

KOMPLEXNÍ ČÍSLA

(Seminář z matematiky I - M1130/02 2014)

(1) Zapište v algebraickém tvaru čísla:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \frac{2-i}{-3+i} - \frac{1+2i}{1-3i} & \left[-\frac{1}{5} - \frac{2}{5}i\right] \\ \text{(b)} 2 + \frac{1}{3i} - \frac{3}{i^3} & \left[2 - \frac{10}{3}i\right] \\ \text{(c)} \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^{-2} + \left(\frac{1-i}{1+i}\right)^2 & [-2] \end{array}$$

(2) Vypočtěte:

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \left|1 - i + \frac{1+2i}{3-i}\right| & \left[\frac{\sqrt{130}}{10}\right] \\ \text{(b)} \left|\frac{i}{\sqrt{3} + i\sqrt{2}}\right| & \left[\frac{\sqrt{5}}{5}\right] \\ \text{(c)} \left|2+3i\right|^2 + (2+3i)^2 & [4\sqrt{13}] \\ \text{(d)} \left|\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}i\right| & [1] \\ \text{(e)} \left|\sqrt{2+\sqrt{3}} + i\sqrt{2+\sqrt{3}}\right| & [1+\sqrt{3}] \\ \text{(f)} \frac{\left|\frac{3-4i}{5i}\right| + \left|\frac{2+i}{1-2i}\right|}{1+2i} & \left[\frac{2}{5} - \frac{4}{5}i\right] \end{array}$$

(3) Řešte rovnice v oboru \mathbb{C} :

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} |z| - z = 1 + 2i & \left[\frac{3}{2} - 2i\right] \\ \text{(b)} z^2 + |z| = 0 & [0; i; -i] \\ \text{(c)} \left(2 - \frac{1}{i}\right)\bar{z} + 2z = 10i & [10 - 40i] \\ \text{(d)} \bar{z}(z-1) = |z-1|^2 & [1] \end{array}$$

(4) Určete všechna ryze imaginární čísla z , pro něž platí:

$$\text{(a)} |z-1+i| = z \quad [\text{neexistují}]$$

$$(b) |z+1| = |z-2i| \quad \left[\frac{3}{4}i \right]$$

(5) Rozhodněte, která z následujících čísel jsou komplexní jednotky:

$$\frac{\sqrt{3}-i}{2}, \frac{1+i}{2}, \frac{(2+i)^2}{3-4i}, -i^{30}, \frac{1-i}{\sqrt{2}}, \cos \frac{\pi}{10} + i \sin \frac{\pi}{10} \quad [A, N, A, A, A, A]$$

(6) V Gaussově rovině znázorněte všechna komplexní čísla z , pro něž platí:

$$(a) |z+i| \geq |z+1|$$

$$(b) \left| z - \frac{1}{1+i} \right| < |z|$$

$$(c) \left| z + \frac{i}{1+i} \right| > |z-1|$$

$$(d) \left| z - \frac{1-2i}{i} \right| \leq \left| z + \frac{1-2i}{i} \right|$$

(7) V goniometrickém tvaru vyjádřete čísla:

$$(a) \frac{2}{-1+i} \quad \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) \right]$$

$$(b) \frac{-3+i}{2+i} \quad \left[\sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right) \right]$$

$$(c) |3+2i| \quad \left[\sqrt{13} (\cos 0 + i \sin 0) \right]$$

$$(d) i^{80} \quad [\cos 0 + i \sin 0]$$

$$(e) 1 + \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \quad \left[\sqrt{2 + \sqrt{2}} \left(\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8} \right) \right]$$

$$(f) 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi \quad \left[2 \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right]$$

$$(g) \sin \varphi + i \cos \varphi \quad \left[\cos \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right]$$

$$(h) \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \beta + i \sin \beta} \quad [\cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta)]$$

(8) Vypočtěte:

$$(a) (-1+i)^{66} - i(1+i)^{80} \quad [-129 \cdot 2^{33} \cdot i]$$

$$(b) \left(1 + \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right)^{12} \quad [3^6]$$

$$(c) (\sqrt{3} - i)^{-8} \quad \left[2^{-8} \left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i \right) \right]$$

$$(d) \left(\frac{1+i}{1-i} \right)^{-25} \quad [-i]$$

$$(e) (\operatorname{tg} 1 - i)^4 \quad \left[\frac{\cos 4 + i \sin 4}{\cos^4 1} \right]$$

