M5VM05 Statistické modelování

5. Lineární regresní model

Jan Koláček (kolacek@math.muni.cz)

Ústav matematiky a statistiky, Přírodovědecká fakulta, Masarykova univerzita, Brno

Motivace

Často chceme prozkoumat vztah mezi dvěma veličinami, kde jedna z nich, tzv. „nezávisle proměnná“ X, má řídit druhou, tzv. „závisle proměnnou“ Y. Předpokládá se, že obě veličiny jsou spojité. Prvním krokem ve zkoumání by mělo být zakreslení dat do grafu. V řadě případů tento krok napoví mnohé o tom, co nás zajímá: Existuje vztah mezi oběma proměnnými (veličinami)? Pokud ano, pak rostou či klesají obě v jednom směru, nebo jedna klesá, když druhá roste? Je přímka vhodným modelem pro vyjádření vztahu mezi těmito dvěma veličinami? Chceme-li se dostat dále za tuto intuitivní úroveň analýzy, je lineární regrese často užitečným nástrojem. Tato metoda zahrnuje proložení přímky daty a analýzu statistických vlastností takovéto přímky.

Lineární regresní model

Předpokládejme, že mezi nějakými nenáhodnými veličinami $y, x_1, \ldots, x_k$ platí lineární vztah

$$y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k,$$

ve kterém $\beta_1, \ldots, \beta_k$ jsou neznámé parametry. Informace o neznámých parametrech budeme získávat pomocí experimentu, a to tak, že opakovaně budeme měřit hodnoty veličiny y při vybraných hodnotách proměnných $x_1, \ldots, x_k$. Při měřeních však vznikají chyby, což lze modelovat takto

$$Y = \beta_1 x_1 + \cdots + \beta_k x_k + \varepsilon,$$

kde ε je náhodná chyba měření.
Opakované hodnoty sledovaných veličin budeme pro $i = 1, \ldots, n$ značit $Y_i, x_{i1}, \ldots, x_{ik}$, obdobně také náhodné chyby ε_i.

Lineární regresní model

Celkově jsme dostali model

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_1 x_{11} + \cdots + \beta_k x_{1k} + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_1 x_{n1} + \cdots + \beta_k x_{nk} + \varepsilon_n \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}}_{\mathbf{Y}} = \underbrace{\begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix}}_{\mathbf{X}\text{(matice plánu)}} \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_k \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\beta}} + \underbrace{\begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}}_{\boldsymbol{\varepsilon}}$$

O náhodných chybách $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n$ budeme předpokládat, že jsou

- **nesystematické**, což lze matematicky vyjádřit požadavkem, že $\boxed{E\varepsilon_i = 0}$, $i = 1, \ldots, n$, tj. $\boxed{E\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}}$ a tedy $\boxed{E\mathbf{Y} = \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}}$
- **homogenní v rozptylu**, tj. že $\boxed{D\varepsilon_i = \sigma^2 > 0}$ pro $i = 1, \ldots, n$;
- jednotlivé náhodné chyby jsou **nekorelované**, tj. že $\boxed{C(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0}$ pro $i \neq j, i, j = 1, \ldots, n$, tj. $\boxed{D\mathbf{Y} = D\boldsymbol{\varepsilon} = \sigma_2 \mathbf{I}_n}$, takže i měření jsou nekorelovaná.

Terminologie

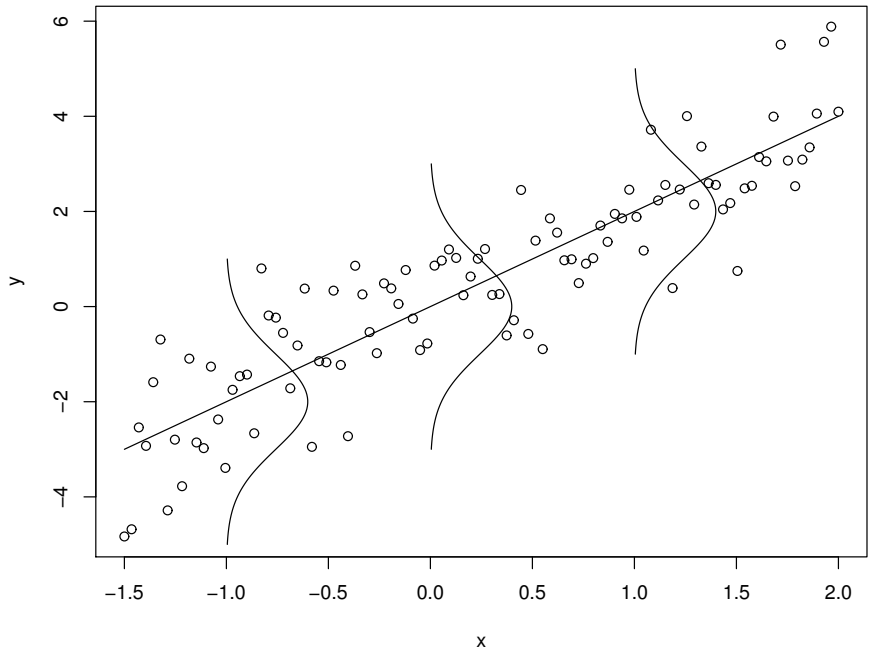
Používá se následující **terminologie** a značení

- parametry $\beta_1, \ldots, \beta_k$ se nazývají **regresní koeficienty**;
- matice $\mathbf{X}$ obsahuje nenáhodné prvky x_{ij} a nazývá se **regresní maticí** nebo **maticí plánu** (*Design Matrix*);
- popsaný model souhrnně zapíšeme jako $\boxed{\mathbf{Y} \sim \mathcal{L}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)}$.

Takto zavedený model budeme nazývat **linerární regresní model**. Dále budeme předpokládat, že $\boxed{n > k}$ a o hodnosti matice $\mathbf{X}$ budeme předpokládat, že je rovna k, tj. $\boxed{h(\mathbf{X}) = k}$. Bude-li tento přepoklad splněn, budeme říkat, že jde **linerární regresní model plné hodnosti**. V tom případě jsou sloupce matice $\mathbf{X}$ nezávislé. V opačném případě, by bylo možné daný sloupec matice $\mathbf{X}$ napsat jako lineární kombinaci ostatních sloupců, což je možné interpretovat tak, že proměnná odpovídající danému sloupci je nadbytečná, protože ji lze vyjádřit jako lineární funkci ostatních proměnných.

