PLOŠNÝ INTEGRÁL

I. DRUH

$$\iint_S g(x,y,z)\,dS = \iint_M g(x(u,v), y(u,v), z(u,v))\sqrt{A^2(u,v)+B^2(u,v)+C^2(u,v)}\,du\,dv$$

S … plocha v $\mathbb{R}^3$ zadaná parametricky $\quad x = x(u,v)$

$$y = y(u,v) \qquad [u,v] \in M \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$A = \begin{vmatrix} y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{vmatrix},\ B = \begin{vmatrix} z_u & z_v \\ x_u & x_v \end{vmatrix},\ C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} \qquad z = z(u,v)$$

(NEORIENTOVANÁ)

KDYŽ

$$S = \{[x,y,z] \in \mathbb{R}^3 \mid [x,y] \in M,\ z = f(x,y)\} \Rightarrow$$

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{vmatrix} = -f_u = -f_x,\ B = \begin{vmatrix} f_u & f_v \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -f_v = -f_y,\ C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

tj. plošný I =

$$\iint_M g(x,y,f(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy \qquad J = \begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix}$$

tj. když $z=0$

A, B, C jsou minory v J

II. DRUH

$\vec{F}(x,y,z) = (P(x,y,z), Q(x,y,z), R(x,y,z))$ vektorové pole v $\mathbb{R}^3$

$$\iint_S \vec{F}\,d\vec{S} = \iint_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dx\,dy =$$

$$= \pm \iint_M P(x(u,v), y(u,v), z(u,v))A(u,v) + Q(-\text{"}-)B(u,v) + R(-\text{"}-)C(u,v)\,du\,dv$$

VÍCE VIZ PŘEDNÁŠKA

Normálový vektor k ploše S: $\vec{n} = (A, B, C)$

PLOŠNÝ INTEGRÁL PŘÍKLADY

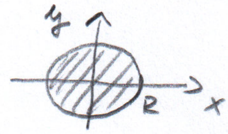
1 Obsah plochy.

Určete obsah plochy, která je grafem funkce $z = x \cdot y$ pro x, y z oblasti $D: x^2 + y^2 \leq R^2$

plošný I. druh — dvojný přes D

Pro obsah plochy platí $m(S) = \iint\limits_S 1\,dS = \iint\limits_D \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy$

Dosadíme $f(x, y) = x \cdot y \Rightarrow f_x = y,\ f_y = x$; D:



$$\underline{\underline{m(S)}} = \iint\limits_D \sqrt{1 + y^2 + x^2}\,dx\,dy \stackrel{\Delta}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^R \sqrt{1+\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi = \left| \begin{array}{l} 1+\rho^2 = t^2 \\ \rho\,d\rho = t\,dt \end{array} \right| =$$

převod do polárních souřadnic

$$= 2\pi \int_1^{\sqrt{1+R^2}} t^2\,dt = 2\pi \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^{\sqrt{1+R^2}} = \underline{\underline{\frac{2\pi}{3}\left(\sqrt{(1+R^2)^3} - 1\right)}}$$

2 Vypočítejte integrál I. druhu fce $F(x, y, z) = 2x + \frac{4}{3}y + z$ přes plochu $S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$ v prvním oktantu.

Budeme dosazovat do vztahu:

$$\iint\limits_S F(x, y, z)\,dS = \iint\limits_D F(x, y, f(x, y))\sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}\,dx\,dy = I$$

... z S vyjádřím „z" a dosadím do $F(x, y, z)$ ...

$S: \frac{x}{2} + \frac{y}{3} + \frac{z}{4} = 1$

$\frac{z}{4} = 1 - \frac{x}{2} - \frac{y}{3} \Rightarrow z = 4 - 2x - \frac{4}{3}y = f(x, y)$

$F(x, y, f(x, y)) = 2x + \frac{4}{3}y + 4 - 2x - \frac{4}{3}y = 4$

Je potřeba ještě určit f_x a f_y: $f_x = -2$

$f_y = -\frac{4}{3}$

Tedy

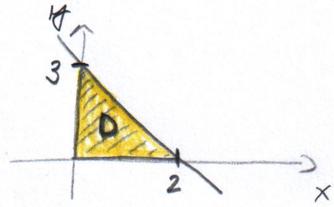
$$I = \iint_D \sqrt{1+4+\frac{16}{9}} \cdot 4\,dx\,dy = \frac{4}{3}\sqrt{61}\iint_D dx\,dy$$

AHA! Ještě zbývá určit oblast D, přes kterou máme počítat dvojný integrál.

