Domácí úloha z 6. listopadu 2014 (odevzdává se 13. listopadu 2014)

Dokažte, že polynom $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_5[x]$ je ireducibilní nad $\mathbb{Z}_5$. V tělese $K = \mathbb{Z}_5[x]/(f)$ označme $c = x + (f)$ třídu obsahující polynom x. Vyjádřete v tělese K prvek $(c^2 + c + 1)^{-1}$ ve tvaru $kc^2 + lc + m$ pro vhodná $k, l, m \in \mathbb{Z}_5$.

[Návod: nalezněte největší společný dělitel polynomů f a $x^2 + x + 1$ v $\mathbb{Z}_5[x]$, vyjádřete jej Bezoutovou identitou a této rovnosti polynomů využijte k tomu, že uvážíte hodnoty polynomů zde vystupujících v prvku c.]