ÚLOHA LIN. PROGRAMOVÁNÍ V ROVINĚ

Máme zadanou lin. funkci

$$f(x) = c_1 X + c_2 X$$

na $\mathbb{R}^2$. Úloha lin. programování chce najít bod v průniku

polorovin $h_1 \cap h_2 \cap \ldots \cap h_n$

kde funkce f nabývá svého maxima.

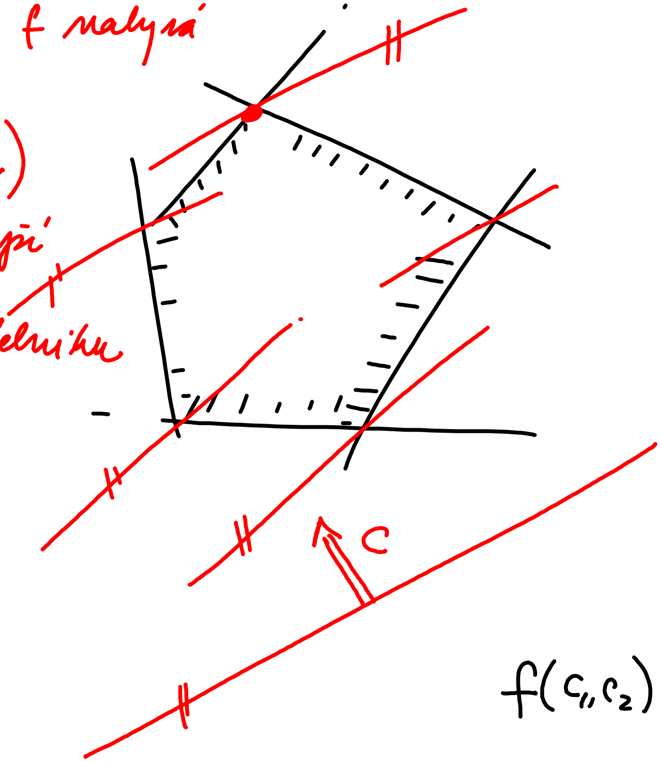
Poloroviny jsou zadány nerovnostmi

$$\begin{array}{lll}
a_{11} x_1 + a_{12} x_2 & \leq b_1 & h_1 \\
a_{21} x_1 + a_{22} x_2 & \leq b_2 & h_2 \\
\ldots\ldots\ldots & & \vdots \\
a_{n1} x_1 + a_{n2} x_2 & \leq b_n & h_n
\end{array}$$

-2-

Geometrický význam

Bod, ve kterém f nabývá maxima (řešení úlohy) je nejvzdálenější bod mnohoúhelníku ve směru vektoru $\vec{c}$.



