Příklady z pravděpodobnosti k procvičování

1. Na schůzi promluvilo 5 řečníků – A, B, C, D, E, každý právě jednou.
(a) Určete počet všech možných pořadí jejich vystoupení. [120]
(b) -, má-li řečník B vystoupit až po řečníkovi A. [60]
(c) -, má-li řečník B vystoupit ihned po řečníkovi A. [24]

2. Mezi 7 dětí rozdělujeme 5 míčů. Kolik je všech možných rozdělení:
(a) když každé dítě dostane nejvýše jeden míč a míče mají různé barvy? [2520]
(b) když každé dítě dostane nejvýše jeden míč a míče mají stejnou barvu? [21]
(c) když míče mají různé barvy? [16807]
(d) když míče mají stejnou barvu? [462]

3. Uvažujme všechna nezáporná celá čísla menší než 10^6.
(a) Kolik je těch, která ve svém ciferném zápisu nemají ani jednu devítku? [531441]
(b) Kolik je těch, která ve svém ciferném zápisu mají alespoň jednu devítku? [468559]

4.
(a) Kolik přesmyček (anagramů) lze získat ze slova MISSISSIPPI? [34650]
(b) V kolika z nich jsou všechna čtyři I hned za sebou? [840]
(c) V kolika z nich nejsou všechna čtyři I hned za sebou? [33810]
(d) V kolika z nich jsou všechna čtyři S hned za sebou? [840]
(e) V kolika z nich nejsou všechna čtyři S hned za sebou? [33810]
(f) V kolika z nich jsou všechna čtyři I hned za sebou i všechna čtyři S hned za sebou? [60]
(g) V kolika z nich jsou všechna čtyři I hned za sebou nebo všechna čtyři S hned za sebou? [1620]
(h) V kolika z nich nejsou všechna čtyři S hned za sebou ani všechna čtyři I hned za sebou? [33030]

5. V závodní jídelně si zákazník skládá menu v konstantní ceně dle vlastního výběru. Vybírá jednu ze 3 druhů polévek, jeden z 8 hlavních chodů, jeden ze 4 salátů a jeden z 5 druhů nápojů. Kolik je všech možnost sestavení plného menu? [480]

6. Kolik různých vrhů může nastat při hodu dvěma kostkami?
(a) Kostky jsou různobarevné. [36]
(b) Obě kostky mají stejnou barvu. [21]

7.
(a) Kolik různých řetězců délky 8 lze vytvořit z číslic 0 a 1? [256]
(b) Kolik z nich začíná trojicí 100 nebo 101? [64]

8. Loučí se pět přátel. Kolik stisků ruky si vymění? [10]

9. Na mistrovství světa v ledním hokeji je vysláno 22 hráčů, z toho 12 útočníků, 8 obránců a 2 brankáři. Kolik různých sestav (3 útočníci, 2 obránci a brankář) je možno vytvořit? [12320]

10.
(a) Kolik různých pěticiferných čísel lze sestavit z číslic 0, 1, 4, 7, 9, aniž by se číslice opakovaly? [96]
(b) Kolik z těchto čísel je sudých? [42]

11. Ve Zverimexu mají v dostatečném počtu čtyři druhy rybiček v ceně 40 Kč za rybičku.
(a) Kolik různých nákupů můžeme pořídit, zaplatíme-li celkem 240 Kč? [84]

(b) -, a rybičky kupujeme zásadně po párech? [20]

12. Kolika způsoby lze rozmístit do 9 přihrádek 7 bílých a 2 černé koule? [289575]

13. Kolika způsoby si 4 děti mohou mezi sebou rozdělit 10 modrých, 15 červených a 8 zelených kuliček, když každé dítě musí dostat alespoň jednu kuličku od každé barvy? [1070160]

14. Házíme 6 různobarevnými kostkami. Určete pravděpodobnosti padnutí následujících figur:
(a) generál – 6 šestek. [$2{,}14 \cdot 10^{-5}$]
(b) postupka – každé číslo jednou. [0,0154]
(c) poker – právě 4 šestky. [0,0080]
(d) alespoň 4 šestky. [0,0087]
(e) samá sudá čísla. [0,0156]

15. Házíme dvěma kostkami. S jakou pravděpodobností padne součet
(a) rovný 6? [0,1388]
(b) menší než 7? [0,4166]

16. V krabici je b bílých a c černých kuliček. Táhneme dvakrát za sebou po jedné kuličce. Určete pravděpodobnost, že:
(a) alespoň jedna vytažená kulička je bílá, když první vytaženou kuličku vrátíme do urny? [$1-\left(\frac{c}{b+c}\right)^2$]
(b) obě kuličky jsou bílé, přičemž první kuličku do urny nevracíme? [$\frac{b(b-1)}{(b+c)(b+c-1)}$]

17. Na pěti lístcích jsou po jednou zapsány čísla 1, 2, 3, 4, 5. Náhodně třikrát po sobě vybereme bez vracení po jednom lístku a položíme je za sebe. Určete pravděpodobnost, že takto zapsané trojciferné číslo bude sudé? [0,4]