Příklad

Regresní přímka v klasickém lineárním regresním modelu



Jednoduchá lineární regrese:
předpokládáme Y_i $(i = 1, \ldots, n)$ mají normální rozdělení

$$\boxed{Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2)},$$

kde x_i jsou dané konstanty, které nejsou všechny stejné.

$$\begin{aligned} Y_1 &= \beta_0 + \beta_1 x_1 + \varepsilon_1 \\ &\vdots \\ Y_n &= \beta_0 + \beta_1 x_n + \varepsilon_n \end{aligned}$$

V tomto případě

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \vdots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} \sim N_n(\mathbf{0}, \sigma^2 \mathbf{I}_n).$$

Odhady neznámých parametrů

Definice 1

Řekneme, že odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})$ je **lineárním odhadem** vektoru $\boldsymbol{\beta}$, jestliže existuje matice reálných čísel $\mathbf{B}_{k\times n}$ taková, že $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{BY}$.
Dále řekneme, že odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})$ je **nestranným odhadem** vektoru $\boldsymbol{\beta}$, jestliže pro každé $\boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^k$ platí $E\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \boldsymbol{\beta}$.
Jestliže $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})$ je takový lineární nestranný odhad vektoru parametrů $\boldsymbol{\beta}$, že pro každý jiný lineární nestranný odhad $\widetilde{\boldsymbol{\beta}} = \widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})$ je rozdíl variančních matic $D\widetilde{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y}) - D\widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})$ **pozitivně semidefinitní matice**, potom budeme říkat, že $\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \widehat{\boldsymbol{\beta}}(\mathbf{Y})$ je **nejlepší nestranný lineární odhad** (*Best Linear Unbiased Estimator*) parametrů $\boldsymbol{\beta}$, zkráceně $BLUE$ odhad.

Metoda nejmenších čtverců

Definice 2

Řekneme, že odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ je odhadem parametru $\boldsymbol{\beta}$ **metodou nejmenších čtverců**, jestliže

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^k} (\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y}-\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \arg\min_{\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^k} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j \right)^2$$

Věta 3

Odhad parametru $\boldsymbol{\beta}$ v modelu $\mathbf{Y} \sim \mathcal{L}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ je tvaru

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Důkaz

Důkaz Nejprve označme symbolem $\mathbf{x}_i'$ i-tý řádek matice plánu $\mathbf{X}$ a symbolem $\mathbf{X}_j$ j-tý sloupec této matice, tj.

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_{11} & \cdots & x_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nk} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n' \end{pmatrix} = (\mathbf{X}_1 \dots \mathbf{X}_k)$$

Nutnou podmínkou pro extrém je, aby parciální derivace byly nulové, tj. pro $s = 1, \dots, k$

$$0 = \frac{\partial}{\partial \beta_s} S(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial}{\partial \beta_s} (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})'(\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \sum_{i=1}^{n} \left(Y_i - \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j \right)^2 .$$

Proto počítejme

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \beta_s} S(\boldsymbol{\beta})} = \frac{\partial}{\partial \beta_s} \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i^2 - 2Y_i \sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j + \left(\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j \right)^2 \right]$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} Y_i x_{is} + 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j \right) x_{is}$$

$$= -2 \sum_{i=1}^{n} Y_i x_{is} + 2 \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} x_{is} \beta_j = \boxed{0}$$

tj.

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} x_{is} \beta_j = \sum_{i=1}^{n} Y_i x_{is}}.$$

Nyní se budeme snažit vyjádřit předchozí rovnost maticově. Upravujme postupně levou a pravou stranu:

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}x_{is}\beta_s = \sum_{i=1}^{n} x_{is} \underbrace{\sum_{j=1}^{k} x_{ij}\beta_j}_{=\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta}} = \sum_{i=1}^{n} x_{is}\mathbf{x}_i'\boldsymbol{\beta} = \mathbf{X}_s' \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{x}_1'\boldsymbol{\beta} \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n'\boldsymbol{\beta} \end{pmatrix}}_{=\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}} = \mathbf{X}_s'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}$$

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i x_{is} = \mathbf{X}_s'\mathbf{Y}$$

a celkově, zapíšeme-li k rovnic pod sebe a uvažujeme-li obě strany rovnosti, dostaneme

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{X}_k' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n' \end{pmatrix} \boldsymbol{\beta}}_{=\mathbf{X}'\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}} = \underbrace{\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1' \\ \vdots \\ \mathbf{X}_k' \end{pmatrix} \mathbf{Y}}_{=\mathbf{X}'\mathbf{Y}} \qquad \ldots \qquad \text{tzv. normální rovnice}$$

Vzhledem k předpokladu $h(\mathbf{X}) = h(\mathbf{X}'\mathbf{X}) = k$,

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y}.$$

Nyní zbývá dokázat, že tento extrém je také minimem, tj. že matice druhých parciálních derivací je pozitivně semidefinitní matice. Proto počítejme (sh)-tý prvek matice druhých parciálních derivací

$$\frac{\partial^2}{\partial\beta_s\partial\beta_h}S(\boldsymbol{\beta}) = \frac{\partial}{\partial\beta_h}\left[-2\sum_{i=1}^{n}Y_i x_{is} + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}x_{ij}x_{is}\beta_j\right]$$

$$= 2\sum_{i=1}^{n}x_{is}\underbrace{\frac{\partial}{\partial\beta_h}\left(\sum_{j=1}^{k}x_{ij}\beta_j\right)}_{=x_{ih}} = 2\sum_{i=1}^{n}x_{is}x_{ih} = 2\mathbf{X}_s'\mathbf{X}_h$$

Takže matice druhých parciálních derivací je

$$\left(\frac{\partial^2 S(\boldsymbol{\beta})}{\partial\beta_s\partial\beta_h}\right)_{s,h=1}^{k} = \left(\sum_{i=1}^{n}x_{is}x_{ih}\right)_{s,h=1}^{k} = \mathbf{X}'\mathbf{X} > 0,$$

tj. jde o pozitivně definitní matici a tím je věta dokázaná.

Věty

Věta 4 (Gaussova-Markovova věta)

Odhad $\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ *v modelu* $\mathbf{Y} \sim \mathcal{L}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ *je BLUE-odhad (tj. je nejlepší nestranný lineární odhad) a jeho variační matice je rovna*

$$D\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = \sigma^2 \left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}$$

Věta 5

Pro libovolný vektor $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$ *je* $\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}$ *BLUE-odhad parametrické funkce* $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ *a má rozptyl* $\sigma^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}$.

Věty

Věta 6

Platí

$$S_e = S(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}) = \mathbf{Y}'\mathbf{Y} - \widehat{\boldsymbol{\beta}}'_{OLS}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \mathbf{Y}'(\mathbf{I} - \mathbf{H})\mathbf{Y},$$

kde $\mathbf{H}$ *je tzv. „hat“ matice*

$$\mathbf{H} = \mathbf{X}\left(\mathbf{X}'\mathbf{X}\right)^{-1}\mathbf{X}'.$$

Věta 7

Odhad $\boxed{s^2 = \dfrac{S_e}{n-k}}$ *je nestranným odhadem rozptylu* σ^2.

Příklad

Příklad 8

V LRM $(\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \boldsymbol{\beta})$, $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 8 \\ 12 \\ 13 \\ 15 \end{pmatrix}$ *spočítejte MNČ-odhady vektoru parametrů* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, *aproximace* $\hat{\mathbf{Y}}$, *reziduální součty čtverců* S_e *a* s^2.

