

# M5VM05 Statistické modelování

## 1. Průzkumová analýza dat

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno



# Průzkumová analýza jednorozměrných dat

Průzkumová analýza dat je odvětví statistiky, které pomocí různých postupů odhaluje zvláštnosti v datech. Při zpracování dat se často používají metody, které jsou založeny na předpokladu, že data pocházejí z nějakého konkrétního rozložení, nejčastěji normálního. Tento předpoklad nemusí být vždy splněn, protože data

- ▶ mohou pocházet z jiného rozložení
- ▶ mohou být zatížena hrubými chybami
- ▶ mohou pocházet ze směsi několika rozložení.

Proto je důležité provést průzkumovou analýzu dat, abychom se vyvarovali neadekvátního použití statistických metod.

# Funkcionální charakteristiky datového souboru

## Označení

Na množině objektů  $\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n\}$  zjišťujeme hodnoty znaku  $X$ . Hodnotu znaku  $X$  na objektu  $\varepsilon_i$  označíme  $x_i, i = 1, \dots, n$ . V teorii pravděpodobnosti se jim také říká **realizace** náhodné veličiny  $X$ . Tyto hodnoty zaznamenáme do jednorozměrného datového souboru:

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$$

Uspořádané hodnoty  $x_{(1)} \leq x_{(2)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  tvoří uspořádaný datový soubor:

$$\mathbf{x}_{(\cdot)} = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)})'$$

Vektor

$$\mathbf{x}_{[r]} = (x_{[1]}, \dots, x_{[r]})'$$

kde  $x_{[1]} < \dots < x_{[r]}, r \leq n$ , jsou navzájem různé hodnoty znaku  $X$ , se nazývají **vektor variant**.

# Bodové rozložení četností

indikátor množiny:

$$I_B(x) = \begin{cases} 1 & x \in B, \\ 0 & x \notin B. \end{cases}$$

Pro datový soubor  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)'$  definujeme následující pojmy

- absolutní četnost varianty  $x_{[j]}$ :

$$n_j = \sum_{i=1}^n I_{\{x_{[j]}\}}(x_i)$$

- relativní četnost varianty  $x_{[j]}$ :

$$p_j = \frac{n_j}{n}$$

- absolutní kumulativní četnost prvních  $j$  variant:

$$N_j = n_1 + \dots + n_j$$

- relativní kumulativní četnost prvních  $j$  variant:

$$F_j = \frac{N_j}{n} = p_1 + \dots + p_j$$

- četnostní funkce:

$$p(x) = \begin{cases} p_j & \text{pro } x = x_{[j]}, j = 1, \dots, r \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

- empirická distribuční funkce:

$$F(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I_{(-\infty, x]}(x_i)$$

Absolutní či relativní četnosti znázorňujeme graficky např. pomocí sloupkového diagramu či polygonu četností.

# Příklad

U 30 domácností byl zjišťován počet členů.

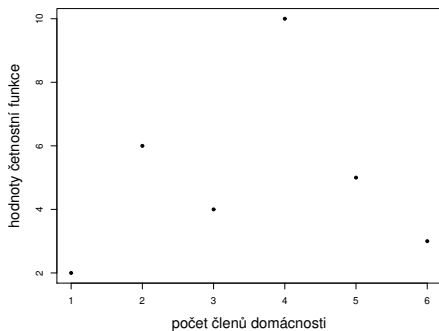
Počet členů	1	2	3	4	5	6
Počet domácností	2	6	4	10	5	3

Vytvořte tabulku rozložení četností. Nakreslete grafy četnostní funkce a empirické distribuční funkce. Dále nakreslete sloupkový diagram a polygon četností počtu členů domácnosti.