(9) Určete argument φ tak, aby platila rovnost:

$$(a) \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = i \quad \left[-\frac{\pi}{6} \right]$$

$$(b) \left(\cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} \right) (\cos \varphi + i \sin \varphi) = -1 \quad \left[-\frac{3\pi}{4} \right]$$

$$(c) \frac{\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = 1 \quad \left[\frac{7\pi}{6} \right]$$

$$(d) \frac{\cos \frac{\pi}{8} + i \sin \frac{\pi}{8}}{\cos \varphi + i \sin \varphi} = -i \quad \left[-\frac{11\pi}{8} \right]$$

(10) V oboru komplexních čísel řešte rovnice:

$$(a) (x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 0 \quad \left[\frac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}; \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \right]$$

$$(b) \frac{x+2}{x-3} + \frac{x-1}{x+1} = 0 \quad \left[\frac{1 \pm i\sqrt{39}}{4} \right]$$

$$(c) 2x^2 + x + 1 = 0 \quad \left[\frac{-1 \pm i\sqrt{7}}{4} \right]$$

(11) Určete, pro které hodnoty $p \in \mathbb{R}$ mají rovnice dva reálné kořeny, resp. jeden dvojnásobný reálný kořen, resp. imaginární kořeny:

$$(a) px^2 + 2(p-1)x + p - 5 = 0 \quad \left[\left(-\frac{1}{3}, \infty \right) \wedge p \neq 0; -\frac{1}{3}; \left(-\infty, -\frac{1}{3} \right) \right]$$

$$(b) (p+3)x^2 + 3(p-6)x + 5 - 18p = 0 \quad [\text{pro } p \neq -3 \text{ má rovnice 2 reálné kořeny}]$$

$$(c) px^2 + (2p-1)x + p = 0 \quad \left[\left(-\infty, \frac{1}{4} \right) \wedge p \neq 0; \frac{1}{4}; \left(\frac{1}{4}, \infty \right) \right]$$

(12) Rozložte na součin lineárních dvojčlenů:

$$(a) x^2 + x + 1 \quad \left[\left(x + \frac{1}{2}(1 - i\sqrt{3}) \right) \left(x + \frac{1}{2}(1 + i\sqrt{3}) \right) \right]$$

(b) $3x^2 + 2x + 2$

$$\left[3 \left(x + \frac{1}{3} (1 - i\sqrt{5}) \right) \left(x + \frac{1}{3} (1 + i\sqrt{5}) \right) \right]$$

(c) $x^2 - 3x + 5$

$$\left[\left(x - \frac{1}{2} (3 + i\sqrt{11}) \right) \left(x - \frac{1}{2} (3 - i\sqrt{11}) \right) \right]$$

(13) Řešte v \mathbb{C} binomické rovnice:

(a) $x^3 - i = 0$

$$\left[\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i; -i \right]$$

(b) $x^6 + 64 = 0$

$$[\pm\sqrt{3} \pm i; \pm 2i]$$

(c) $x^8 + 1 = 0$

$$\left[\cos \frac{\pi + 2k\pi}{8} + i \sin \frac{\pi + 2k\pi}{8}, k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \right]$$

(d) $x^5 - 1 - i\sqrt{3} = 0$

$$\left[\sqrt[5]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2k\pi}{5} \right), k = 0, 1, 2, 3, 4 \right]$$

(e) $x^3 - 1 + i = 0$

$$\left[\sqrt[6]{2} \left(\cos \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{7\pi}{4} + 2k\pi}{3} \right), k = 0, 1, 2 \right]$$

(14) V množině \mathbb{C} řešte rovnice:

(a) $x^2 - 2x + 9 + 6i = 0$

$$[3i; 2 - 3i]$$

(b) $x^2 + (2 - 3i)x - 5(1 + i) = 0$

$$[1 + 2i; -3 + i]$$

(c) $x^2 - 4 = 3i$

$$\left[\frac{3\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}; -\frac{3\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2} \right]$$

(d) $x^2 = \left(\frac{4}{-1 + i\sqrt{3}} \right)^{12}$

$$[\pm 64]$$

(e) $x^2 - \frac{(1 + i)^{100}}{(1 - i)^{96} - i(1 + i)^{98}} = 0$

$$\left[\pm i \frac{2\sqrt{3}}{3} \right]$$