Řešení

Řešení Nejprve vypočteme matice

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 12 \\ 0 & 12 & 28 \end{pmatrix}, (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} 0,5 & 0 & -0,0714 \\ 0 & 0,0357 & 0 \\ -0,0714 & 0 & 0,0153 \end{pmatrix}.$$

Odtud pak

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} 10 \\ 1/3 \\ 3/2 \end{pmatrix} \text{ a } \hat{\mathbf{Y}} = \mathbf{X}\hat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} 5,17 \\ 6,67 \\ 8,17 \\ 11,83 \\ 13,33 \\ 14,83 \end{pmatrix}.$$

Nakonec ještě

$$S_e = (\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}})'(\mathbf{Y} - \hat{\mathbf{Y}}) = 1/3, \; s^2 = \frac{S_e}{n-k} = \frac{1/3}{3} = 1/9.$$

Testování hypotéz v lineárním regresním modelu

Díky předchozím větám dokážeme v lineárním regresním modelu plné hodnosti vypočítat nejen OLS-odhady neznámých parametrů $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)'$, ale také máme k dispozici odhad neznámého rozptylu σ^2 a známe vlastnosti těchto odhadů. V dalším se zaměříme na stanovení jejich rozdělení v případě, že náhodný vektor $\boxed{\mathbf{Y}}$ má **vícerozměrné normální rozdělení**. Pak teprve budeme moci přejít k testování hypotéz o neznámých parametrech $\beta_1, \ldots, \beta_k$.
Jestliže náhodný vektor $\mathbf{Y}$ se řídí lineárním regresním modelem plné hodnosti, což zapisujeme $\mathbf{Y} \sim \mathcal{L}(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$, a navíc má **vícerozměrné normální rozdělení**, budeme psát

$$\boxed{\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)}.$$

Věta

Věta 9

Mějme lineární regresní model plné hodnosti, přičemž $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$. *Pak platí*

(a) *OLS-odhad vektoru neznámých parametrů má normální rozdělení*

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} \quad \sim \quad N_k\left(\boldsymbol{\beta}, \sigma^2(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\right)$$

(b) *náhodná veličina*

$$K = \frac{n-k}{\sigma^2}s^2 \quad \sim \quad \chi^2(n-k)$$

(c) *náhodná veličina* $\boxed{K = \frac{n-k}{\sigma^2}s^2}$ *a OLS-odhad* $\boxed{\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS}}$ *jsou nezávislé.*

Test významnosti koeficientu β_j

Věta 10

V modelu $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ *plné hodnosti pro každé* $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^k$, $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ *platí*

$$T = \frac{\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \quad \sim \quad t(n-k).$$

Důsledek 11

V modelu $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ *plné hodnosti má* $100(1-\alpha)\%$ *interval spolehlivosti pro parametrickou funkci* $\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}$ *(kde* $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$*) tvar*

$$\left(\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} - s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}\, t_{1-\alpha/2}(n-k), \mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} + s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}\, t_{1-\alpha/2}(n-k)\right).$$

Praktický test

Prakticky lze provést test hypotézy $H_0 : \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = \gamma_0$ (γ_0 je dané reálné číslo) proti alternativě $H_1 : \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} \neq \gamma_0$ na hladině významnosti α tak, že hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud platí

$$\frac{\left|\mathbf{c}'\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} - \gamma_0\right|}{s\sqrt{\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \geq t_{1-\alpha/2}(n-k)$$

Poznámka

V praktických situacích se nejčastěji volí vektor $\mathbf{c}$ jako jednotkový s jedničkou na j-tém místě $\mathbf{c} = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)'$ a v tom případě $\boxed{\mathbf{c}'\boldsymbol{\beta} = \beta_j}$, takže

(a) $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti má tvar (při značení $(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = (v_{ij})_{i,j=1}^{k}$)

$$\left(\widehat{\beta}_{OLS,j} - s\sqrt{v_{jj}}\, t_{1-\alpha/2}(n-k) \;\;,\;\; \widehat{\beta}_{OLS,j} + s\sqrt{v_{jj}}\, t_{1-\alpha/2}(n-k)\right).$$

(b) Test hypotézy $H_0 : \beta_j = \gamma_0$ (γ_0 je dané reálné číslo) proti alternativě $H_1 : \beta_j \neq \gamma_0$ na hladině významnosti α se provede tak, že hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud platí

$$\frac{\left|\widehat{\beta}_{OLS,j} - \gamma_0\right|}{s\sqrt{v_{jj}}} \geq t_{1-\alpha/2}(n-k).$$

Test významnosti modelu

Zavedeme následující bloková značení:

$$\boldsymbol{\beta} = (\underbrace{\beta_1, \ldots, \beta_m}_{=\boldsymbol{\beta}_1'}, \underbrace{\beta_{m+1}, \ldots, \beta_k}_{=\boldsymbol{\beta}_2'})',$$

obdobně

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS} = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,1}', \widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,2}')'$$

a nakonec také pro matici

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{V}_{11} & \mathbf{V}_{12} \\ \mathbf{V}_{21} & \mathbf{V}_{22} \end{pmatrix},$$

kde matice $\mathbf{V}_{11}$ je typu $m \times m$.

Věta 12

V modelu $\mathbf{Y} \sim N_n(\mathbf{X}\boldsymbol{\beta}, \sigma^2\mathbf{I}_n)$ *plné hodnosti platí, že statistika*

$$F = \frac{1}{s^2(k-m)} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,2} - \boldsymbol{\beta}_2\right)' \mathbf{V}_{22}^{-1} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,2} - \boldsymbol{\beta}_2\right) \quad \sim \quad F(k-m, n-k).$$

Poznámka

Díky předcházející větě můžeme testovat nulovou hypotézu

$$H_0 : \boldsymbol{\beta}_2 = \boldsymbol{\beta}_{2,0},$$

(kde $\boldsymbol{\beta}_{2,0}$ je daný vektor reálných čísel, nejčastěji nulový vektor)

proti alternativě

$$H_1 : \boldsymbol{\beta}_2 \neq \boldsymbol{\beta}_{2,0}$$

na hladině významnosti α tak, že hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud platí

$$F_0 = \frac{1}{s^2(k-m)} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,2} - \boldsymbol{\beta}_{2,0}\right)' \mathbf{V}_{22}^{-1} \left(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_{OLS,2} - \boldsymbol{\beta}_{2,0}\right) \geq F_{1-\alpha}(k-m, n-k).$$

Prakticky

Testujeme nulovou hypotézu

$$H_0 : (\beta_1, \ldots, \beta_k) = (0, \ldots, 0)$$

proti alternativě

$$H_1 : \exists i > 0;\ \beta_i \neq 0$$

na hladině významnosti α tak, že hypotézu H_0 **zamítáme**, pokud platí

$$F_0 = \frac{s^2_{\widehat{Y}}}{s^2(k-1)} = \frac{ID}{1-ID}\frac{n-k}{k-1} \geq F_{1-\alpha}(k-1, n-k),$$

kde $s^2_{\widehat{Y}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\widehat{y}_i - \bar{y})^2$.

Příklad

Příklad 13

Pro data

x	-2	-1	0	1	2
Y	-2	1	-2	1	-1

spočítejte MNČ-odhady vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, aproximace $\hat{\mathbf{Y}}$, reziduální součty čtverců s^2 a index determinace ID v následujících modelech. Odhadnuté regresní funkce znázorněte také graficky.