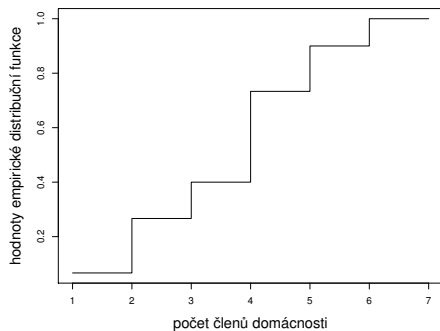
**Řešení.** Tabulka rozložení četností:

$x_{[j]}$	$n_j$	$p_j$	$N_j$	$F_j$
1	2	2/30	2	2/30
2	6	6/30	8	8/30
3	4	4/30	12	12/30
4	10	10/30	22	22/30
5	5	5/30	27	27/30
6	3	3/30	30	1

# Příklad – pokračování

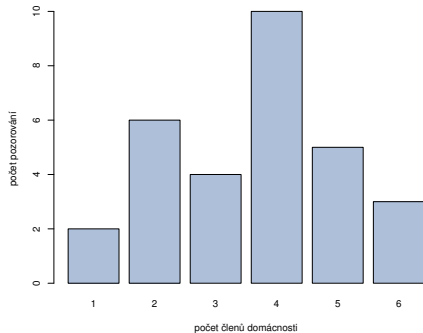


Obr. : Graf četnostní funkce

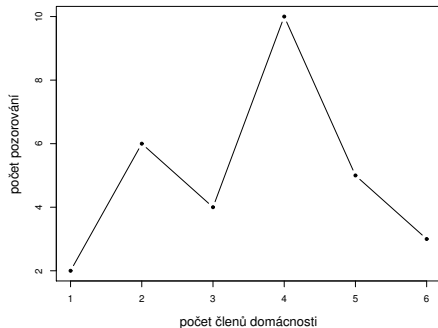


Obr. : Graf empirické distribuční funkce

# Příklad – pokračování



Obr. : Sloupkový diagram



Obr. : Polygon četností



# Intervalové rozložení četností

- ▶ třídící intervaly  $(u_1, u_2), \dots, (u_r, u_{r+1})$
- ▶ doporučuje se volit  $r$  blízké  $\sqrt{n}$ .

**Četnostní hustota**  $j$ -tého třídícího intervalu je definována vztahem

$$f_j = \frac{p_j}{d_j}$$

kde  $d_j = u_{j+1} - u_j$ . Soustava obdélníků sestrojených nad třídícími intervaly, jejichž plochy jsou rovny relativním četnostem, se nazývá **histogram**.

- **hustota četnosti:**

$$f(x) = \begin{cases} f_j & \text{pro } u_j < x \leq u_{j+1}, j = 1, \dots, r \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

(grafem hustoty četnosti je schodovitá čára shora omezující histogram)

- **Intervalová empirická distribuční funkce:**

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt.$$

# Příklad

U 70 domácností byly zjišťovány týdenní výdaje na nealkoholické nápoje (v Kč).

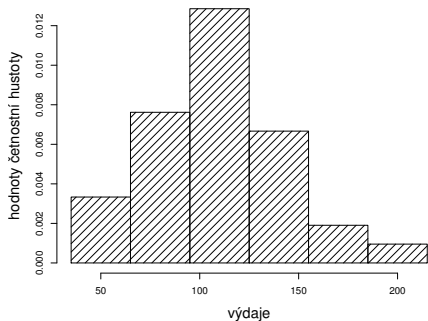
Výdaje	(35, 65)	(65, 95)	(95, 125)	(125, 155)	(155, 185)	(185, 215)
Počet domácností	7	16	27	14	4	2

Sestavte tabulku rozložení četností, nakreslete histogram a graf intervalové empirické distribuční funkce.

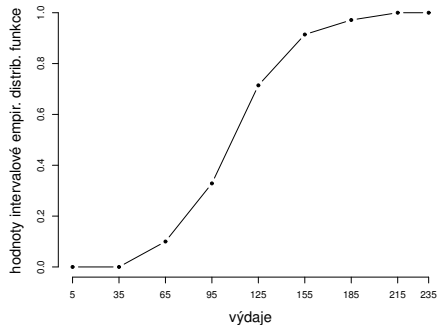
**Řešení.** Tabulka rozložení četností

$(u_j, u_{j+1})$	$n_j$	$p_j$	$f_j$	$N_j$	$F_j$
(35, 65)	7	7/70	7/2100	7	7/70
(65, 95)	16	16/70	16/2100	23	23/70
(95, 125)	27	27/70	27/2100	50	50/70
(125, 155)	14	14/70	14/2100	64	64/70
(155, 185)	4	4/70	4/2100	68	68/70
(185, 215)	2	2/70	2/2100	70	1

