

# KŘIVKOVÝ INTEGRÁL

Připomenutí:

Délka křivky

a) křivka je zadána ve tvaru  $y = f(x), x \in [a, b]$  :  $L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$

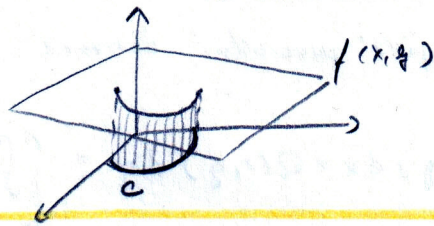
b) křivka je zadána parametricky  $x = x(t), y = y(t) \quad t \in [a, b]$  :  $L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

Křivkový integrál I. druhu:

$\mathbb{R}^2$ :  $\int_C f(x, y) d\sigma := \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt$

KDE  $C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$

→ obsah obrazce ohraničený grafem  $f$  a křivkou  $C$



analogicky:

$\mathbb{R}^3$ :  $\int_C f(x, y, z) d\sigma = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 + [z'(t)]^2} dt$

$C: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$

NEZÁVISÍ NA ORIENTACI  $C$

ZÁVISÍ NA ORIENTACI  $C$

jeden vektor ve směru osy  $x$

Křivkový integrál II. druhu:

$\vec{F}(x, y) = (P(x, y), Q(x, y)) = P(x, y) \cdot \vec{i} + Q(x, y) \cdot \vec{j}$

... vektorové pole v  $\mathbb{R}^2$

$C: \begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases} \quad t \in [a, b]$  hladká křivka taková, že  $\varphi'(t) + \psi'(t) \neq 0 \quad \forall t \in [a, b]$

(Tečný vektor k  $C$  v bodě  $[\varphi(t), \psi(t)]$  je  $[\varphi'(t), \psi'(t)]$ )

$\int_C \vec{F}(x, y) d\vec{\sigma} = \int_a^b [P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) + Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t)] dt =$

$= \int_C [P(x, y) dx + Q(x, y) dy]$

orientovaná křivka

## Nezávislost křivkového integrálu I druhu na integrační cestě:

Jestliže  $P_y = Q_x$ , přitom  $P_y, Q_x$  jsou spojitě na jednotné souvislé oblasti  $G$

$$\int_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = F(B) - F(A)$$

F... kmenová jce výrazu  $P dx + Q dy$

A... počáteční bod C

B... koncový bod C

↑ tj. tehdy, když  $P dx + Q dy$  je  
totálním diferenciálem  
nějaké funkce

$$\Rightarrow \text{Je-li } C \text{ uzavřená } \oint_C \dots = 0.$$

## Greenova věta (převést křivkový integrál přes uz. křivku na dvojný)

Nechť  $C$  je hladká uzavřená jednodušhá křivka orientovaná hladně. Nechť  $D$  je oblast v rovině ohraničená křivkou  $C$ . Nechť  $P, Q : D \rightarrow \mathbb{R}$  jsou spojitě na  $D$  a mají zde spojitě parciální derivace  $P_y, Q_x$ . Pak

$$\oint_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left[ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right] dx dy$$

## Věty:

①  $\int_C P dx + Q dy$  nezávisl na integrační cestě  $(\Leftrightarrow) \oint_C P dx + Q dy = 0 \quad \forall \tilde{C}$  uzavř.

② Je-li  $\vec{F}$  konzervativní (potenciálové) (sílové) pole  $(\Leftrightarrow \text{rot } \vec{F} = 0)$ ,  
pak hodnota křivkového integrálu nezávisl na integrační cestě.  
(resp.  $(\Leftarrow)$ )

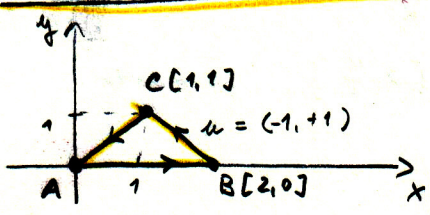
↓  
pro takové pole  
má smysl zvažovat potenciál

↑  
Více viz předmět "Molekulová fyzika a termika".