1. $y = \beta_0 + \beta_1 x$
2. $y = \beta_1 x$
3. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$
4. $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$
5. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 e^x$

Testujte významnost koeficientů β_i, testujte významnost modelu pomocí statistiky F. Porovnejte vhodnost regresních modelů pomocí F, s^2 a ID.

Řešení

Řešení Pro jednotlivé modely počítejme postupně

1. $y = \beta_0 + \beta_1 x$

   $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (-0,6; 0,2)'$, $\hat{\mathbf{Y}} = (-1; -0,8; -0,6; -0,4; -0,2)'$, $s^2 = 2,93$,
   $ID = 0,04348$, $F = 0,136$, p-hodnoty pro jednotlivé koeficienty: $(0,49; 0,73)$

2. $y = \beta_1 x$

   $\hat{\beta}_1 = 0,2$, $\hat{\mathbf{Y}} = (-0,4; -0,2; 0; 0,2; 0,4)'$, $s^2 = 2,65$, $ID = 0,0363$,
   $F = 0,15$, p-hodnoty pro jednotlivé koeficienty: $0,717$

3. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

   $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (-0,0286; 0,2; -0,2857)'$,
   $\hat{\mathbf{Y}} = (-1,5714; -0,5143; -0,0286; -0,1143; -0,7714)'$, $s^2 = 3,8286$,
   $ID = 0,1677$, $F = 0,2015$, p-hodnoty pro jednotlivé koeficienty:
   $(0,985; 0,777; 0,6396)$

Řešení

4. $y = \beta_1 x + \beta_2 x^2$

   $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (0,2; -0.2941)'$, $\hat{\mathbf{Y}} = (-1,576; -0,4941; 0; -0,0941; -0,776)'$,
   $s^2 = 2,55$, $ID = 0,3037$, $F = 0,654$, p-hodnoty pro jednotlivé koeficienty:
   $(0,718; 0,362)$

5. $y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 e^x$

   $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (0,291; 0,847; -0,384)'$,
   $\hat{\mathbf{Y}} = (-1,4547; -0,6969; -0,0926; 0,0949; -0,851)'$, $s^2 = 3,8283$,
   $ID = 0,1677$, $F = 0,2015$, p-hodnoty pro jednotlivé koeficienty:
   $(0,8894; 0,59; 0,639)$.

Speciální modely lineární regrese

MODEL I: **Regresní přímka** $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$; $n > 2$.

Matice plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \end{pmatrix}$

Model bude plné hodnosti, pokud všechny hodnoty $x_1, \ldots, x_n$ nebudou stejné.

Normální rovnice jsou tvaru:

$$\begin{aligned} \beta_0 n + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{i=1}^{n} Y_i \\ \beta_0 \sum_{i=1}^{n} x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^{n} x_i^2 &= \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \end{aligned}$$

Speciální modely lineární regrese

MODEL II: **Regrese procházející počátkem** $Y_i = \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, \ldots, n$; $n > 1$.

Matice plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)$, $\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i Y_i \right)$

a model bude plné hodnosti, pokud alespoň jedna z hodnot $x_1, \ldots, x_n$ bude různá od nuly.

Normální rovnice:

$$\beta \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \quad = \quad \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i$$

Speciální modely lineární regrese

MODEL III: **Kvadratická regrese** $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 x_i^2 + \varepsilon_i$,
$i = 1, \ldots, n;\ n > 3.$

Matice plánu $\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 & \sum_{i=1}^n x_i^3 & \sum_{i=1}^n x_i^4 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i^2 Y_i \end{pmatrix}$, **Norm. rov.**:

$$\begin{aligned} \beta_0 n + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^2 &= \sum_{i=1}^n Y_i \\ \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^3 &= \sum_{i=1}^n x_i Y_i \\ \beta_0 \sum_{i=1}^n x_i^2 + \beta_1 \sum_{i=1}^n x_i^3 + \beta_2 \sum_{i=1}^n x_i^4 &= \sum_{i=1}^n x_i^2 Y_i \end{aligned}$$

Speciální modely lineární regrese

MODEL IV: **Polynomická regrese** $Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \cdots + \beta_m x_i^m + \varepsilon_i$,
$i = 1, \ldots, n;\ n > m+1.$

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^m \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^m \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^n x_i & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^m \\ \sum_{i=1}^n x_i & \sum_{i=1}^n x_i^2 & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m & \sum_{i=1}^n x_i^{m+1} & \cdots & \sum_{i=1}^n x_i^{2m} \end{pmatrix},$$

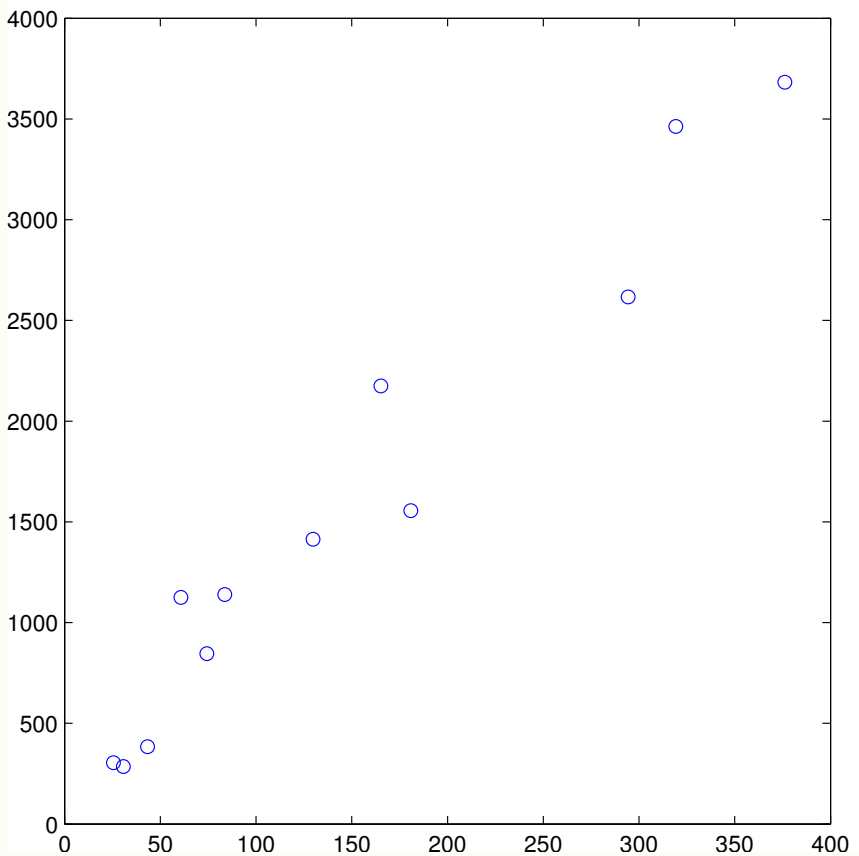
$$\mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n Y_i \\ \sum_{i=1}^n x_i Y_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n x_i^m Y_i \end{pmatrix}$$