# Příklad – pokračování



Obr. : Histogram



Obr. : Graf intervalové empirické distribuční funkce

## Znaky nominálního typu

Nominální škála klasifikuje objekty do určitých předem vymezených tříd či kategorií. Hodnoty v nominální škále se dají vyjádřit slovně a mezi různými hodnotami není definováno žádné uspořádání. Pokud jsou hodnoty nominální škály někdy označovány číselně, mějme na paměti, že toto číslo je pouze jakousi zkratkou (kódem) slovní hodnoty. O znacích měřených v nominální škále hovoříme jako o znacích nominálního typu.

Příklady znaků nominálního typu mohou být např.:

- pohlaví (s možnými hodnotami mužské, ženské)
- barva očí (modrá, hnědá, černá)
- výsledek léčby (uzdraven, zemřel)
- národnost (česká, slovenská, polská, německá, ...)

Charakteristikou polohy je **modus** – nejčtenější varianta či střed nejčtenějšího intervalu. (Modus je jediná charakteristika polohy vhodná pro nominální veličiny).

# Číselné charakteristiky datového souboru

## Znaky ordinálního typu

Znaky ordinálního typu lze podle sledované vlastnosti nejen rozlišovat, ale také uspořádat ve smyslu vztahů „je větší“, „je menší“ nebo „předchází“, „následuje“, aniž bychom však byli schopni vyjádřit číselně vzdálenost mezi větším a menším či mezi předcházejícím a následujícím.

Znaky ordinálního typu mohou být např.:

- dosažené vzdělání (základní, střední, vysokoškolské)
- prospěch ve školním předmětu (výborně, velmi dobře, dobře, nevyhověl)
- stav pacienta (vyléčen, remise, recidiva)
- hodnocení funkce technických zařízení (stupně závažnosti poruchy jaderné elektrárny)
- hodnocení postojů v sociologických průzkumech (škála má hodnoty např. souhlasím, spíše souhlasím, spíše nesouhlasím, nesouhlasím)
- četnost výskytu (často, občas, zřídka, nikdy)

Vhodnou charakteristikou polohy je  $\alpha$ -kvantil.

Je-li  $\alpha \in (0;1)$ , pak  $\alpha$ -kvantil  $x_\alpha$  je číslo, které rozděljuje uspořádaný datový soubor na dolní úsek, obsahující aspoň podíl  $\alpha$  všech dat a na horní úsek obsahující aspoň podíl  $1 - \alpha$  všech dat.

# Číselné charakteristiky datového souboru

Pro výpočet  $\alpha$ -kvantilu slouží algoritmus:

$$n\alpha = \begin{cases} \text{celé číslo } c & \Rightarrow x_\alpha = \frac{x_{(c)} + x_{(c+1)}}{2} \\ \text{necelé číslo} & \Rightarrow \text{zaokrouhlíme nahoru na nejbližší celé číslo} \\ & x_\alpha = x_{(c)} \end{cases}$$

Pro speciálně zvolená  $\alpha$  užíváme názvů:

- $x_{0,50}$  – medián
- $x_{0,25}$  – dolní kvartil
- $x_{0,75}$  – horní kvartil
- $x_{0,1}, \dots, x_{0,9}$  – decily
- $x_{0,01}, \dots, x_{0,99}$  – percentily.

Jako charakteristika variability slouží **kvartilová odchylka**:  $q = x_{0,75} - x_{0,25}$ .

# Příklad

Během semestru se studenti podrobili písemnému testu z matematiky, v němž bylo možno získat 0 až 10 bodů. Výsledky jsou uvedeny v tabulce:

Počet bodů	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Počet studentů	1	4	6	7	11	15	19	17	12	6	3

Zjistěte modus, medián, 1. decil, 9. decil a kvartilovou odchylku počtu bodů.