18. S jakou pravděpodobností nemají tři náhodně vybraní lidé narozeniny ve stejný den v roce? Uvažujte přitom nepřestupný rok. [0,9918]

19. Kostku, která má nabarvené všechny stěny stejnou barvou, rozřežeme na 1000 menších stejně velkých kostiček stejných rozměrů (na 10 řezů v každé ze 3 os). Kostičky poté zamícháme a náhodně vybereme jednu z nich. Jaká je pravděpodobnost, že vytažená kostička:
(a) má právě 3 obarvené stěny? [0,008]
(b) má právě 2 obarvené stěny? [0,096]
(c) má právě 1 obarvenou stěnu? [0,384]
(d) nemá žádnou obarvenou stěnu? [0,512]

20. Z balíčku 32 hracích karet (4 barev) vybíráme dvakrát po sobě po jedné kartě. Jaká je pravděpodobnost, že:
(a) obě vytažené karty jsou esa, když první kartu do balíčku nevracíme? [0,012]
(b) obě vytažené karty jsou stejné barvy, když první vytaženou kartu jsme do balíčku vrátili? [0,25]

21. V autoopravně na každých 20 oprav připadá 10 výměn oleje, 3 opravu brzd, 2 nastavení světel a zbytek jsou jiné příčiny. Do servisu přijede další auto. Jaká je pravděpodobnost, že bude opravováno z jiné příčiny? [0,25]

22. V dodávce 100 křišťálových váz je 5 vadných. Při kontrole je náhodně vybrány 4 vázy. Spočítejte pravděpodobnost, že:
(a) právě jedna z kontrolovaných váz je vadná. [0,1765]
(b) alespoň jedna z kontrolovaných váz je vadná. [0,1881]

23. Malý chlapec si hraje s kartičkami, na nichž jsou napsána písmena A, A, E, I, K, A, T, M, M, T. Jaká je pravděpodobnost, že se mu náhodným seřazením kartiček podaří sestavit slovo MATEMATIKA? [$6{,}61 \cdot 10^{-6}$]

24. V urně je deset lístků označených postupně přirozenými čísly od 1 do 10. Náhodně vytahujeme 4 lístky po jednom, přičemž každý lístek po vytažení vracíme zpět. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) na všech čtyřech lístcích je stejné číslo. [0,001]

(b) na lístcích jsou 4 různá čísla. [0,504]

(c) na lístcích je jedno číslo třikrát a jiné jednou. [0,036]

(d) na lístcích je jedno čísla dvakrát a dále dvě další různá čísla. [0,432]

25. Na stěnu nádraží se má namontovat 10 automatů na prodej jízdenek, z toho 3 automaty jsou určeny pro prodej jízdenek do zahraničí. Spočítejte pravděpodobnost, že právě tyto 3 automaty budou namontovány hned vedle sebe. [1/15]

26. Hráči střídavě házejí mincí (férovou). Vyhrává ten hráč, jemuž dříve padne líc. Určete pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů:

(a) hrají-li dva hráči. [2/3; 1/3]

(b) hrají-li tři hráči. [4/7; 2/7; 1/7]

(c) hraje-li k hráčů.

27. Házíme klasickou kostkou desetkrát po sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že:

(a) padnou 3 sudá čísla, 2 jedničky a 5 trojek a/nebo pětek. [0,036]

(b) v prvních 4 hodech padnou čísla větší než 4 a v posledních 5 hodech čísla menší než 5. [0,0016]

28. Nechť $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ je prostor elementárních jevů. Vypište všechna možná jevová pole $\mathscr{A}$ na Ω.

29. Máme 4 výrobky. Jev A znamená, že alespoň jeden z nich je zmetek. jev B znamená, že zmetky jsou nejvýše dva. Vyjádřete, co znamenají jevy $\bar{A}$ a $\bar{B}$.

30. Strojovna je tvořena dvěma paralelně zapojenými kotli, za nimiž je sériově připojen stroj. Označme $A =$ stroj je provozuschopný, $B_1 =$ kotel 1 je provozuschopný, $B_2 =$ kotel 2 je provozuschopný. Vyjádřete pomocí těchto jevů jev $C =$ strojovna je provozuschopná a jev $\bar{C}$. [$A \cap (B_1 \cup B_2)$; $\bar{A} \cup (\bar{B_1} \cap \bar{B_2})$]

31. Výrobky dělíme do 3 skupin na standardní (A), použitelné (B) a nepoužitelné (C). Vyjádřete následující jevy:

(a) $A \cup B$ [standardní nebo použitelný výrobek]

(b) $\overline{A \cup C}$ [použitelný výrobek]

(c) $A \cap C$ [nemožný jev]

(d) $(A \cap B) \cup C$ [nepoužitelný výrobek]

(e) $A \cup B \cup C$ [jistý jev]

