Obecné věty o soustavách lin. rovnic

Uvažujme matici A typu $k \times n$ s prvky v poli $\mathbb{K}$ a $b \in \mathbb{K}^k$. Soustava lin. rovnic je rovnice s neznámou $x \in \mathbb{K}^n$ tvaru

$$Ax = b.$$

Věta 1 (Struktura řešení homogenní rovnice)

Nechť A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$. Potom řešení homogenní soustavy

$$Ax = 0$$

vytvářejí vektorový podprostor v $\mathbb{K}^n$ dimenze

2

$n - h(A)$.

Důkaz: Matice A definuje lin. zobrazení
$$\varphi : \mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^k$$
předpisem $\varphi(x) = Ax$.

Množina řešení homogenní soustavy je
$$\{x \in \mathbb{K}^n,\ Ax = 0\} = \{x \in \mathbb{K}^n,\ \varphi(x) = 0\} = \ker \varphi.$$
Proto je taková množina podprostorem v $\mathbb{K}^n$.

Dále platí:
$$h(A) = h_s(A) = \dim[s_1A, s_2A, \dots, s_nA] =$$

$$= \dim\,[Ae_1, Ae_2, \ldots, Ae_n] = \dim\,[\varphi(e_1), \varphi(e_2), \ldots, \varphi(e_n)]$$

$$= \dim \operatorname{Im} \varphi$$

Dokázali jsme $h(A) = \dim \operatorname{Im} \varphi$.

Pro dimenze jádra a obrazu platí:

$$\dim \mathbb{K}^n = \dim \operatorname{Ker} \varphi + \dim \operatorname{Im} \varphi$$

$$n = \dim \operatorname{Ker} \varphi + h(A)$$

$$\dim \operatorname{Ker} \varphi = n - h(A).$$

dim množiny řešení $= n - h(A)$.

Příklady 1) $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^3$

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = 0 \qquad a, b \text{ nebo } c \neq 0.$$

Víme, že toto je rovnice roviny procházející počátkem $(0,0,0)$.
Dimenze roviny je 2.

$$A = (a, b, c) \qquad h(A) = 1$$

$$\dim\{\text{řešení } Ax = 0\} = 3 - h(A) = 3 - 1 = 2.$$

2) $\mathbb{K}^n = \mathbb{R}^3$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Jestliže jedna rovnice není násobkem druhé, pak množina řešení je přímka procházející počátkem – má dim 1.

$$\dim \text{řešení} = 3 - h(A) = 3 - 2 = \underline{1}.$$

Věta 2 (Frobeniova o řešitelnosti soustavy rovnic)

Nechť A je matice $k \times n$ nad $\mathbb{K}$. Potom soustava (pro $b \in \mathbb{K}^k$)

$$Ax = b$$

má řešení, právě když

$$h(A) = h(A|b).$$

<u>Důkaz:</u> Nechť soustava $Ax = b$ má řešení $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Potom platí

$$s_1A \cdot x_1 + s_2A \cdot x_2 + \dots + s_nA\, x_n = b$$

1. složka $\quad a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$

$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

k. složka $\quad a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_k$

Tedy $b \in \mathbb{K}^k$ je lineární kombinací sloupců $s_1A, \ldots, s_mA \in \mathbb{K}^k$.

Proto

$$[s_1A, s_2A, \ldots, s_mA] = [s_1A, s_2A, \ldots s_mA, b]$$

$\subseteq$ vždy

$\supseteq$ neboť b je lin. kombinací $s_1A, s_2A, \ldots, s_mA$

Tedy

$$\dim[s_1A, s_2A, \ldots, s_mA] = \dim[s_1A, \ldots, s_mA, b]$$

$$h_s(A) = h_s(A|b)$$

$$h(A) = h(A|b)$$

<u>Obrácená implikace</u> Nechť $h(A) = h(A|b)$.

Pak $\dim[s_1A, \dots, s_nA] = \dim[s_1A, \dots s_nA, b]$

Protože $[s_1A, \dots, s_nA]$ je podprostorem $[s_1A, \dots, s_nA, b]$ stejné dimenze, musí platit rovnost

$$[s_1A, \dots, s_nA] = [s_1A, \dots, s_nA, b].$$

Odtud $b \in [s_1A \dots s_nA]$. Tedy existují $x_1, x_2, \dots x_n \in K$

$$b = s_1A \cdot x_1 + s_2A \cdot x_2 + \dots + s_nA \cdot x_n$$

To není nic jiného, než

$$b = A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$ Tedy $Ax = b$ má řešení.

<u>Příklad</u>: A matice ve schod. tvaru

$$\left(\begin{array}{cccccccccc|c}
0 & & & & & & & & & & * \\
0 & 0 & 0 & & & & & & & & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & * \\
 & & & & & & & & & & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right)$$

A $\qquad\qquad$ b

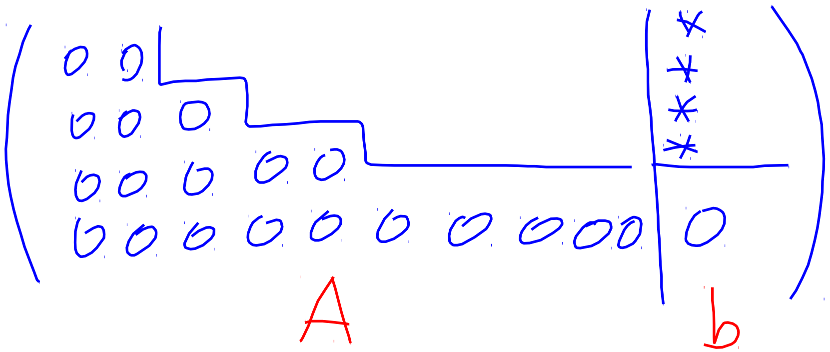
Víme, že soustava $Ax = b$ nemá řešení, neboť na poslední řádek musí platit

$$0 \cdot x_1 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1.$$

Jak je to s hodnostmi

$$h(A) = h_r(A) \underset{\neq}{<} h_r(A|b) = h(A|b)$$

Příklad A matice ve schod. tvaru



Matice ve schod. tvaru nemá řádek $0 \; 0 \ldots 0 \mid c \neq 0$

Proto

$$h(A) = h_r(A) = \text{počet řádků} \neq 0 = \text{počet řádků} \neq 0$$

$$\text{v matici } (A|b) = h_r(A|b) = h(A|b)$$

Věta 3 (o struktuře řešení soustavy rovnic)

Nechť soustava $Ax=b$ je řešitelná. Nechť $z \in \mathbb{K}^n$ je jedno její pevné řešení. Potom každé řešení x této soustavy je tvaru

$$x = z + y,$$

kde y je řešení soustavy homogenní $Ay = 0$.

Důkaz: Nechť x je nějaké řešení soustavy $Ax=b$. Potom můžeme

$$x = z + (x-z)$$

Přitom platí

$$A(x-z) = Ax - Az = b - b = 0$$

Tedy $y = x - z$ je řešení homogenní soustavy.

Nechť y je řešení homogenní soustavy $Ay=0$.
Pak

$$A(z+y) = Az + Ay = b + 0 = b$$

Tedy $z+y$ je řešením soustavy $Ax=b$.

<u>Příklad:</u> $a_1x_1 + a_2x_2 = b$ (hom. soustava $a_1x_1+a_2x_2=0$)

nechť je řešitelná. Řešení tvoří přímku v R^2