**Řešení.** Modus je nejčastější varianta znaku, v tomto případě tedy 6.

Vypočteme rozsah datového souboru:  $n = 1 + 4 + \dots + 3 = 101$ .

Výpočty uspořádáme do tabulky.

$\alpha$	$n\alpha$	$c$	$x_\alpha = x_{(c)}$
0,50	50,5	51	6
0,10	10,1	11	2
0,90	90,9	91	8
0,25	25,25	26	4
0,75	75,75	76	7

Kvartilová odchylka:  $q = 7 - 4 = 3$ .

# Znaky intervalového a poměrového typu

U znaků **intervalového typu** lze stanovit vzdálenost mezi hodnotami měřené veličiny. Je zde definována jednotka měření, avšak nula je definována pouze relativně. To nám dovoluje proto počítat s rozdíly naměřených hodnot, nikoliv s jejich podíly. Typickým příkladem je teplota, která se dá měřit v různých stupnicích (Celsiova, Fahrenheitova).

U znaků **poměrového typu** lze určit nejen rozdíly (intervaly) mezi hodnotami, ale i podíly hodnot, neboť tyto znaky mají nulu stanovenou absolutně a jednoznačně.

Charakteristiky **polohy**:

- **Aritmetický průměr**  $\bar{x}$ :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \quad (1)$$

U poměrových znaků, které nabývají pouze kladných hodnot, lze použít

- **geometrický průměr**:

$$\sqrt[n]{x_1 \cdot \dots \cdot x_n} \quad (2)$$



# Znaky intervalového a poměrového typu

Charakteristiky variability:

- rozptyl:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 \quad (3)$$

- směrodatná odchylka:

$$s = \sqrt{s^2} \quad (4)$$

- koeficient variace (pro poměrové znaky):

$$\frac{s}{\bar{x}} \quad (5)$$

Rozptyl se zpravidla počítá podle vzorce  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2$ .

# Znaky intervalového a poměrového typu

Známe-li absolutní či relativní četnosti variant  $x_{[1]}, \dots, x_{[r]}$ , můžeme spočítat

- vážený průměr:

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r n_j x_{[j]} \quad (6)$$

nebo

- vážený rozptyl:

$$s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r n_j (x_{[j]} - \bar{x})^2 \quad (7)$$

Vážený rozptyl se zpravidla počítá podle vzorce  $s^2 = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^r n_j x_{[j]}^2 - \bar{x}^2$ .

# Znaky intervalového a poměrového typu

Aritmetický průměr a rozptyl jsou speciální případy tzv. momentů. V následující definici obecně zavedeme  $k$ -tý počáteční a centrální moment.

- $k$ -tý počáteční moment :

$$m'_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^k, \quad \text{kde } k = 1, 2, \dots \quad (8)$$

- $k$ -tý centrální moment :

$$m_k = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - m)^k, \quad \text{kde } k = 1, 2, \dots \quad (9)$$

Pomocí 3. a 4. centrálního momentu se definuje šikmost a špičatost:

- šikmost :

$$\alpha_3 = \frac{m_3}{s^3} \quad (10)$$

Šikmost měří nesouměrnost rozložení četností kolem průměru.

- špičatost :

$$\alpha_4 = \frac{m_4}{s^4} - 3 \quad (11)$$

Špičatost měří koncentraci rozložení četností kolem průměru.

Pro údaje z příkladu o domácnostech vypočtěte průměr a rozptyl počtu členů domácnosti.

Řešení

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(1 \cdot 2 + 2 \cdot 6 + 3 \cdot 4 + 4 \cdot 10 + 5 \cdot 5 + 6 \cdot 3) = \frac{109}{30} = 3,6\bar{3}$$

$$s^2 = \frac{1}{30}(1^2 \cdot 2 + 2^2 \cdot 6 + 3^2 \cdot 4 + 4^2 \cdot 10 + 5^2 \cdot 5 + 6^2 \cdot 3) - \left(\frac{109}{30}\right)^2 = \frac{1769}{900} = 1,96\bar{5}$$

# Příklad

Nechť  $\bar{x}$  je průměr a  $s_1^2$  rozptyl hodnot  $x_1, \dots, x_n$ . Nechť  $a, b$  jsou reálné konstanty. Položme  $y_i = a + bx_i, i = 1, \dots, n$ . Vypočtěte průměr  $\bar{y}$  a rozptyl  $s_2^2$  hodnot  $y_1, \dots, y_n$ .