32. Při výrobě bot se na náhodně vybraném páru provádí tři zkoušky kvality. Označme jevy: $A =$ zkoušený pár bot vyhoví první zkoušce, $B =$ vyhoví druhé zkoušce, $C =$ vyhoví třetí zkoušce. Zapište pomocí nich jevy, že zkoušený pár bot vyhoví:

(a) při první zkoušce [A]

(b) pouze při první zkoušce [$A \cap \bar{B} \cap \bar{C}$]

(c) alespoň při jedné zkoušce [$A \cup B \cup C$]

(d) právě při jedné zkoušce [$(A \cap \bar{B} \cap \bar{C}) \cup (B \cap \bar{A} \cap \bar{C}) \cup (C \cap \bar{B} \cap \bar{A})$]

(e) při všech zkouškách [$A \cap B \cap C$]

(f) při nejvýše dvou zkouškách [$\overline{A \cap B \cap C}$]

33. Čtyři osoby si při vstupu do baru odložily na věšák své čtyři klobouky. Po jisté době strávené konzumací odcházejí a klobouky si berou náhodně. Spočítejte pravděpodobnost, že alespoň jedna osoba si vezme svůj klobouk. [0,625]

34. V krabici je šest koulí očíslovaných od 1 do 6. Postupně náhodně vybereme po jedné všechny koule z krabice bez vracení. Spočítejte pravděpodobnost, že alespoň v jednom tahu bude číslo koule shodné s pořadím tahu. [0,6319]

35. Do výtahu $n$poschoďové budovy nastoupilo k osob, $k \geq n$. Za předpokladu, že každá z k osob vystoupí se stejnou pravděpodobností v libovolném z n pater, určete pravděpodobnost, že v každém poschodí vystoupí alespoň jedna osoba. Spočítejte pravděpodobnost konkrétně pro $n = 5,\ k = 8$. [0,3226]

36. Pevnina zabírá $149 \cdot 10^6$ km^2 povrchu Země a moře tvoří $361 \cdot 10^6$ km^2. Jaká je pravděpodobnost, že padající meteorit dopadne na pevninu? [0,292]

37. Dva přátelé si domluvili schůzku na určitém místě, ale nedohodli se na přesném čase, jen že se sejdou mezi 17.00 a 18.00, přičemž každý z nich počká 20 minut (potom odejde). Předpokládáme, že oba přijdou kdykoliv během smluvené doby nezávisle na sobě. Spočítejte pravděpodobnost, že se skutečně potkají. [5/9]

38. Úsečka dlouhá 200 mm je rozdělena dvěma řezy na náhodně zvolených místech. Spočítejte pravděpodobnost, že prostřední díl úsečky bude nejvýše 10 mm dlouhý. [0,0975]

39. Zvolme náhodně dvě čísla $x, y \in (0, 1)$. Určete pravděpodobnost, že jejich součet je menší než 1 a jejich součin je menší nebo rovný 0,09. [0,2977]

40. Předpokládejme, že koeficienty kvadratické rovnice $x^2 + px + q = 0$ splňují podmínky $|p| \leq 1,\ |q| \leq 1$ a nabývají těchto hodnot se stejnou pravděpodobností. Spočítejte pravděpodobnost, že kořeny kvadratické rovnice jsou:

(a) reálná čísla. [13/24]

(b) kladná čísla. [1/48]

41. V rovině je nakresleno nekonečně mnoho rovnoběžek, vzdálených od sebe o hodnotu d. Na rovinu hodíme jehlu o délce h, $h < d$. Spočítejte pravděpodobnost, že jehla protne některou rovnoběžku. [$\frac{2h}{\pi d}$]

42. Dvě dodávky vozí výrobky do skladu s jednou nakládací rampu v časovém intervalu 12 hodin, přičemž časy jejích příjezdů jsou náhodné a vzájemně nezávislé. Dodávka 1 vykládá zboží 1 hodinu, dodávka 2 pak 2 hodiny. Spočítejte pravděpodobnost, že některá z dodávek bude muset před skladem čekat na uvolnění rampy. [0,2326]

43. Proti dostatečně velké síti se čtvercovými oky velikosti 8×8 cm kolmo hodíme míček o průměru 5 cm. jaká je pravděpodobnost, že míček proletí bez doteku sítě? [9/64]

44. Po bouři bylo zjištěno, že nefunguje telefonní linka mezi 40. a 70. kilometrem vedení. Jaká je pravděpodobnost, že vedení bylo přerušeno mezi 50. a 55. kilometrem? [1/6]

45. V krabici jsou čtyři lístky s čísly 000, 110, 101, 011. Náhodně vytáhneme jeden lístek. Označme jevy $A_i =$ vytažený lístek má na i-tém místě jedničku, $i = 1, 2, 3$. Jsou jevy A_1, A_2, A_3 stochasticky nezávislé, resp. po dvou nezávislé? [ne; ano]