# PRIKLADY

① Vypočítejte křivkový integrál (I. DRUH)

$\int_c (x+y) ds$ ,  $c = \triangle ABC$   $A[0,0]$ ,  $B[2,0]$ ,  $C[1,1]$



AB:  $x = t$   $t \in [0, 2] \Rightarrow x' = 1$   
 $y = 0$   $y' = 0$

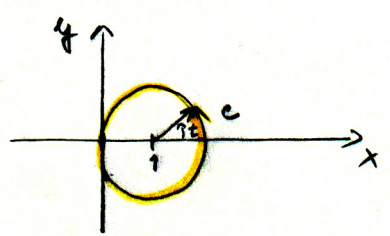
BC:  $x = 2 - t$   $t \in [0, 1] \Rightarrow x' = -1$   
 $y = 0 + t$   $y' = 1$

CA:  $x = t$   $t \in [0, 1] \Rightarrow x' = 1$   
 $y = t$   $y' = 1$

$$\int_c (x+y) ds = \int_{c_1} (x+y) ds + \int_{c_2} (x+y) ds + \int_{c_3} (x+y) ds = \int_0^2 (t+0) \cdot 1 dt + \int_0^1 (2-t+t) \sqrt{2} dt + \int_0^1 (t+t) \sqrt{2} dt =$$

$$= \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^2 + \left[ 2t \right]_0^1 + \left[ t^2 \sqrt{2} \right]_0^1 = \underline{\underline{3\sqrt{2} + 2}}$$

②  $\int_c \sqrt{x^2+y^2} ds$   $c: x^2+y^2=2x$



$x^2 - 2x + y^2 = 0$   
 $(x-1)^2 + y^2 = 1$

$c: x = \cos t + 1$   $t \in [0, 2\pi]$

$y = \sin t$

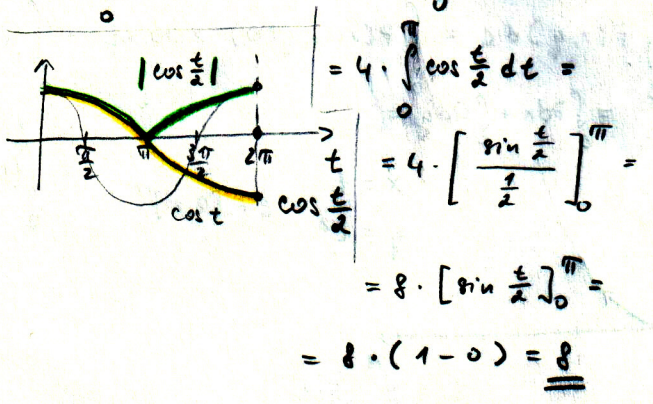
$\Rightarrow x' = -\sin t$   
 $y' = \cos t$

$\int_0^{2\pi} \sqrt{(\cos t + 1)^2 + \sin^2 t} \cdot \sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} dt =$

$= \int_0^{2\pi} \sqrt{2 \cdot \cos t + 2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot \sqrt{1 + \cos t} dt = \sqrt{2} \cdot \int_0^{2\pi} \sqrt{2} \cdot |\cos \frac{t}{2}| dt = 2 \cdot \int_0^{2\pi} |\cos \frac{t}{2}| dt =$

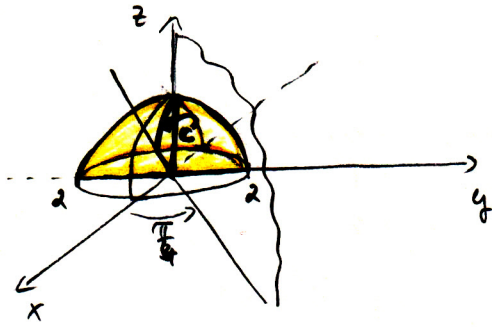
$\cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2}$