Příklad

Příklad 14

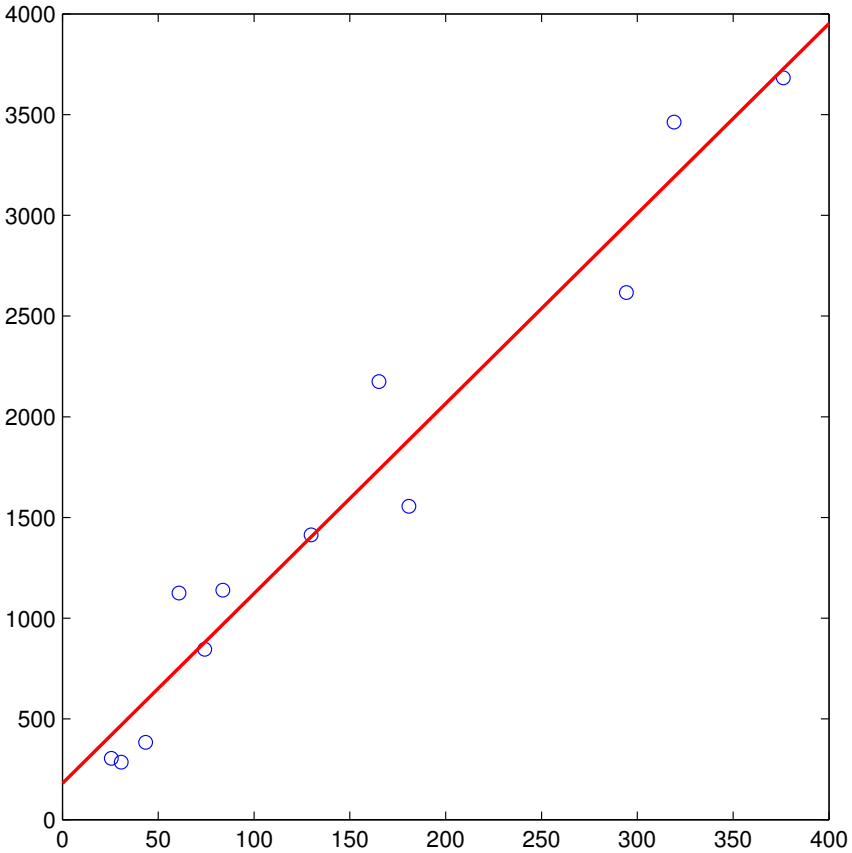
Analyzujte data o počtu pracovních hodin za měsíc Y spojených s provozováním anesteziologické služby v závislosti na velikosti spádové populace nemocnice X (v tisících). Údaje byly získány ve 12 nemocnicích ve Spojených státech.

i	Y	X
1	304,37	25,5
2	2616,32	294,3
3	1139,12	83,7
4	285,43	30,7
5	1413,77	129,8
6	1555,68	180,8
7	383,78	43,4
8	2174,27	165,2
9	845,30	74,3
10	1125,28	60,8
11	3462,60	319,2
12	3682,33	376,2



Řešení

Graf naznačuje lineární vztah mezi pracovní dobou a velikostí populace, a tak budeme pokračovat kvantifikací tohoto vztahu pomocí přímky $y = \beta_0 + \beta_1 x$.



Řešení

Parametr	Koeficient	SE koef.	t-statistika	p-hodnota
β_0	180,658	128,381	1,407	0,1896823
β_1	9,429	0,681	13,847	7,520972e-08

Z tabulky tedy dostáváme:

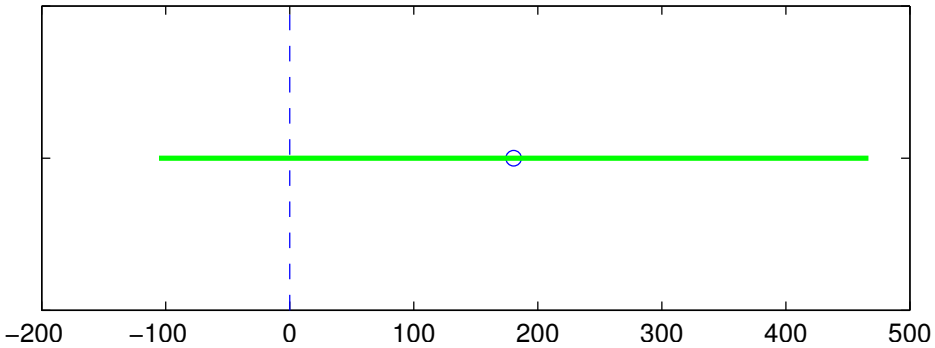
$$\text{pracovní doba} = 180{,}658 + 9{,}429 \cdot \text{velikost populace}.$$

Co je na tom divného?

Řešení

Oboustranný interval spolehlivosti pro β_0

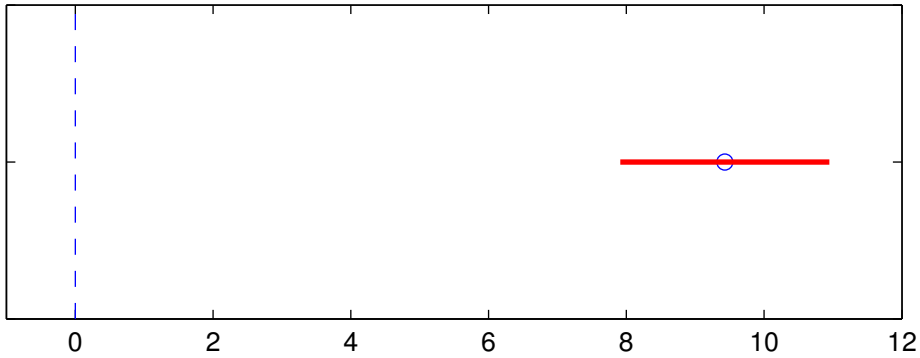
$$180{,}6575 \pm 2{,}228 \cdot 128{,}3812 = 180{,}6575 \pm 286{,}051$$



$$(-105{,}394;\ 466{,}709)$$

Oboustranný interval spolehlivosti pro β_1

$$9{,}429 \pm 2{,}228 \cdot 0{,}681 = 9{,}429 \pm 1{,}517$$



$$(7{,}912;\ 10{,}946)$$

Řešení

Uvažujeme **regresi procházející počátkem** (plná čára) a výsledek srovnáme s obecnou regresní přímkou (čárkovaná čára).