## Řešení

$$\bar{y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i) = a + b \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i = a + b\bar{x},$$

$$s_2^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (a + bx_i - a - b\bar{x})^2 = b^2 \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2 = b^2 s_1^2.$$

# Diagnostické grafy

## Krabicový diagram (Box plot)

Umožňuje posoudit symetrii a variabilitu datového souboru a existenci odlehlých či extrémních hodnot. Můžete se setkat i z názvem **box plot**.

Krabicový diagram je specifikován těmito pojmy:

- **Dolní vnitřní hradba:**

$$x_{0,25} - 1,5q$$

- **Horní vnitřní hradba:**

$$x_{0,75} + 1,5q$$

- **Dolní vnější hradba:**

$$x_{0,25} - 3q$$

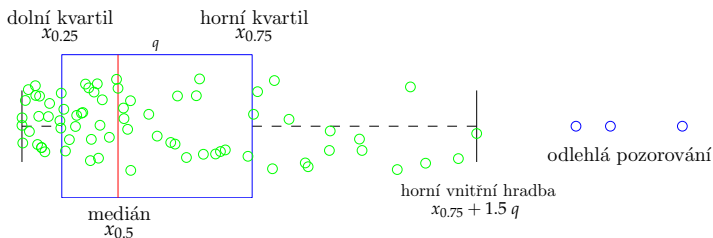
- **Horní vnější hradba:**

$$x_{0,75} + 3q$$

**Odlehlá hodnota** je hodnota, která leží mezi vnitřními a vnějšími hradbami.

**Extrémní hodnota** je hodnota, která leží za vnějšími hradbami.

Způsob konstrukce krabicového diagramu:





# Příklad

Pro data z příkladu o domácnostech sestrojte krabicový diagram.

Počet členů	1	2	3	4	5	6
Počet domácností	2	6	4	10	5	3

## Řešení.

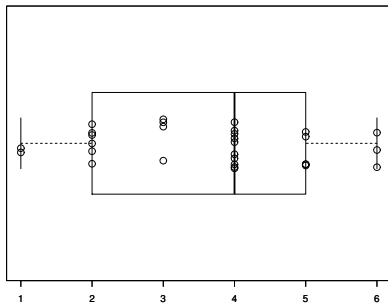
Rozsah souboru  $n = 30$ . Výpočty potřebných kvantilů uspořádáme do tabulky.

$\alpha$	$n\alpha$	$c$		$x_\alpha$
0,25	7,5	8	$x_{(c)} = x_{(8)}$	2
0,50	15	15	$\frac{x_{(15)} + x_{(16)}}{2}$	4
0,75	22,5	23	$x_{(c)} = x_{(23)}$	5

$$q = 5 - 2 = 3$$

$$\text{Dolní vnitřní hradba: } x_{0,25} - 1,5q = 2 - 1,5 \cdot 3 = -2,5$$

$$\text{Horní vnitřní hradba: } x_{0,75} + 1,5q = 5 + 1,5 \cdot 3 = 9,5$$



Obr. : Krabicový diagram

## Normal probability plot (N-P plot)

N-P plot konstruujeme tak, že na vodorovnou osu vynášíme uspořádané hodnoty  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  a na svislou osu kvantily normálního rozdělení  $u_{\alpha_j}$ , kde

$$\alpha_j = \frac{3j - 1}{3n + 1}.$$

Jsou-li některé hodnoty  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  stejné, pak za  $j$  bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupince.

- Pocházejí-li data z normálního rozložení, pak budou všechny dvojice  $(x_{(j)}, u_{\alpha_j})$  ležet na přímce.
- Pro data z rozložení s kladnou šikmostí se budou dvojice  $(x_{(j)}, u_{\alpha_j})$  řadit do konkávní křivky.
- Pro data z rozložení se zápornou šikmostí se budou dvojice  $(x_{(j)}, u_{\alpha_j})$  řadit do konvexní křivky.