$\cos^2 \frac{t}{2} = \frac{1 + \cos t}{2} \Rightarrow 1 + \cos t = 2 \cdot \cos^2 \frac{t}{2}$



$= 8 \cdot (1 - 0) = \underline{\underline{8}}$

③  $\int_C \sqrt{2y^2 + z^2} \, d\sigma$   $C = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 4, x = y, x \leq 0, z \geq 0\}$



$$x = r \cdot \cos \varphi \cdot \sin \nu$$

$$\varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$y = r \cdot \sin \varphi \cdot \sin \nu$$

$$r = 2$$

$$z = r \cdot \cos \nu$$

$$\nu \in [0, \frac{\pi}{2}] \dots \text{parametr}$$



$$x = 2 \cdot \cos \frac{5\pi}{4} \cdot \sin t$$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$y = 2 \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \cdot \sin t$$

$$z = 2 \cdot \cos t$$



$$x = -\sqrt{2} \cdot \sin t$$

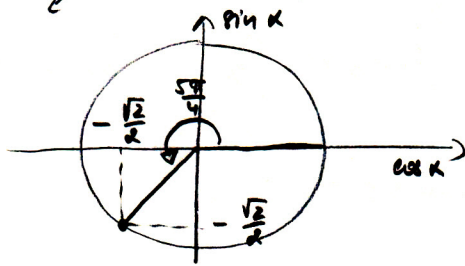
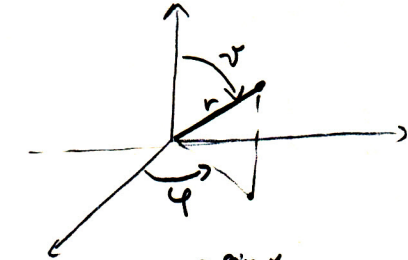
$$x' = -\sqrt{2} \cos t$$

$$y = -\sqrt{2} \sin t$$

$$t \in [0, \frac{\pi}{2}] \quad y' = -\sqrt{2} \cos t$$

$$z = 2 \cdot \cos t$$

$$z' = -2 \sin t$$

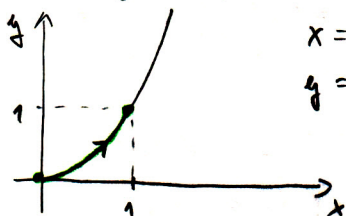


$$\begin{aligned} \int_C \sqrt{2y^2 + z^2} \, d\sigma &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{2 \cdot (-\sqrt{2} \cdot \sin t)^2 + (2 \cdot \cos t)^2} \cdot \sqrt{(-\sqrt{2} \cos t)^2 + (-\sqrt{2} \cos t)^2 + (-2 \sin t)^2} \, dt = \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} \cdot \sqrt{4 \cos^2 t + 4 \sin^2 t} \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{4} \cdot \sqrt{4} \, dt = \\ &= 4 \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} dt = 4 \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2\pi}} \end{aligned}$$

## (II. DRUH)

④  $\int_C \vec{F}(x, y) \, d\vec{s}$  ;  $\vec{F}(x, y) = (1 + y^2, 3x)$   $C$ : část paraboly  $y = x^2$  spojující body  $[0, 0]$  a  $[1, 1]$

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F}(x, y) \, d\vec{s} &= \int_0^1 P(x(t), y(t)) \cdot x'(t) \, dt + \int_0^1 Q(x(t), y(t)) \cdot y'(t) \, dt = \\ &= \int_C P \, dx + \int_C Q \, dy = \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} x &= t \\ y &= t^2 \quad t \in [0, 1] \end{aligned}$$

$$= \int_0^1 (1 + t^2) \cdot 1 \, dt + \int_0^1 3t \cdot 2t \, dt = \underline{\underline{\frac{16}{5}}}$$