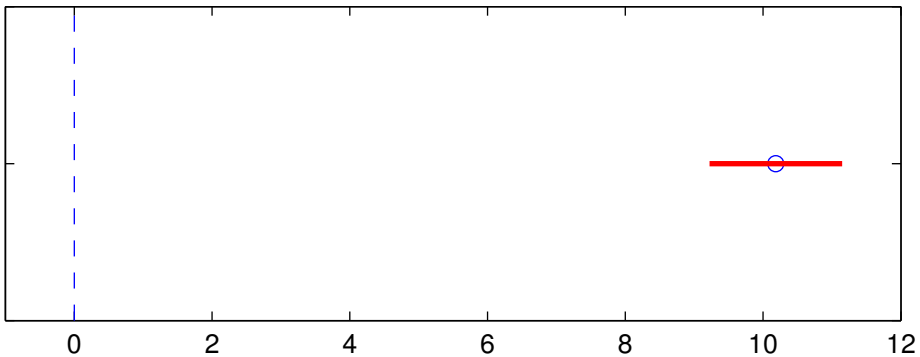
$\widehat{\beta}_1^* = 10,185$ $\widehat{s}_{\beta_1^*} = 0,4371,$

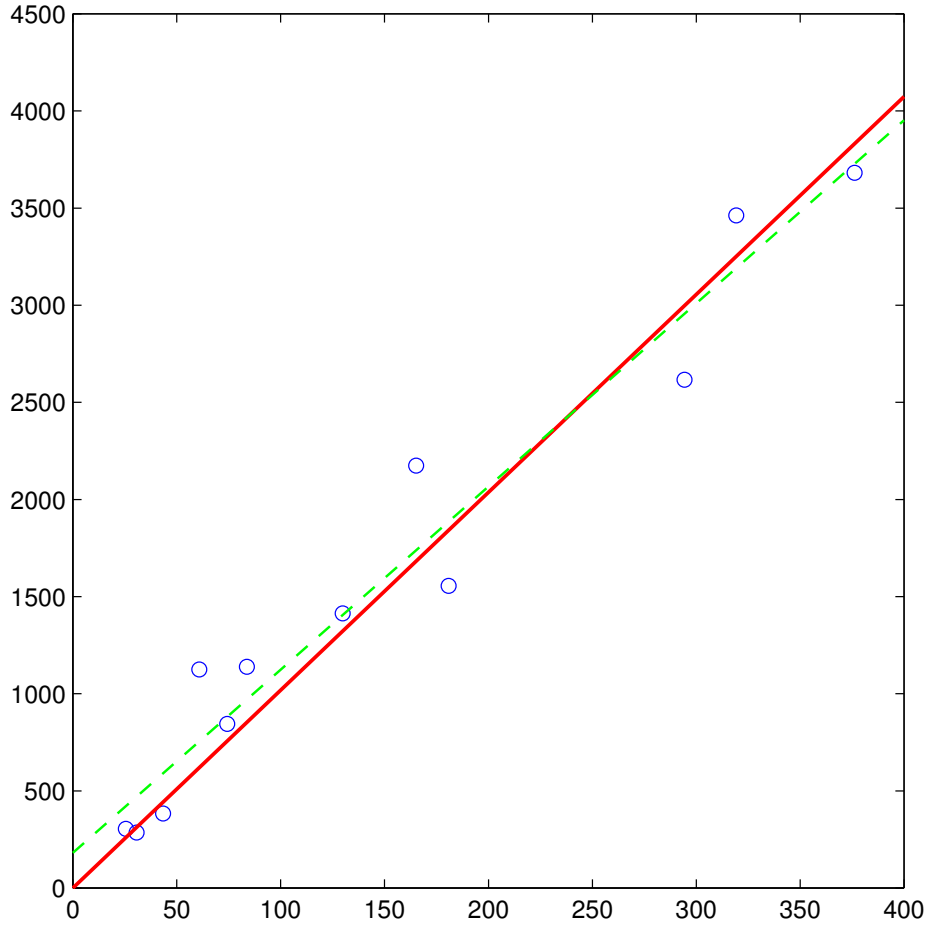
t^* =3,30157,

p^*-hodnota=1,0318e-10

Oboustranný interval spolehlivosti pro β_1^*

$$10,185 \pm 2,2 \cdot 0,4371 = 10,185 \pm 0,962$$





pracovní doba $=$
$10,185 \cdot$ velikost populace.

Speciální modely lineární regrese

MODEL VI: **Dvě regresní přímky** (se stejným rozptylem).
Mějme dva nezávislé náhodné výběry $Y_{11}, \ldots, Y_{1n_1}$ (resp. $Y_{21}, \ldots, Y_{2n_2}$) a k tomu odpovídající hodnoty regresorů $x_{11}, \ldots, x_{1n_1}$ (resp. $x_{21}, \ldots, x_{2n_2}$). Předpokládejme, že platí

$$Y_{1i} = a_1 + b_1 x_{1i} + \varepsilon_{1i}, \quad i = 1, \ldots, n_1, \quad \varepsilon_{1i} \sim N(0, \sigma_1^2)$$
$$Y_{2i} = a_2 + b_2 x_{2i} + \varepsilon_{2i}, \quad i = 1, \ldots, n_2, \quad \varepsilon_{2i} \sim N(0, \sigma_2^2)$$

Speciální modely lineární regrese

Vytvořme společný regresní model:

$$\begin{pmatrix} Y_{11} \\ \vdots \\ Y_{1n_1} \\ Y_{21} \\ \vdots \\ Y_{2n_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_{1n_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & x_{21} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 1 & x_{2n_2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ a_2 \\ b_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} \\ \vdots \\ \varepsilon_{1n_1} \\ \varepsilon_{21} \\ \vdots \\ \varepsilon_{2n_2} \end{pmatrix}.$$

Vyjádřeno blokově:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \boldsymbol{\beta}_1 \\ \boldsymbol{\beta}_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \end{pmatrix}$$

Speciální modely lineární regrese

Počítejme postupně

$$\mathbf{X}'\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}'\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix} \text{ a}$$

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1}\mathbf{X}_1'\mathbf{Y}_1 \\ (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}\mathbf{X}_2'\mathbf{Y}_2 \end{pmatrix}.$$

Označme

$$\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{Y} - \widehat{\mathbf{Y}} = \mathbf{Y} - \mathbf{X}\widehat{\boldsymbol{\beta}} = \begin{pmatrix} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 \\ \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 - \widehat{\mathbf{Y}}_1 \\ \mathbf{Y}_2 - \widehat{\mathbf{Y}}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 - \mathbf{X}_1\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 \\ \mathbf{Y}_2 - \mathbf{X}_2\widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \end{pmatrix}$$

Pak

$$SSE = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}\,'\,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\,'\,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1 + \widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\,'\,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2 = SSE_1 + SSE_2$$

a

$$\begin{aligned} s_1^2 &= \frac{SSE_1}{n_1-2} = \frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1\,'\,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_1}{n_1-2} \\ s_2^2 &= \frac{SSE_1}{n_2-2} = \frac{\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2\,'\,\widehat{\boldsymbol{\varepsilon}}_2}{n_2-2} \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad s^2 = \frac{SSE}{n_1+n_2-4} = \frac{(n_1-2)s_1^2 + (n_2-2)s_2^2}{n_1+n_2-4}$$

Testování rovnoběžnosti dvou regresních přímek

Při testování hypotézy $H_0 : b_1 = b_2$ proti alternativě $H_1 : b_1 \neq b_2$ využijeme toho, že statistika

$$T = \frac{\mathbf{c}'\hat{\boldsymbol{\beta}} - \mathbf{c}'\boldsymbol{\beta}}{\sqrt{s^2\mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c}}} \quad \sim \quad t(n-k).$$

