14.10.2014

NUMERICKÁ SUMACE

Příklad 4.4 zbytek menší než 0,0001. (Skripta str 39)

a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}$ (Ve výsledku ve skriptech je asi chyba)

A) Buďto postupuji stejně jako v řešeném příkladu 4.2 (Podle Lemmatu 4.1):

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} < \frac{1}{n^4} \qquad R_n = \frac{1}{(4-1)n^3} = \frac{1}{3n^3}$$

Zbytek po n-tém členu řady $\sum \frac{1}{n^4}$ (Př. 4.2 a) řešení)

Lemma 4.1: $|r_n| \leq R_n = \frac{1}{3n^3} \leq \frac{1}{10^4}$

Zbytek po n-tém členu zadané řady.

$$\Downarrow$$

$$\boxed{3n^3 \geq 10\,000}$$

Nejmenší takové n je $n = 15$.

B) Nebo můžu použít Větu 4.5

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}}{\frac{1}{n\cancel{(n+1)}\cancel{(n+2)}\cancel{(n+3)}}}\right| = \left|\frac{n}{n+4}\right| = \left|1 - \frac{4}{n+4}\right| \leq$$

$$\leq \left|1 - \frac{4}{5}\right| \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\Downarrow$$

$$q = \frac{1}{5}$$

Věta 4.5: $|R_n| \leq |a_n| \cdot \frac{q}{1-q}$

$$\Downarrow$$

$$|R_n| \leq \left|\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)}\right| \cdot \frac{\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)} \cdot \frac{1}{4} \leq 10^{-4}$$

$$\Rightarrow \boxed{4 \cdot n(n+1)(n+2)(n+3) \geq 10\,000}$$

Nejmenší takové n je $n = 6$ ← Věta 4.5 je „lepší".

b) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln^2 n}$ (Výsledek OK)

O chování této řady bych rozhodovala pomocí integrálního kriteria, proto pro odhad zbytku použiju Větu 4.6:

$$R_n \leq \int_n^{\infty} f(x)\,dx \quad , \text{ přitom } f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln^2 x}$$

$$\int \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \left| \begin{array}{l} t = \ln x \\ dt = \frac{1}{x}\,dx \end{array} \right| = \int \frac{1}{t^2}\,dt = -\frac{1}{t} = -\frac{1}{\ln x}$$

$$\Rightarrow \int_n^{\infty} \frac{1}{x \ln^2 x}\,dx = \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_n^{\infty} = \lim_{y \to \infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{\ln y} \right)}_{0} + \frac{1}{\ln n} = \frac{1}{\ln n}$$

$$R_n \leq \frac{1}{\ln n} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \boxed{\ln n > 10\,000}$$

Nejmenší takové n je hodně velké...

$$\ln e^{10\,000} = 10\,000$$

$\Rightarrow$ Nejmenší $n = 10\,001$

c) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{5^n}$ Podobně: Použiju Větu 4.6:

$$\int \frac{5^{-x}}{\ln 5}\,dx$$

$$\int \frac{x}{5^x}\,dx = \left| \begin{array}{ll} u = x & u' = 1 \\ v' = 5^{-x} & v = -\frac{5^{-x}}{\ln 5} \end{array} \right| = -\frac{x}{5^x \ln 5} - \frac{5^{-x}}{\ln^2 5}$$

$$\Rightarrow \int_n^{\infty} \frac{x}{5^x}\,dx = \lim_{y \to \infty} \left(-\frac{y}{5^y \ln 5} - \frac{1}{5^y \ln 5} \right) + \frac{n}{5^n \ln 5} + \frac{1}{5^n \ln^2 5} = 0 + \frac{n \cdot \ln 5 + 1}{5^n \cdot \ln^2 5}$$

$$\Rightarrow R_n \leq \frac{1 + \ln 5^n}{5^n \cdot \ln^2 5} < \frac{1}{10^4} \Rightarrow \frac{5^n \cdot \ln^2 5}{1 + n \cdot \ln 5} > 10^4 .$$

Nejmenší takové n najdu dosazováním a to se mi nechce hledat