⑤  $\int_C (2xy + 1) dx + (x^2 + 1) dy$        $A[-1, 1]$  počáteční bod levě  
 $B[2, 4]$  konečný bod       $u$  vpravo  $C$

je-li  $C$ :

a) PARABOLA procházející počátkem

b) lomená čára mající zlom v bodě  $C[0, 1]$

a)  $x = t$        $t \in [-1, 2]$  SOUHLASNÁ ORIENTACE  
 $y = t^2$   
 $x' = 1$ ,  $y' = 2t$

$$I = \int_{-1}^2 (2t^3 + 1) t dt + \int_{-1}^2 (t^2 + 1) 2t dt = \dots = \underline{\underline{21}}$$

$$u = [2, 4] - [0, 1] = (2, 3)$$

b)  $x = t - 1$        $t \in [-1, 0]$  SOUHLAS  
 $y = 1 +$   
 $x' = 1$        $y' = 0$   
 $x = 2t + 0$        $t \in [0, 1]$   
 $y = 3t + 1$   
 $x' = 2$        $y' = 3$

$$I = \int_{-1}^0 (2t + 1) dt + \int_0^1 (2 \cdot 2t \cdot (3t + 1) + 1) \cdot 2 dt + \int_0^1 (4t^2 + 1) \cdot 3 dt =$$

$$= \int_{-1}^0 (2t + 1) dt + \int_0^1 (36t^2 + 5t + 5) dt = \left[ t^2 + t \right]_{-1}^0 + \left[ 12t^3 + 8 \cdot \frac{t^2}{2} + 5t \right]_0^1 =$$

$$= 0 + 12 + 4 + 5 = \underline{\underline{21}}$$

⑥ Rozhodněte, zda předchozí integrál závisí na integrační cestě a pokud ne, určete jeho hodnotu pomocí lomenové funkce.

Ověříme, zda je výraz  $(2xy + 1) dx + (x^2 + 1) dy$  totálním diferenciálem nějaké funkce  $F$ . Pokud ano, platí  $I = F(B) - F(A)$ .

⑦ Jde o totální diferenciál?  $P dx + Q dy = F_x dx + F_y dy$   
 $P_y \stackrel{?}{=} Q_x$        $P'_y = 2x$   
 $Q'_x = 2x$       } ANO

⑧ Hledání lomenové fce:

$$F_x = 2xy + 1 \Rightarrow F = \int (2xy + 1) dx = x^2 y + x + c(y)$$

$$F_y = x^2 + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 + 0 + c'(y)$$

$$c'(y) = 1$$

$$c(y) = y + C$$

$$\boxed{F = x^2 y + x + y + C}$$

⑨  $F(B) - F(A) = F(2, 4) - F(-1, 1) = 2^2 \cdot 4 + 2 + 4 + C - ((-1)^2 \cdot 1 - 1 + 1 + C) = \underline{\underline{21}}$

Rozhodněte, zda integrál závisí na integrační cestě a spočítejte:

$$\textcircled{7} \int_C x dx + y dy + z dz \quad C: \begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi]$$

$$\Rightarrow C: [1, 0, 0] \rightarrow [1, 0, 2\pi]$$

$\textcircled{I}$  Ověříme, zda funkce  $x dx + y dy + z dz$  je totálním diferenciálem nějaké fce:  
 $P dx + Q dy + R dz \stackrel{?}{=} F_x dx + F_y dy + F_z dz$ .

Tj. ověřme, zda:

$$\begin{aligned} P_y &\stackrel{?}{=} Q_x &\rightarrow 0 = 0 &\checkmark \\ \textcircled{2} P_z &\stackrel{?}{=} R_x &\rightarrow 0 = 0 &\checkmark \\ Q_z &\stackrel{?}{=} R_y &\rightarrow 0 = 0 &\checkmark \\ R_x &= P_z \end{aligned} \quad \text{ANO, jde o totální diferenciál.}$$