## Quantile - quantile plot (Q-Q plot)

Q-Q plot konstruujeme tak, že na svislou osu vynášíme uspořádané hodnoty  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  a na vodorovnou osu kvantily  $K_{\alpha_j}(X)$  vybraného rozložení, kde

$$\alpha_j = \frac{j - r_{adj}}{n + n_{adj}},$$

přičemž  $r_{adj}$  a  $n_{adj}$  jsou korigující faktory  $\leq 0,5$ . Implicitně se klade  $r_{adj} = 0,375$  a  $n_{adj} = 0,25$ . Pokud vybrané rozložení závisí na nějakých parametrech, pak se tyto parametry odhadují z dat, nebo se volí na základě teoretického modelu. Body  $(K_{\alpha_j}(X), x_{(j)})$  se metodou nejmenších čtverců proloží přímkou. Čím méně se body odchylují od této přímky, tím lepší je soulad mezi empirickým a teoretickým rozložením.

Jsou-li některé hodnoty  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  stejné, pak za  $j$  bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupince.

# Příklad

Desetkrát nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta. Výsledky měření:  
2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2.

Pomocí N-P plotu a Q-Q plotu ověřte, zda se tato data řídí normálním rozložením.

## Řešení

usp.hodnoty	1,8	1,8	1,9	2	2	2,1	2,1	2,2	2,3	2,4
pořadí	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
průměrné pořadí	1,5	1,5	3	4,5	4,5	6,5	6,5	8	9	10

- N-P plot:

$$j = (1,5; 3; 4,5; 6,5; 8; 9; 10)$$

$$\alpha_j = \frac{3j-1}{3n+1} = (0,1129; 0,2581; 0,4032; 0,5968; 0,7419; 0,8387; 0,9355)$$

$$u_{\alpha_j} = (-1,2112; -0,6493; -0,245; 0,245; 0,6493; 0,9892; 1,5179)$$

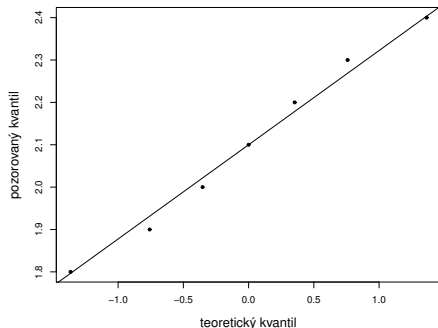
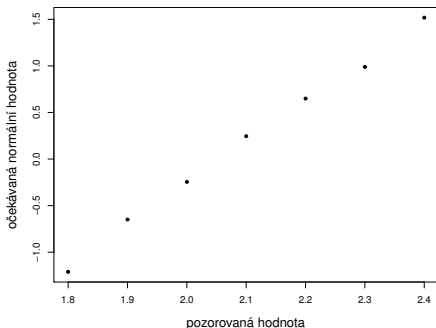
# Příklad

- Q-Q plot:

$$j = (1,5; 3; 4,5; 6,5; 8; 9; 10)$$

$$\alpha_j = \frac{j-0,375}{n+0,25} = (0,1098; 0,2561; 0,4024; 0,5976; 0,7439; 0,8415; 0,939)$$

$$u_{\alpha_j} = (-1,2278; -0,6554; -0,247; 0,247; 0,6554; 1,0005; 1,566)$$



## Probability - probability plot (P-P plot)

Spočtou se standardizované hodnoty

$$z_{(j)} = \frac{x_{(j)} - \bar{x}}{s}, \quad j = 1, \dots, n.$$

Na vodorovnou osu se vynesou hodnoty teoretické distribuční funkce  $\Phi(z_{(j)})$  a na svislou osu hodnoty empirické distribuční funkce  $F(z_{(j)}) = j/n$ . Pokud se body  $(\Phi(z_{(j)}), F(z_{(j)}))$  řadí kolem hlavní diagonály čtverce  $\langle 0, 1 \rangle \times \langle 0, 1 \rangle$ , lze usuzovat na dobrou shodu empirického a teoretického rozložení.