D je ta oblast $\mathbb{R}^2$, kterou probíhá x a y => D získám z S dosazením $z=0$:

$$D: \frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow y = 3-\frac{3}{2}x$$

v prvním oktantu => $x>0$ $y>0$



$0 \le x \le 2$

$0 \le y \le 3-\frac{3}{2}x$

Konečně

$$I = \frac{4}{3}\sqrt{61}\int_0^2\int_0^{3-\frac{3}{2}x} dy\,dx = \xrightarrow[\text{počítám}]{\text{buďto normálně}} \text{I.}$$

nebo si uvědomím, že $\iint_D 1\,dx\,dy$ je obsah (no dobře - MÍRA) množiny D, která je pravoúhlý trojúhelník

$$\text{II.} = \frac{4}{3}\cdot\sqrt{61}\cdot\overbrace{\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3}^{\frac{1}{2}a\cdot v_a} = \underline{\underline{4\sqrt{61}}}$$

VÝSLEDEK

$$\text{I.} = \frac{4}{3}\sqrt{61}\int_0^2 [y]_0^{3-\frac{3}{2}x}\,dx = \frac{4}{3}\sqrt{61}\int_0^2\left(3-\frac{3}{2}x\right)dx = 2\sqrt{61}\left[2x-\frac{x^2}{2}\right]_0^2 =$$

$$= 2\sqrt{61}\,(4-2) = \underline{\underline{4\sqrt{61}}}$$

3 Vypočtěte obsah plochy paraboloidu $z = 1-x^2-y^2$ pro $z \ge 0$

$$\underline{\underline{m(S)}} = \iint_S 1\,dS = \iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,dx\,dy \overset{\triangle}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^1 \sqrt{1+4\rho^2}\,\rho\,d\rho\,d\varphi \overset{\triangle}{=} 2\pi\int_1^{\sqrt{5}}\frac{t^2}{4}\,dt =$$

$$= \underline{\underline{\frac{\pi}{6}\left(5\sqrt{5}-1\right)}}$$

$(-2x)^2$ $(-2y)^2$

polární souřadnice

substituce $t^2 = 1+4\rho^2$

④ Vypočtěte $\iint\limits_S x\,dS$, $S: x^2+y^2+z^2=R^2$ v prvním oktantu.

z vyjádření z S

$$f(x,y)=\sqrt{R^2-x^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad f_x=\frac{-x}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} \; ; \; f_y=\frac{-y}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}}$$

$D: \; x^2+y^2=R^2$ ... dosazení $z=0$ do S.

$x>0,\; y>0$ ← 1. oktant

Byl by asi dobrý nápad pracovat v polárních souřadnicích.

JJ → $\rho\cdot\rho\cdot\cos\varphi$

$$\underbrace{\iint\limits_S x\,dS}_{\text{KŘIVKOVÝ}} = \underbrace{\iint\limits_D x\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{R^2-x^2-y^2}}\,dx\,dy}_{\text{DVOJNÝ}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{R}\sqrt{\frac{R^2}{R^2-\rho^2}}\,\rho^2\cdot\cos\varphi\,d\rho\,d\varphi =$$

1. oktant!

$$= \left| \begin{array}{ll} \text{substituce „netradičním" směrem „} x=f(t) \text{"} & \\ & \text{MEZE:} \\ \rho = R\cdot\sin t & \rho=0 \to t=0 \\ d\rho = R\cdot\cos t\,dt & \rho=R \to t=\frac{\pi}{2} \end{array} \right| =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R^3\sin^2 t}{\sqrt{R^2-R^2\sin^2 t}}\cos\varphi\cdot\cos t\,dt = R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\cdot\cos\varphi\,dt\,d\varphi =$$

$$= R^3\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos 2t}{2}\,dt = R^3\Big[\sin\varphi\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\Big[\frac{1}{2}t-\frac{\sin 2t}{4}\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= \frac{\pi}{4}R^3$$

II. DRUH

1 Vypočtěte $\iint_S z\,dx\,dy$, S: horní polovina jednotkové koule orientovaná ve směru vnější normály.

Chce se po nás vlastně

podle orientace

$$\iint_S \underbrace{(0,0,z)}_{\vec{F}(x,y,z)}\,d\vec{S} = \iint_S z\,dx\,dy = \pm \iint_M z(u,v)\cdot C(u,v)\,du\,dv = I$$

$$C = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

Potřebujeme parametrizaci plochy S pomocí dvou parametrů u a v. S je část koule → bylo by asi vhodné volit parametrizaci jako „sférické souřadnice".