46. Semínko slunečnice vyklíčí s pravděpodobností 0,4. Když zasejeme 7 takových semínek, jaká je pravděpodobnost, že alespoň jedno z nich vyklíčí? [0,972]

47. Střelec střílí třikrát nezávisle na sobě na terč. Pravděpodobnosti zásahů při jednotlivých opakováních jsou postupně 0,4; 0,5; 0,7. Spočítejte pravděpodobnost, že střelec zasáhne terč

(a) právě jednou. [0,36]

(b) alespoň jednou. [0,91]

(c) právě dvakrát. [0,41]

48. Na dvoukolejném železničním mostě se potkají během 24 hodin nejvýše 2 vlaky, a to s pravděpodobností 0,2. Za předpokladu, že vlaky jezdí náhodně a nezávisle na sobě, určete pravděpodobnost, že se během jednoho týdne vlaky na mostě potkají:

(a) právě třikrát. [0,1147]

(b) nejvýše třikrát. [0,9666]

(c) alespoň třikrát. [0,1481]

49. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padly dvě pětky, je-li známo, že součet ok je dělitelný pěti? Jsou tyto jevy stochasticky nezávislé? [1/7; ne]

50. Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami padl součet sedm, víme-li, že nepadla žádná dvojka? Jsou tyto jevy stochasticky nezávislé? [0,16; ne]

51. Nechť platí $P(A) = 0{,}3$, $P(B) = 0{,}4$ a $P(A \cup B) = 0{,}6$.

(a) Spočítejte $P(A|B)$ a $P(B|A)$. [1/4; 1/3]

(b) Jsou jevy A, B stochasticky nezávislé? [ne]

52. Uvažujeme rodiny se dvěma dětmi.

(a) Předpokládejme, že jedno z dětí je dcera. Jaká je pravděpodobnost, že rodina má dvě dcery? [1/3]

(b) Předpokládejme, že jedno z dětí je dcera jménem Kunhuta. Jaká je pravděpodobnost, že rodina má dvě dcery? [skoro 1/2]

53. Házíme naráz dvěma kostkami – modrou a červenou. Označíme jevy: $A =$ na modré kostce padlo liché číslo, $B =$ na červené kostce padlo sudé číslo, $C =$ součet padlých čísel je lichý. Jsou jevy A, B, C stochasticky nezávislé, resp. po dvou nezávislé? [ne; ano]

54. První dělník vyrobí denně 60 výrobků, z toho 10 % zmetků. Druhý dělník vyrobí denně 40 výrobků, z toho 5 % zmetků. Z denní produkce náhodně vybereme jeden výrobek. Jaká je pravděpodobnost, že je zmetek

(a) a pochází od prvního dělníka? [0,06]

(b) a pochází od druhého dělníka? [0,02]

55. Z pěti výrobků, mezi nimž jsou právě tři zmetky, vybíráme třikrát bez vracení po jednom výrobku. Označíme jevy $A_i =$, že i-tý vybraný výrobek je zmetek, $i = 1, 2, 3$. Spočítejte pravděpodobnost společného nastoupení jevů $\overline{A_1}, A_2$ a A_3. [0,2]

56. Dříve, než propukne nemoc D, lze její výskyt odhalit testem T. Tento test však není jednoznačný: u skrytě nemocné osoby je test pozitivní s pravděpodobností 0,999 (tzv. *senzitivita* testu), u zdravé osoby jen s pravděpodobností 0,01. U zdravé osoby je test negativní s pravděpodobností 0,99 (tzv. *specificita* testu). Sledovanou nemoc má 10 % vyšetřované populace (tzv. *incidence* nemoci). Určete pravděpodobnosti, že osoba s pozitivním testem má skutečně danou nemoc, a že osoba s negativním testem je opravdu zdravá. [0,917355; 0,999888]

57. Snímkování rentgenem prováděné ke zjištění tuberkulózy (TBC) má tyto vlastnosti: u lidí majících TBC objeví tuto nemoc v 90 případech ze 100, u lidí nemajících TBC snímek v 1 ze 100 případů vede k nesprávné diagnóze, že pacient má TBC. Předpokládejme, že TBC se vyskytuje u 5 lidí z 10000. Náhodně vybraná osoba je snímkována a radiolog na základě výsledku hlásí podezření na TBC. S jakou pravděpodobností má tato osoba skutečně TBC? [0,043]

58. Tenista má první podání úspěšné s pravděpodobností 0,6, příp. druhé podání pak s pravděpodobností 0,8. Spočítejte pravděpodobnost, že se tenista při podání dopustí dvojchyby. [0,08]

59. Tři výrobci dodávají do obchodu žárovky. První výrobce dodává 45 %, druhý 40 % a třetí výrobce dodává zbylé množství žárovek. Přitom první výrobce má 70 % standardních žárovek, druhý 80 % a třetí výrobce dodává 81 % standardních žárovek. Jaká je pravděpodobnost, že náhodně zakoupená žárovka v tomto obchodě bude standardní? [0,7565]

60. V zásilce 150 pytlů s ořechy z Turecka je 5 pytlů zkažených, v zásilce 250 pytlů z Afghánistánu je také 5 pytlů zkažených ořechů.