$\Rightarrow$  NEZÁVISÍ NA INTEGRAČNÍ CESTĚ

$\textcircled{II}$  Výpočet přes  $C$ :

$$\begin{aligned} dx &= -\sin t dt \\ dy &= +\cos t dt \\ dz &= dt \end{aligned}$$

$$\int_0^{2\pi} (-\sin t \cos t + \sin t \cos t + t) dt = \left[ \frac{t^2}{2} \right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{2\pi^2}}$$

Obsah elipsy bez  
krivového integrálu

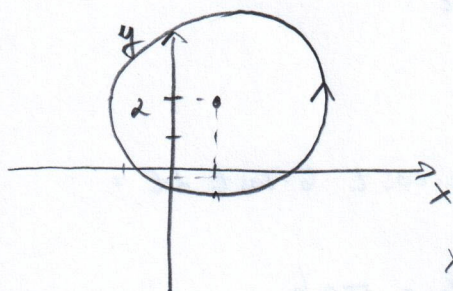
VIZ Kalas: Pr 4.3 str 199  $\rightarrow$

8)  $\int_C (x+y) dx - 2y dy$      $c: x^2 + y^2 \leq 2x + 4y$

$$\int_C P dx + Q dy = \iint_G (Q_x - P_y) dx dy = \iint_G (0 - (-1)) dx dy = \iint_G 1 dx dy = \pi r^2 = \underline{5\pi}$$

$$P_y = -1$$

$$Q_x = 0$$



↑  
obsah plochy ohraničenej  
krivkou G

$$x^2 + y^2 = 2x + 4y$$

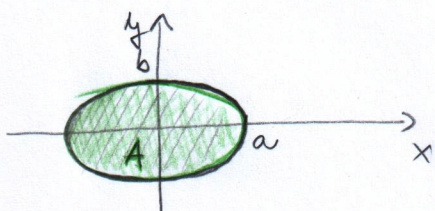
$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 0$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1 + 4$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = 5 \quad r = \sqrt{5} = 2,2$$

9) Pomocí krivkového integrálu spočítejte obsah plochy ohraničené křivkou  $c$  (oblasti) (určete míru množiny  $A = \text{Int } c$ ), je-li  $c$  hladká uzavřená křivka orientovaná kladně, třeba elipsa **ЈЕДНОДУКТА!**

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



Greenova věta:

$$\iint_A (Q_x - P_y) dx dy = \oint_C P dx + Q dy$$

$$\text{Míra množiny } A \quad m(A) = \iint_A 1 dx dy$$

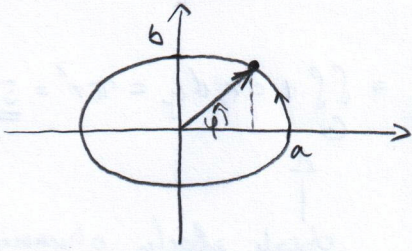
OBVYKLE VOLÍME  $Q_x - P_y = 2$  jako  $1 - (-1)$ , to znamená!

$$\left. \begin{array}{l} Q = x \\ P = -y \end{array} \right\} m(A) = \frac{1}{2} \iint_A (1 - (-1)) dx dy = \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy$$

G.v.

$$\Rightarrow m(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y) dx + x dy$$

$$m(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y) dx + x dy$$



$$x = a \cdot \cos t$$

$$y = b \cdot \sin t$$

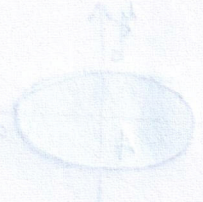
$$dx = -a \cdot \sin t$$

$$dy = b \cdot \cos t$$

$$t \in [0, 2\pi] \quad \left[ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \checkmark \right]$$

$$\begin{aligned} m(A) &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} -b \cdot \sin t (-a \cdot \sin t) dt + a \cdot \cos t \cdot b \cdot \cos t dt = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} ab (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = \frac{2\pi}{2} ab = \underline{\underline{\pi ab}} \end{aligned}$$

## PLOŠNÝ INTEGRÁL



$$m(A) = \frac{1}{2} \oint_C (-y) dx + x dy$$