# M6520 (podzim 2014) – bonusové úlohy

*Není-li stanoveno jinak, dostává první, kdo odevzdá správně vyřešený úkol, uvedený počet bodů, každý další vždy o bod méně než předchozí. Bude-li řešení neúplné, bude bodové hodnocení sníženo.*

1. (2 b.) ~~Dokažte, že v posloupnosti~~ $\cancel{(2^n - 3)_{n=1}^{\infty}}$ ~~je nekonečně mnoho násobků 5 a nekonečně mnoho násobků 13, ale žádný násobek 65.~~
2. (2 b.) Dokažte, že v libovolné posloupnosti $(a_n)_{n=0}^{\infty}$, kde $a_n = a_{n-1} + 40^{n!}$ pro $n > 0$, je nekonečně mnoho násobků čísla 2013.
3. (3 b.) Dokažte, že pro každé liché prvočíslo $p$ existuje nekonečně mnoho přirozených čísel $n$, splňujících $p \mid n \cdot 2^n + 1$.
4. (2 b. — *nutný i algoritmus*) Najděte nejmenší prvočíslo větší než 3 tvaru $n \cdot 2^n + 1$.
5. (3 b.) Dokažte, že existuje nekonečně mnoho lichých přirozených čísel $k$ s vlastností, že čísla $2^{2^n} + k$ jsou složená pro všechna $n \in \mathbb{N}$.
6. (5 b.) Dokažte, že pro každé celé číslo $k \neq 1$ existuje nekonečně mnoho přirozených čísel $n$ s vlastností, že číslo $2^{2^n} + k$ je složené.
7. ~~(3 b.) Dokažte, že pro všechna lichá~~ $\cancel{n \in \mathbb{N}}$ ~~platí~~ $\cancel{n \mid 2^{n!} - 1}$.
8. (2 b.) Dokažte, že pro všechna $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ je číslo $\frac{1}{5}(2^{4n+2} + 1)$ složené.
9. (4 b.) Dokažte, že pro každé $a \in \mathbb{N}$, $1 < a \leq 100$ existuje $n \in \mathbb{N}, n \leq 6$ tak, že $a^{2^n} + 1$ je složené. (V případě, že podstatná část výpočtů bude provedena počítačem, budou uděleny max. 2 body).
10. (3 b.) Buď $n > 3$ libovolné liché přirozené číslo. Dokažte, že vždy existuje prvočíslo $p$ dělící $2^{\varphi(n)} - 1$ a nedělící $n$.
11. (3 b.) Určete nejmenší $n \in \mathbb{N}$ takové, že $2^{2011} \mid 17^n - 1$.
12. (3 b.) Buď $k$ tvaru $2^{2^n} + 1$ (pro $n \in \mathbb{N}$). Dokažte, že $k$ je prvočíslo, právě když $k$ dělí $3^{(k-1)/2} + 1$.
13. (3 b.) Najděte všechny dvojice prvočísel $p, q$ splňující $pq \mid 5^p + 5^q$.
14. (5 b.) Dokažte, že pro $a, b, n \in \mathbb{N}$ platí: $n! \mid b^{n-1}a(a + b)(a + 2b) \cdots (a + (n - 1)b)$.