(a) Ze všech došlých pytlů ořechů vybereme náhodně jeden pytel. Jaká je pravděpodobnost, že obsahuje zkažené ořechy? [1/40]

(b) Náhodně vybereme jedu zásilku a z ní pak jeden pytel. Jaká je pravděpodobnost, že obsahuje zkažené ořechy? [2/75]

61. Ve studijní skupině je 23 posluchačů. Pravděpodobnost složení zkoušky z teorie pravděpodobnosti a matematické statistiky je pro 8 posluchačů 0,9, pro dalších 12 posluchačů 0,6 a pro poslední 3 posluchače 0,4. Spočítejte pravděpodobnost, že náhodně vybraný posluchač zkoušku složí. [0,6783]

62. Test obsahuje 100 otázek, z nichž si zkoušený jednu vylosuje. Potom se zkoušený rozhoduje takto: zná-li správnou odpověď, zvolí ji; nezná-li správnou odpověď, volí jednu ze 4 nabízených odpovědí náhodně. Předpokládejme, že zkoušený zná správné odpovědi na právě k ze 100 otázek.

(a) S jakou pravděpodobností zkoušený na otázku odpoví správně? $[\frac{1}{4}+\frac{3k}{400}]$

(b) Když zkoušený odpoví správně, s jakou pravděpodobností odpověď pouze hádal? $[1-\frac{4k}{100+3k}]$

63. Na pultě v galanterii leží 10 stejných krabiček. V každé z nich je 10 knoflíků, přičemž v i-té krabičce je právě i knoflíků černých a $(10-i)$ bílých. Zákazník náhodně zvolí jednu krabičku a z ní náhodně vybere jeden knoflík. Jaká je pravděpodobnost, že je černý? [0,55]

64. Pojišťovací společnost rozlišuje podle rizikovosti tři skupiny řidičů: A, B, C. Pravděpodobnost, že řidič patřící do skupiny A bude mít během roku nehodu, je 0,03, podobně pro řidiče skupiny B je rovna 0,06 a pro řidiče skupiny C 0,10. Podle dlouhodobých záznamů společnosti je 70 % řidičů zařazeno do skupiny A, 20 % do skupiny B a 10 % do skupiny C. Náhodně vybraný klient společnosti měl nehodu. Spočítejte pravděpodobnosti, že patřil do uvedených tří skupin. [0,488; 0,279; 0,233]

65. U jistého druhu elektrického spotřebiče se s pravděpodobností 0,1 vyskytuje výrobní vada. U spotřebiče s touto vadou dochází v záruční lhůtě k poruše s pravděpodobností 0,5. Výrobky bez této výrobní vady se během záruční doby porouchají jen s pravděpodobností 0,01. Spočítejte pravděpodobnost, že:

(a) se náhodně vybraný výrobek v záruční době porouchá. [0,059]

(b) výrobek, která se v záruční době porouchá, má dotyčnou výrobní vadu. [0,8475]

(c) výrobek, která se v záruční době porouchá, nemá dotyčnou výrobní vadu. [0,1525]

66. Máme tři stejné krabice. První obsahuje 1 bílou, 2 černé a 3 zelené kuličky, druhá obsahuje 2 bílé, 1 černou a 1 zelenou kuličku a v poslední krabici jsou 4 bílé, 5 černých a 3 zelené kuličky. Náhodně jsme zvolili jednu krabici a z ní vytáhli bez vracení dvě kuličky: bílou a zelenou. Spočítejte pravděpodobnosti, že jsme tyto dvě kuličky vytáhli z jednotlivých krabic. [0,2797; 0,4661; 0,2542]

67. Laboratorní krysa má možnost si náhodně vybrat jedno z pěti bludišť. Pravděpodobnosti, že stihne jednotlivými bludišti projít do 3 minut jsou postupně 0,6; 0,3; 0,2; 0,1 a 0,1. Určete pravděpodobnost, že jestliže se krysa se zvoleného bludiště dostala ve stanovené době 3 minut,

(a) vybrala si první bludiště. [0,4615]

(b) vybrala si druhé bludiště. [0,2308]

68. Smith a Jones hrají poker. Smith má velmi silný list a sází značný obnos. Pravděpodobnost, že jeho soupeř Jones má lepší list, je jen 0,05. S lepším listem zvýší Jones sázku s pravděpodobností 0,9, ale se slabším listem pouze s pravděpodobností 0,2. Jones sázku zvýšil. Jaká je pravděpodobnost, že má vyhrávající list? [0,1915]

69. Hráči bylo řečeno, že ze tří hracích automatů vyplácí jeden výhry s pravděpodobností 1/2, kdežto zbývající dva s pravděpodobností 1/3.