Jsou-li některé hodnoty  $x_{(1)} \leq \dots \leq x_{(n)}$  stejné, pak za  $j$  bereme průměrné pořadí odpovídající takové skupince.

## Histogram

Umožňuje porovnat tvar hustoty četnosti s tvarem hustoty pravděpodobnosti vybraného teoretického rozložení. Např. normálního, Pearsonova, Studentova a jiných.

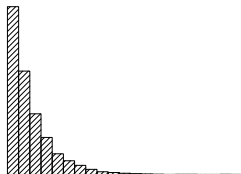


# Diagnostické grafy

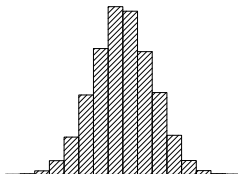
## Vzhled diagnostických grafů pro rozložení s různou šikmostí

Vlastnosti rozložení četností datového souboru se projeví ve vzhledu histogramu, N-P plotu a krabicového diagramu, jak ukazují následující obrázky:

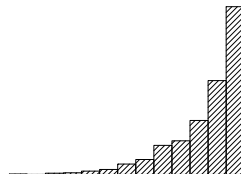
Rozložení s kladnou šikmostí



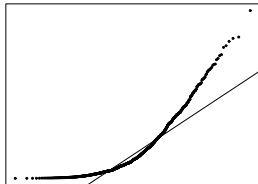
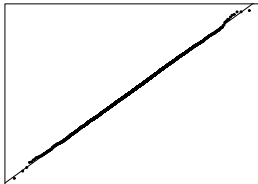
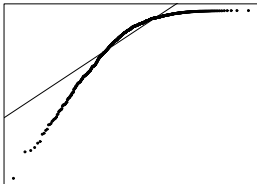
Normální rozložení



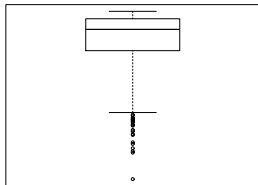
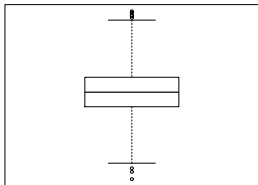
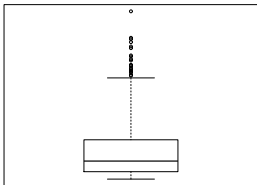
Rozložení se zápornou šikmostí



Obr. : Histogramy



Obr. : N-P plot



Obr. : Box plot

## Příklad 1.1

U 20 studentů 1. ročníku byla zjišťována známka z matematiky na prvním zkušebním termínu.

Známka	1	2	3	4
Počet studentů	7	3	2	8

Vytvořte tabulku rozložení četností. Nakreslete grafy četnostní funkce a empirické distribuční funkce. Dále nakreslete sloupkový diagram a polygon četností známek.

# Úlohy k procvičení

## Příklad 1.2

U 60 vzorků oceli byla zjišťována mez plasticity.

Mez plasticity	(30,50)	(50,70)	(70,90)	(90,110)	(110,130)	(130,150)	(150,170)
Počet vzorků	8	4	13	15	9	7	4

Sestavte tabulku rozložení četností, nakreslete histogram a graf intervalové empirické distribuční funkce.

## Příklad 1.3

Pro údaje z příkladu 1.2 vypočtete průměr a rozptyl meze plasticity.

$$[\bar{x} = 96,67, s^2 = 1148,89]$$

## Příklad 1.4

V datovém souboru, z něhož byl vypočten průměr 110 a rozptyl 800, byly zjištěny 2 chyby: místo 85 má být 95 a místo 120 má být 150. Ostatních 18 údajů je správných. Opravte průměr a rozptyl.

$$[\bar{x} = 112, s^2 = 851]$$

## Příklad 1.5

Pro údaje z příkladu 1.1 sestrojte krabicový diagram.

$[x_{0,50} = 2,5, x_{0,25} = 1, x_{0,75} = 4, q = 3, \text{dolní vnitřní hradba} = -3,5, \text{horní vnitřní hradba} = 8,5]$