Položme

$$\mathbf{c} = (0,1,0,-1) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{c}'(\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1}\mathbf{c} = v_{22} + v_{44}, (\mathbf{X}'\mathbf{X})^{-1} = \begin{pmatrix} v_{11} & v_{12} & v_{13} & v_{14} \\ v_{21} & v_{22} & v_{23} & v_{24} \\ v_{31} & v_{32} & v_{33} & v_{34} \\ v_{41} & v_{42} & v_{43} & v_{44} \end{pmatrix}$$

Za platnosti nulové hypotézy statistika

$$T_0 = \frac{\hat{b}_1 - \hat{b}_2}{s\sqrt{v_{22}+v_{44}}} \sim t(n_1 + n_2 - 4).$$

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α, pokud

$$|t_0| > t_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1 + n_2 - 4)$$

Testování shodnosti dvou regresních přímek

Budeme testovat hypotézu $H_0 : \boldsymbol{\beta}_1 = \boldsymbol{\beta}_2$ proti alternativě $H_1 : \boldsymbol{\beta}_1 \neq \boldsymbol{\beta}_2$.
Využijeme vlastnosti

$$\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2 \sim N\Big(\boldsymbol{\beta}_1 - \boldsymbol{\beta}_2, \sigma^2 \big(\underbrace{(\mathbf{X}_1'\mathbf{X}_1)^{-1} + (\mathbf{X}_2'\mathbf{X}_2)^{-1}}_{W}\big)\Big).$$

a

$$K_1 = \frac{1}{\sigma^2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)' W^{-1} (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2) \sim \chi^2(2),$$

dále

$$K_2 = \frac{SSE}{\sigma^2} = \frac{(n_1 + n_2 - 4)s^2}{\sigma^2} \sim \chi^2(n_1 + n_2 - 4),$$

takže k testování nulové hypotézy použijeme statistiku

$$F_0 = \frac{K_1/2}{K_2/(n_1+n_2-4)} = \frac{1}{2s^2}(\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)' W^{-1} (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2) \sim F(2, n_1 + n_2 - 4)$$

a **nulovou hypotézu zamítáme** na hladině významnosti α, pokud

$$f_0 < F_{\frac{\alpha}{2}}(2, n_1 + n_2 - 4) \text{ nebo } f_0 > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(2, n_1 + n_2 - 4)$$

Ověřování shodnosti rozptylů

Při testování hypotézy $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ proti alternativě $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$ využijeme toho, že statistika

$$F_0 = \frac{\frac{SSE_1}{(n_1-2)\sigma^2}}{\frac{SSE_2}{(n_2-2)\sigma^2}} = \frac{s_1^2}{s_2^2} \sim F(n_1-2, n_2-2)$$

a **nulovou hypotézu zamítáme** na hladině významnosti α, pokud

$$f_0 < F_{\frac{\alpha}{2}}(n_1-2, n_2-2) \text{ nebo } f_0 > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n_1-2, n_2-2)$$

Příklad

Příklad 15

V souboru „`teploty.Rdata`“ jsou uvedeny průměrné roční teploty v Praze (proměnná Y_1) a ve Velkých Pavlovicích (proměnná Y_2) v letech 1978 – 1995 (proměnná x). Předpokládejme, že závislost teplot na čase lze popsat regresní přímkou. Na hladině významnosti $\alpha = 0,05$ testujte hypotézy:

(a) H_0 : *vzestup teplot byl stejný na obou stanovištích*

(b) H_0 : *průběh teplot byl stejný na obou stanovištích*

(c) H_0 : *rozptyl teplot byl stejný na obou stanovištích*

(d) *Vykreslete graf obou regresních přímek*

Řešení

(a) Vypočteme odhady parametrů $\hat{b}_1 = 0,091$, $\hat{b}_2 = 0,0885$ a také $s^2 = 0,4334$. V našem případě je $v_{22} = v_{44} = 0,002$ a můžeme vypočítat hodnotu testové statistiky

$$t_0 = \frac{\hat{b}_1 - \hat{b}_2}{s\sqrt{v_{22} + v_{44}}} = 0,0603,$$

kterou porovnáme s kvantilem Studentova rozdělení $t_{0,975}(32) = 2,037$. Protože $|t_0| < t_{0,975}(32)$, hypotézu H_0 na dané hladině významnosti **nezamítáme**.

(b) Vypočteme odhady parametrů $\hat{\boldsymbol{\beta}}_1 = (-170,44; 0,091)'$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_2 = (-166,31; 0,0885)'$ a také matici $W = \begin{pmatrix} 16289,82 & -8,2 \\ -8,2 & 0,0041 \end{pmatrix}$. Pak tedy $K_1 = (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2)' W^{-1} (\widehat{\boldsymbol{\beta}}_1 - \widehat{\boldsymbol{\beta}}_2) = 7,9$ a $K_2 = s^2 = 0,4334$. Pro testování hypotézy použijeme statistiku

$$f_0 = \frac{K_1}{2K_2} = 9,122,$$

kterou porovnáme s kvantily Fisherova–Snedecorova rozdělení $f_{0,025}(2,32) = 0,025$ a $f_{0,975}(2,32) = 4,149$. Protože $f_0 > f_{0,975}(2,32)$, hypotézu H_0 na dané hladině významnosti **zamítáme**.