(a) Jaká je pravděpodobnost, že hráč, který si zvolil náhodně jeden z automatů, první hru prohraje a druhou vyhraje? [0,2315]

(b) Jaká je pravděpodobnost, že si hráč vybral nejpříznivější automat, víme-li, že v první hře prohrál a ve druhé vyhrál? [0,36]

70. Uvažujeme dvě osudí: osudí A obsahuje 1 černou a 1 bílou kuličku, v osudí B jsou 2 černé a 3 bílé kuličky. Z osudí A vytáhneme náhodně jednu kuličku a vložíme ji do osudí B. Potom vytáhneme jednu kuličku z osudí B. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) kulička z osudí A a kulička z osudí B mají stejnou barvu? [7/12]

(b) kulička z osudí A byla bílá, víme-li, že kulička tažená z osudí B je černá? [2/5]

71. Zákazník si náhodně vybírá obraz ze skupiny obsahující 8 originálů a 2 kopie. Svoje rozhodnutí přitom konzultuje s expertem, který pozná originál s pravděpodobností 5/6.

(a) Expert soudí, že vybraný obraz je originál. S jakou pravděpodobností to originál skutečně je? [0,9524]

(b) Expert soudí, že vybraný obraz je kopie. Zákazník proto obraz odloží a volí náhodně (již bez konzultace s expertem) jeden ze zbývajících obrazů. Jaká je pravděpodobnost, že takto zvolí originál? [0,8395]

72. V osudí A je 5 bílých a 5 černých koulí, osudí B je prázdné. Z osudí A náhodně vytáhneme 5 koulí a vložíme je do osudí B. Z osudí B pak náhodně vytáhneme jednu kouli a zjistíme, že je černá. Kouli nevrátíme a z osudí B vytáhneme ještě jednu kouli. Spočítejte pravděpodobnost, že tato koule bude bílá. [5/9]

73. Krabice obsahuje n, $n > 2$, koulí – bílé a černé. Byla naplněna takto: n-krát bylo hozeno kostkou; pokud padla šestka, do krabice byla vložena bílá koule, jinak byla vložena černá koule. Z takto naplněné krabice byla náhodně vylosována jedna koule a zjistilo se, že je bílá. Spočítejte pravděpodobnost, že krabice před tímto tahem obsahovala právě jednu bílou kouli. $[(\frac{5}{6})^{n-1}]$

74. Náhodná veličina X nabývá hodnot 0, anebo 1, a to s pravděpodobnostmi $\mathrm{P}(X = 0) = p$, $\mathrm{P}(X = 1) = 1-p$, kde $p \in [0;1]$. Určete distribuční funkci a graficky ji znázorněte.

75. Náhodná veličina X udává číslo, které padlo při hodu klasickou kostkou.

(a) Určete rozdělení pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.

(b) Dále určete distribuční funkci a nakreslete její graf.

76. Házíme třikrát klasickou kostkou. Náhodná veličina X udává počet padnutých šestek.

(a) Určete pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.

(b) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}(X > 2)$. [0,4166]

77. Řidič musí projet čtyři křižovatky řízené semafory. Na každé křižovatce svítí zelená a červená s pravděpodobnostmi 50 %, oranžovou pro jednoduchost neuvažujeme. Náhodná veličina X udává počet projetých křižovatek, než řidič musí na červenou zastavit.

(a) Určete rozdělení pravděpodobnostní funkci této náhodné veličiny.

(b) Určete distribuční funkci a nakreslete její graf.

78. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 3 \\ \frac{x}{3} - 1, & 3 \leq x < 6 \\ 1, & x \geq 6 \end{cases} .$$

(a) Určete hustotu pravděpodobnosti.

(b) Obě funkce znázorněte graficky.

79. Náhodná veličina X má distribuční funkci

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ x^2 & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} .$$

(a) Určete hustotu pravděpodobnosti.
(b) Obě funkce znázorněte graficky.
(c) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}(1 < 4X < 3)$. [0,5]

80. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ a + b \sin x & 0 \le x < \frac{\pi}{2} \\ 1 & x \ge \frac{\pi}{2} \end{cases}.$$
(a) Určete $a, b \in \mathbb{R}$ tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí spojité náhodné veličiny X. $[a = 0,\ b = 1]$
(b) Určete hustotu pravděpodobnosti X.
(c) Obě funkce načrtněte.
(d) Spočítejte $\mathrm{P}(0 < X < \pi/4)$. $[\sqrt{2}/2]$

81. Je dána funkce
$$f(x) = \begin{cases} c(1-x)x & 0 \le x < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. $[c = 6]$
(b) Určete distribuční funkci X.
(c) Obě funkce načrtněte.
(d) Spočítejte $\mathrm{P}(X > 0{,}2)$. [0,896]

82. Je dána funkce
$$f(x) = \begin{cases} c \cos x & -\pi \le 2x < \pi \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. $[c = 1/2]$
(b) Určete distribuční funkci X.
(c) Obě funkce načrtněte.
(d) Spočítejte $\mathrm{P}(0 < X < \pi/4)$. $[\sqrt{2}/4]$

