$$-b_1u_1 - \dots - b_ku_k + a_{k+1}u_{k+1} + \dots + a_nu_n = \vec{o}$$

$u_1, u_2, \dots u_n$ jsou LN, proto

$$-b_1 = -b_2 = \dots = -b_k = a_{k+1} = \dots = a_n = 0.$$

Tedy $\varphi(u_{k+1}), \dots \varphi(u_n)$ jsou LN.

__Definice__: Nechť U a V jsou vekt. prostory. Zobrazení

$$\varphi : U \to V$$

se nazývá lineární izomorfismus, jestliže

(1) je lineární

(2) je bijekce (= injektivní a surjektivní)

__Lemma__ Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ je lineární izomorfismus, právě když

$$\ker \varphi = \{\vec{o}\} \text{ a } \operatorname{im} \varphi = V$$

__Důsledek věty o dimenzích__ Lineární zobrazení $\varphi : U \to V$, kde U a V jsou prostory stejné dimenze je izomorfismem, právě když

$$\ker \varphi = \{\vec{o}\} \text{ nebo } \operatorname{im} \varphi = V.$$

Důkaz: Je-li $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$, pak ze vzorce pro dimenze

$$\underset{\overset{\parallel}{0}}{\dim \ker\varphi} + \dim \operatorname{im}\varphi = \dim U$$

plyne $\dim \operatorname{im}\varphi = \dim U = \dim V$.

Tedy $\operatorname{im}\varphi$ je podprostor ve V dimenze stejné jako V, proto

$$\operatorname{im}\varphi = V.$$

Nechť $\operatorname{im}\varphi = V$. Pak z

$$\dim \ker\varphi + \dim \operatorname{im}\varphi = \dim U$$

plyne $\dim \ker\varphi = \dim U - \dim \operatorname{im}\varphi = \dim V - \dim \operatorname{im}\varphi = 0$

Tedy $\ker\varphi = \{\vec{o}\}$.

Slogan: Mezi prostory stejné konečné dimenze je lin. zobrazení injektivní $\Longleftrightarrow$ je surjektivní!

Lemma: (a) $Id: U \to U$ identické zobrazení je lin. izomorfismus.

(b) Složení dvou izomorfismů je izomorfismus.

(c) Inverze k lin. izomorfismu je opět lin. izomorfismus.

Příklady lin. izomorfismů

① $\varphi: \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ $\quad \varphi(x) = Ax$

a A^{-1} existuje. Pak je φ lin. izomorfismus.

$\operatorname{Im} \varphi = \mathbb{R}^n$ neboť rovnice $\quad Ax = b$

má vždy řešení $\quad A^{-1}(Ax) = A^{-1}b$

Inverzní zobrazení je $\quad x = A^{-1}b$

$$\varphi^{-1}(y) = A^{-1}y.$$

2. Koordinate v bazi $\alpha = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ prostora U nad $\mathbb{K}$ definirajo preslikavo

$$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^n$$
$$u \longmapsto (u)_\alpha .$$

Ta preslikava je linearni izomorfizem.

Ta preslikava je linearna.

$u, v \in U$ $\quad (u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \quad (v)_\alpha = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_n u_n$$
$$v = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \ldots + b_n u_n$$

$$+ \quad u + v = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \ldots + (a_n + b_n) u_n \Rightarrow (u+v)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{pmatrix} = (u)_\alpha + (v)_\alpha$$

Podobno za množenje

(16)

Ukážeme, že $(\ )_\alpha : U \longrightarrow K^n$

je zobrazení na. Z toho, že $\dim U = n = \dim K^n$ plyne,

že $(\ )_\alpha$ je bijekce.

Mějme $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in K^n$. Potom vektor

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

má souřadnice

$$(u)_\alpha = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Důležitost toho, že souřadnice v dané bázi jsou lineárním izomorfismem spočívá v tom, že shrnuta řečeno

„Co platí pro souřadnice, platí pro vektory"

- $v_1, v_2, \dots v_k$ jsou LN $\iff$ $(v_1)_\alpha, (v_2)_\alpha, \dots (v_k)_\alpha$ jsou LN
- $[v_1, v_2, \dots v_k] = U \iff [(v_1)_\alpha, (v_2)_\alpha, \dots, (v_k)_\alpha] = K^n$.

Vektory nelze však ztotožňovat s jejich souřadnicemi.

Souřadnice závisejí na nějaké bázi, velká nevýhoda.

V $\mathbb{K}^n$ máme jednu bázi, která je „lepší" než ostatní báze $e_1, e_2, \dots e_n$. Ale např. ve vekt. prostoru

$$U = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{K}^n,\ x_1 + x_2 + \dots + x_n = 0\}$$

neexistuje nějaká báze „lepší" než ostatní báze.

Matice lin. zobrazení v bázích prostorů

$\varphi : U \longrightarrow V$ lin. zobrazení

$\alpha = (u_1, \dots u_m)$ báze U

$\beta = (v_1, \dots, v_k)$ báze V

$(\ )_\alpha : U \longrightarrow \mathbb{K}^m$

$(\ )_\beta : V \longrightarrow \mathbb{K}^k$

Zobrazení $\varphi : U \to V$ nahradíme lin. zobrazením

$(\varphi)_{\alpha,\beta}\ \mathbb{K}^m \longrightarrow \mathbb{K}^k$.