Jméno: **Hodnocení: 1. 2. 3. 4. Teorie Celkem**

B. Písemka z lineární algebry I, leden 2005 – početní část

Max. počet bodů 12

1. Je dáno lineární zobrazení $\varphi : \mathbb{R}^{10} \to \mathbb{R}^3$ předpisem

$$\varphi((x_1, x_2, \ldots, x_{10})^T) = \begin{pmatrix} x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} \\ x_1 + x_3 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} \\ x_1 + x_2 + x_4 + x_5 + \cdots + x_{10} \end{pmatrix}$$

Najděte bázi $\operatorname{Ker}\varphi$ a bázi $\operatorname{Im}\varphi$. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. (*3 body*)

2. Je dána dolní trojúhelníková matice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 0 \\ . & . & . & \ldots & . \\ 1 & 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$ tvaru 2005×2005. Vypočtěte A^{-1} a 1805. řádek součinu $A \cdot A$. (*3 body*)

3. V $\mathbb{R}^5$ jsou dány podprostory U a V. Najděte bázi $U \cap V$, jestliže $U = [(1, 0, 1, 2, -1)^T, (2, -1, 2, 1, -1)^T, (1, 0, 0, 1, -1)^T]$ a $V = \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T \in \mathbb{R}^5,\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0,\ x_1 + x_4 + x_5 = 0\}$. Výpočet doprovoďte slovním komentářem. (*3 body*)

4. V $\mathbb{R}_2[x]$ uvažujme bázi $\varepsilon = (1, x, x^2)$ a bázi $\alpha = (1 + 2x + x^2, 1 + x + x^2, -1 - x + 3x^2)$. Vypočtěte matici přechodu $(id)_{\alpha,\varepsilon}$ od báze ε k bázi α a s její pomocí vypočtěte souřadnice polynomu $2 + 3x + 6x^2$ v bázi α. (*3 body*)

Teoretická část

Max. počet bodů 10

1. Napište definici determinantu s vysvětlením použitého označení. (*1 bod*)

2. Napište jeden axiom vektorového prostoru, který není splněn pro množinu $V = (0, \infty)$, pole $\mathbb{R}$, součet $x \oplus y = x \cdot y$ (standardní součin) a násobení skalárem $a \odot x = a \cdot x$. Ukažte, proč není splněn. (*1 bod*)

3. Napište přesnou formulaci věty o dimenzích jádra a obrazu lineárního zobrazení. (*1 bod*)

4. $\mathbb{C}_2[x]$ – prostor polynomů stupně nejvýše 2 s koeficienty v $\mathbb{C}$ je vektorový prostor nad $\mathbb{R}$. Napište nějakou jeho bázi, která obsahuje polynom $1 + ix$. (*1 bod*)

5. V prostoru reálných matic 2×2 napište souřadnice matice $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ v bázi $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. (*1 bod*)

6. Napište jedním předpisem $\varphi(x_1, x_2) = \ldots$ všechna lineární zobrazení z $\mathbb{R}^2$ do $\mathbb{R}$. (*1 bod*)

7. Napište matici lineárního zobrazení $\varphi : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$, $\varphi(p) = (\int_0^1 xp(x)dx, p(0))$ v bázích $\alpha = (1, x, x^2)$ a $\beta = ((1, 0), (1, 1))$. (*1 bod*)

8. Z definice lineární nezávislosti dokažte: Jestliže, u_1, u_2, u_3 jsou lineárně nezávislé v U, pak $u_1 - u_2 + u_3, u_1 + u_2, u_1 + u_3$ jsou rovněž lineárně nezávislé. (*1 bod*)

9. Zformulujte přesně větu o dimenzi řešení homogenní soustavy lineárních rovnic. (*1 bod*)

10. Předpisem $\varphi(a + ib, c + id) = \ldots$ definujte nějaký lineární izomorfismus z $\mathbb{C}^2$ do $\mathbb{R}^4$ jako vektorových prostorů nad $\mathbb{R}$ s vlastností $\varphi(i, 1) = (2, 0, 0, 5)$. (*1 bod*)