83. Je dána funkce
$$f(x) = \frac{a}{1 + x^2}.$$
(a) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X. $[a = 1/\pi]$
(b) Určete distribuční funkci X.
(c) Obě funkce načrtněte.
(d) Spočítejte $\mathrm{P}(|X| < 1)$. [0,5]

84. Je dána funkce
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{x}{2}.$$
Určete $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ tak, aby $\mathrm{P}(X > x_1) = 1/4$ a $\mathrm{P}(X > x_2) = 1/6$. $[2;\ 2\sqrt{3}]$

85. Je dána funkce
$$F(x) = \begin{cases} a + b\,\mathrm{e}^{-x} & x > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$
(a) Určete $a \in \mathbb{R}$ tak, aby $F(x)$ byla distribuční funkcí spojité náhodné veličiny X. $[a = 1,\ b = -1]$
(b) Určete hustotu pravděpodobnosti X.
(c) Obě funkce načrtněte.

(d) Spočítejte $\mathrm{P}(0 < X < 3)$. [0,95]

86. Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodné veličiny X:
(a) $f(x) = c\,x\,\mathrm{e}^{-x}$ pro $x > 0$ [1]
(b) $f(x) = c\,\sin x$ pro $x \in (0; 2\pi)$ [neexistuje]

87. Tramvaj jezdí v pětiminutových intervalech. Cestující přichází na její zastávku ve zcela náhodném čase.
(a) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny, udávající dobu čekání cestujícího na příjezd tramvaje na zastávce.
(b) Určete distribuční funkci této náhodné veličiny.
(c) Obě funkce graficky znázorněte.
(d) S jakou pravděpodobností bude cestující čekat na tramvaj nejdéle 2 minuty? [0,4]
(e) -bude čekat více než 2 minuty a zároveň méně než 4 minuty? [0,4]

88. Dokažte přepočtový vzorec $\Phi(-u) = 1 - \Phi(u)$ pro distribuční funkci, $\Phi(u)$, $u \in \mathbb{R}$, standardizovaného normálního rozdělení pravděpodobnosti $\mathrm{N}(0;1)$.

89. Doba čekání zákazníka ve frontě u pokladny v obchodě se řídí exponenciálním rozdělením pravděpodobnosti. Předpokládejme, že střední doba čekání je rovna 50 s.
(a) Spočítejte pravděpodobnost, že zákazník bude obsloužen dříve než za 30 s. [0,451]
(b) Určete čas T tak, aby do tohoto času bylo obslouženo 80 % zákazníků čekajících ve frontě. [1 min 20,47 s]

90. Počet nově narozených dětí v Brně během časového intervalu konstantní délky se řídí Poissonovým rozdělením pravděpodobnosti. Předpokládejme, že v průměru se narodí 15 dětí za 1 den.
(a) S jakou pravděpodobností se během 2 minut narodí alespoň 1 dítě? [0,0206]
(b) Jak dlouhý musí být časový interval, aby pravděpodobnost, že se během něj narodí alespoň 1 dítě, byla alespoň 5 %? [4 min 55 s]

91. Výška dětí ve věku 3,5 až 4 roky v populaci je považována za náhodnou veličinu s normálním rozdělením s parametry $\mu = 102$ cm a $\sigma = 4{,}5$ cm.
(a) Jaký je podíl těch dětí v populaci, které mají výšku menší nebo rovnou 93 cm? [2,3 %]
(b) -které mají výšku mezi 97,5 cm a 111 cm? [81,9 %]

92. Z bedny, která obsahuje 9 červených, 8 zelených a 3 žluté míčky, vytáhneme naráz 6 míčků. Nechť náhodné veličiny X a Y označují počty vytažených červených , resp. zelených míčků.
(a) Určete rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$.
Spočítejte $\mathrm{P}(X = 1, Y \leq 4)$. [0,0943]

93. V zásilce 10 výrobků je 8 kvalitních a 2 nekvalitní. Mezi kvalitními je 5 výrobků I. jakosti a 3 výrobky jsou II. jakosti. Ze zásilky náhodně vybereme 2 výrobky bez vracení. Náhodná veličina X udává počet vybraných kvalitních výrobků, náhodná veličina Y udává počet vybraných výrobků I. jakosti.
(a) Stanovte simultánní a marginální rozdělení pravděpodobnosti veličin X, Y.
(b) Určete simultánní a marginální distribuční funkce veličin X, Y.

94. Dokažte, že funkce

$$p(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{16}(x+y)(x-y) & x = 2,3;\ y = 1,2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

definuje rozdělení pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$. Dále spočítejte marginální rozdělení pravděpodobnosti.