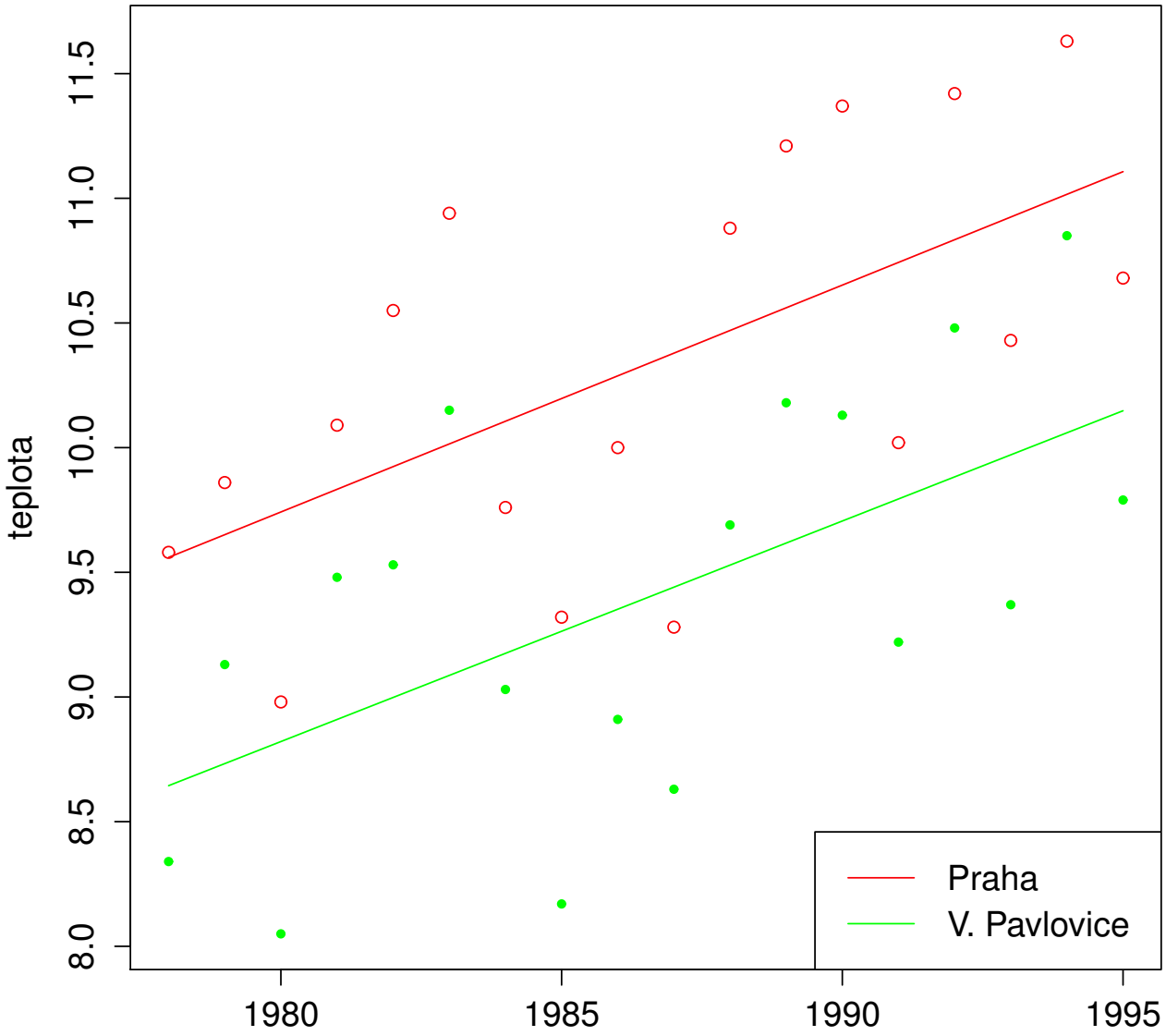
Řešení

(c) Vypočteme odhady parametrů $s_1^2 = 0,4308$ a $s_2^2 = 0,436$. Pro testování hypotézy použijeme statistiku

$$f_0 = \frac{s_1^2}{s_2^2} = 0,988,$$

kterou porovnáme s kvantily Fisherova–Snedecorova rozdělení $f_{0,025}(16,16) = 0,3621$ a $f_{0,975}(16,16) = 2,7614$. Protože f_0 je mezi oběma hodnotami, hypotézu H_0 na dané hladině významnosti **nezamítáme**.

Řešení


teplota
8.0
8.5
9.0
9.5
10.0
10.5
11.0
11.5
1980
1985
1990
1995
Praha
V. Pavlovice

Úlohy k procvičení

Příklad 1.1

V LRM $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta})$, $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$, $\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$ *spočítejte MNČ-odhady vektoru parametrů* $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, *aproximace* $\hat{\boldsymbol{Y}}$, *reziduální součty čtverců* S_e *a* s^2.

$[\hat{\boldsymbol{\beta}} = (1,5; 0,1786; 0,6786)'$, $\hat{\boldsymbol{Y}} = (7,0714; 3,8571; 2; 2,3571; 4,5714; 8,1429)'$, $S_e = 0,3571$, $s^2 = 0,119.]$

Úlohy k procvičení

Příklad 1.2

Pro data

x	-2	-1	0	1	2
Y	0	2	3	3	1

spočítejte MNČ-odhady vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, aproximace $\widehat{\boldsymbol{Y}}$, reziduální součty čtverců S_e a s^2 ve dvou modelech. Který model je vhodnější? (Proč?) Oba modely vykreslete.

(a) *model s regresní funkcí* $Y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$

(b) *model s maticí plánu* $\boldsymbol{X} = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$

[(a) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (3,09; 0,3; -0,64)'$, $\widehat{\boldsymbol{Y}} = (-0,086; 2,143; 3,086; 2,743; 1,114)'$, $S_e = 0,114$, $s^2 = 0,057$.
(b) $\hat{\boldsymbol{\beta}} = (3,17; -0,67)'$, $\widehat{\boldsymbol{Y}} = (0,5; 2,5; 0; 2,5; 0,5)'$, $S_e = 10$, $s^2 = 3,33$.*]*

Úlohy k procvičení

Příklad 1.3

Pomocí regresní přímky procházející počátkem spočítejte MNČ-odhady vektoru parametrů $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, aproximace $\hat{\boldsymbol{Y}}$, reziduální součty čtverců S_e a s^2 v LRM $(\boldsymbol{Y}, \boldsymbol{X}, \boldsymbol{\beta})$ pro data

x	10	20	30	40	50	60
Y	0,18	0,35	0,48	0,65	0,84	0,97

Jedná se o měření teplotní délkové roztažnosti měděné trubky. Rozdíl teploty od referenční 20 °C je x, prodloužení tyče je měřená veličina Y.

$[\hat{\boldsymbol{\beta}} = 0,0164,\ \widehat{\boldsymbol{Y}} = (0,164; 0,328; 0,493; 0,657; 0,821; 0,985)',\ S_e = 0,0015,\ s^2 = 0,0003.]$

Úlohy k procvičení

Příklad 1.4

U 126 podniků řepařské oblasti v České Republice byl sledován hektarový výnos cukrovky ve vztahu ke spotřebě průmyslových hnojiv.
Data jsou uložena v souboru „`cukrovka.Rdata`“ ve 4 sloupcích:

1. *dolní hranice spotřeby K_2O (kg/ha)*
2. *horní hranice spotřeby K_2O (kg/ha)*
3. *četnosti*
4. *průměrné výnosy cukrovky (q/ha)*

a) *odhadněte parametry regresní funkce tvaru*

$$y = \beta_0 + \beta_1 x$$
$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$
$$y = \beta_0 + \beta_1 x^{0,5}$$

Poznámka: Za hodnoty nezávisle proměnné volte střed intervalu.

b) *Porovnejte vhodnost tří použitých regresních modelů.*

Úlohy k procvičení

Příklad 1.5

U 19 vzorků potravinářské pšenice byl zjišťován obsah zinku v zrnu (proměnná Y), v kořenech (proměnná X_1), v otrubách (proměnná X_2) a ve stonku a listech (proměnná X_3). Data jsou uložena v souboru „`psenice.Rdata`“.

a) *Předpokládejte, že je vhodný regresní model*

$$Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \beta_2 X_2 + \beta_3 X_3.$$

Odhadněte regresní koeficienty a rozptyl, vypočtěte vektor predikce a index determinace. Proveďte celkový F-test a dílčí t-testy. Hladinu významnosti volte $0,05$. Normalitu reziduí posuďte graficky pomocí funkce `qqnorm`.

b) *Z regresního modelu odstraňte ty proměnné, jejichž regresní koeficienty se ukázaly nevýznamné pro $\alpha = 0,05$. Sestavte nový regresní model a proveďte v něm všechny úkoly z bodu a).*