$$S:\quad x = R\cdot\cos\varphi\cdot\sin\vartheta,\quad y = R\cdot\sin\varphi\,\sin\vartheta,\quad z = R\cdot\cos\vartheta$$

R známe R = 1, úhly φ a ϑ zvolíme za parametry →

$$\boxed{\begin{aligned} x &= \cos u\,\sin v \\ y &= \sin u\cdot\sin v \\ z &= \cos v \end{aligned}}$$

KDE $u \in [0, 2\pi]$ (φ), $v \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (ϑ)

Takže můžeme určit

$$C = \begin{vmatrix} -\sin u\,\sin v & \cos u\,\cos v \\ \cos u\,\sin v & \sin u\,\cos v \end{vmatrix} = -\sin v\,\cos v$$

Normálový vektor k ploše S má tvar $\vec{n} = (A, B, C) = (\text{něco}, \text{něco}, -\sin v\cdot\cos v)$

→ Naše parametrizace je zvolená „dovnitř" – nesouhlasné se zadáním ⇒
⇒ před integrál přijde $-$.

Konečně

nesouhlasná orientace; lichá k sinu

$$I = -\iint_M -\cos^2 v\cdot\sin v\,du\,dv = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi/2} \sin v\cos^2 v\,du\,dv \overset{!}{=} 2\pi\int_0^1 t^2\,dt = \frac{2}{3}\pi$$

2 Vypočtěte $\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy$

S: $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \le 1$, $x \ge 0$, $y \ge 0$, orientace dolů.

Zadání ve tvaru $S = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \mid \dots\}$

$$\Rightarrow \quad J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ f_u & f_v \end{pmatrix}$$

to vlastně plyne ze zvolené parametrizace (nemusím si to pamatovat)

Parametrizace S: $x = u$
$y = v$
$z = u^2 + v^2$

(zakryji 1. řádek)

orientace nahoru

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix} \Rightarrow \quad A = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2u & 2v \end{vmatrix} = -2u, \quad B = -2v, \quad C = 1 \quad \Bigg\} \quad \vec{n} = (-2u, 2v, 1)$$

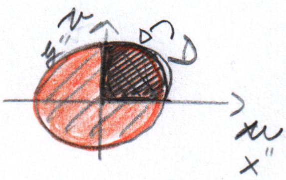
(−) zakryji 2. řádek

zakryji 3. řádek

$$\iint\limits_S x\,dy\,dz + y\,dx\,dz + z\,dx\,dy = -\iint\limits_D \underbrace{(u(-2u) + v(-2v) + u^2 + v^2)}_{u^2+v^2}\,du\,dv = I$$

kvůli nesouhlasné orientaci

D: $z = 0 \Rightarrow x^2 + y^2 \le 1$
$x \ge 0$, $y \ge 0$



→ zvolme polární souřadnice $u = \rho \cdot \cos\varphi$
$v = \rho \cdot \sin\varphi$

Konečně

$$I = \int_0^{\pi/2} \int_0^1 \rho^3\,d\rho\,d\varphi = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{8}$$

(3) Vypočítete $\iint\limits_S xy\,dy\,dz + yz\,dx\,dz + x^2\,dx\,dy, = I$

$S: x^2+y^2+z^2=R^2$ ve směru vnější normály.

Je nám známo

$$\iint\limits_S P\,dy\,dz + Q\,dx\,dz + R\,dy\,dz = \iiint\limits_V (P_x + Q_y + R_z)\,dx\,dy\,dz .$$

KŘIVKOVÝ   TROJNÝ

(Co to je a kdy to platí?!)

Tedy

$$I = \iiint\limits_V (y+z)\,dx\,dy\,dz \overset{\text{sférické souřadnice}}{=} \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} (\rho^3 \cdot \sin\varphi \sin^3\vartheta + \rho^3 \cos\vartheta \sin\vartheta)\,d\rho\,d\vartheta\,d\varphi =$$

$$= \dots = \frac{\pi R^4}{4}\left[-\frac{\cos 2\vartheta}{2}\right]_0^{\pi} = \underline{\underline{0}}$$