95. Je dána funkce

$$p(x_1,x_2,x_3) = \begin{cases} kx_1x_2x_3^2 & x_1 = 0,2;\ x_2 = 0,2;\ x_3 = 0,1,2,3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Určete $k \in \mathbb{R}$ tak, aby $p(x_1, x_2, x_3)$ byla pravděpodobnostní funkcí náhodného vektoru $(X_1, X_2, X_3)'$. [1/56]

96. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,\mathrm{e}^{x+y} & (x,y) \in [1;2] \times [1;2] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x,y)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$. [$\mathrm{e}^{-2}(\mathrm{e}-1)^{-2}$]

(b) Spočítejte distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$.

97. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} c\,x\,\mathrm{e}^{xy} & (x,y) \in [0;1] \times [0;1] \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x,y)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$. [$(\mathrm{e}-2)^{-1}$]

(b) Spočítejte distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$.

98. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} cx(b-xy) & 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x,y)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$. [3/16]

(b) Spočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti.

99. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-(x+y)} & x > 0,\ y > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Dokažte, že $f(x,y)$ je hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$.

(b) Spočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti.

(c) Spočítejte simultánní distribuční funkci.

(d) Spočítejte marginální distribuční funkce.

100. Je dána funkce

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} + \frac{y}{3}\right) & 0 < x < 2,\ 0 < y < 3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Dokažte, že $f(x,y)$ je hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y)'$.

(b) Spočítejte marginální hustoty pravděpodobnosti.

(c) Spočítejte simultánní distribuční funkci.

(d) Spočítejte marginální distribuční funkce.

(e) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}(0 < X \le 1,\ 2 < Y \le 3)$. [13/72]

101. Je dána funkce

$$f(x,y,z) = \begin{cases} c(x+y+z) & (x,y,z) \in [0;1]^3 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

(a) Určete $c \in \mathbb{R}$ tak, aby $f(x,y,z)$ byla hustotou pravděpodobnosti náhodného vektoru $(X,Y,Z)'$. [2/3]

(b) Spočítejte pravděpodobnost $\mathrm{P}\left((X,Y,Z) \in \left[0;\frac{1}{2}\right]^3\right)$. [1/16]

102. Nechť $(X_1, X_2)' \sim \mathrm{R_d}(G)$, kde $G = \{(-1;0);\ (0;1);\ (1;0)\}$. Jsou náhodné veličiny X_1, X_2 stochasticky nezávislé? [ne]

103. Spojitý náhodný vektor $(X,Y)'$ má hustotu

$$f(x,y) = \begin{cases} 24x^2y(1-x) & 0 < x < 1,\ 0 < y < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}.$$

Jsou náhodné veličiny X,Y stochasticky nezávislé? [ano]

104. Vzájemně stochasticky nezávislé náhodné veličiny $X_1,\dots,X_n \sim \mathrm{Ex}(\lambda)$ udávají dobu čekání n zákazníků ve frontě.

(a) Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny $\max\{X_1,\dots,X_n\}$.

(b) Odvoďte distribuční funkci náhodné veličiny $\min\{X_1,\dots,X_n\}$.

(c) Určete pravděpodobnost, že zákazník, který čekal nejkratší dobu, čekal ve frontě alespoň t sekund.

(c) Určete pravděpodobnost, že zákazník, který čekal nejdelší dobu, čekal ve frontě nejvýše t sekund.

105. Doby životnosti dvou součástek jsou dvě stochasticky nezávislé náhodné veličiny s exponenciálním rozdělením s parametry λ_1,λ_2. Nechť $t \geq 0$ je pevně zvolený časový interval. Spočítejte pravděpodobnosti, že:

(a) první součástka přežije dobu t.

(b) obě součástky přežijí dobu t.

(c) právě jedna ze součástek přežije dobu t.

(d) alespoň jedna ze součástek přežije dobu t.

(e) druhá součástka přežije první součástku.

106. Je dána funkce $F(x,y) = \frac{1}{4}x^2y^2$, pro $x \in [0;1]$, $y \in [0;2]$. Dodefinujte ji tak, aby se jednalo o distribuční funkci náhodného vektoru $(X,Y)'$. Jsou náhodné veličiny X,Y stochasticky nezávislé? [ano]

107. Vzájemně stochasticky nezávislé náhodné veličiny X_1,X_2,X_3 mají stejnou hustotu pravděpodobnosti

$$f_{X_i}(x_i) = \begin{cases} 3x_i^2 & 0 < x_i < 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases},\ i = 1,2,3.$$

(a) Určete jejich distribuční funkce.

(b) Spočítejte pravděpodobnosti, že právě k z těchto veličin nabudou hodnoty větší než 0,5.

108. Na automatické lince jsou plněny litrové lahve s mlékem. Je známo, že objem mléka v naplněných kolísá od 0,98 l do 1,02 l. V tomto intervalu považujeme každý objem za stejně možný. Náhodně jsou vybrány 3 lahve. Jaká je pravděpodobnost, že:

(a) nejméně naplněná láhev bude obsahovat alespoň 1 l mléka? [0,125]

(b) nejvíce naplněná láhev nebude obsahovat více než 1,01 l mléka? [0,4219]

(Aktualizace: 9. prosince 2014)