Vektor $(c_1, c_2) = \vec{c}$

$p = \{x \in \mathbb{R}^2,\ c_1x_1 + c_2x_2 = 0\}$ přímka

$\vec{c}$ je normálový vektor k přímce p

$\{x \in \mathbb{R}^2,\ c_1x_1 + c_2x_2 = konst\}$

také přímky rovnoběžné s p

Funkce f roste ve směru vektoru c

Dosadíme-li za $(x_1, x_2) = (c_1, c_2)$, pak

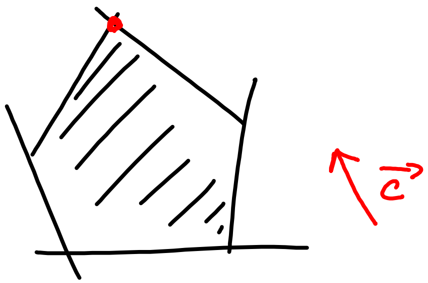
$$f(c_1, c_2) = c_1^2 + c_2^2 > 0.$$

-3-

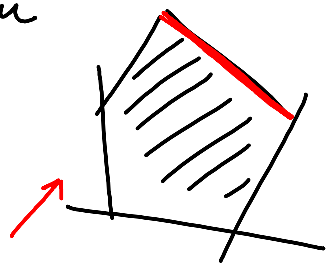
Možná řešení

① Prázdný průnik

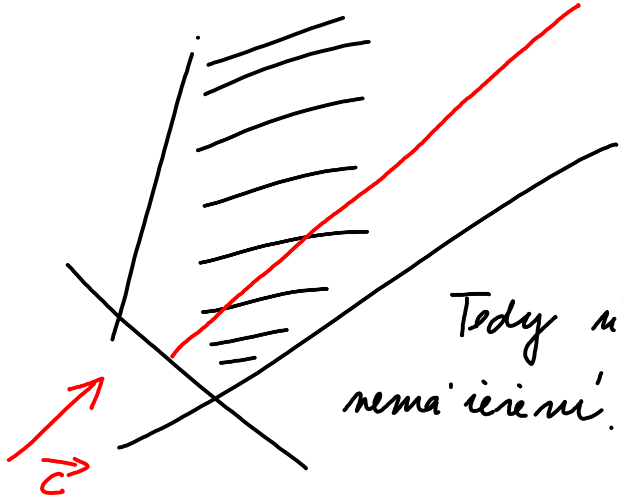
② Jediné řešení



③ Více řešení



④ Funkce f je v průniku neomezená



Tedy úloha nemá řešení.

Algoritmus: Vstup je dán vektorem c a polorovinami $h_1, h_2, \ldots h_n$.

Výstup: (i) průnik polorovin je prázdný

(ii) jeden bod, kde f nabývá maxima

(iii) zadá polopřímku v průniku, na které f roste

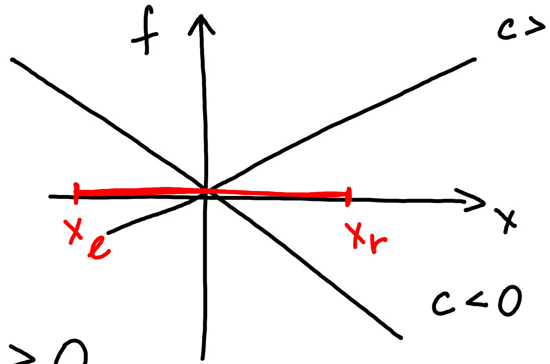
-4-

Jednodimenzionální úloha LP

Najdi bod, ve kterém nabývá funkce $f(x) = cx$, $c \neq 0$ svého maxima za podmínek

$$a_1 x \leq b_1$$
$$\vdots$$
$$a_n x \leq b_n.$$

$a_i \neq 0$



Po dělení a_i se nerovnice změní takto

$I = \{i;\ a_i > 0\}$ $\qquad x \leq c_i = \frac{b_i}{a_i}$ pro $a_i > 0$

$J = \{j;\ a_j < 0\}$ $\qquad \frac{b_j}{a_j} = c_j \leq x$ pro $a_j < 0$

$$x_l = \max_{j \in J} \{c_j\} \qquad J = \emptyset \quad x_l = -\infty$$

$$x_r = \min_{i \in I} \{c_i\} \qquad I = \emptyset \quad x_r = \infty$$

① $x_r < x_l$ průnik je $\emptyset$

② $x_l \leq x_r < \infty$ tak pro $c > 0$ je řešení x_r

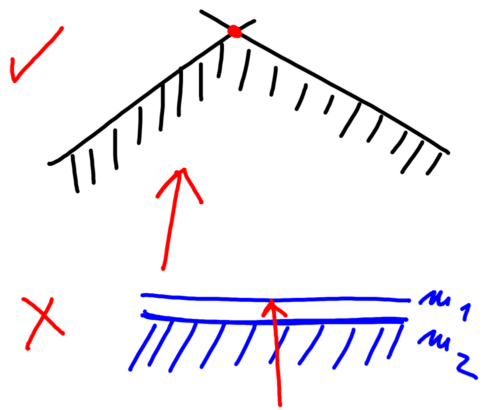
③ $-\infty < x_l \leq x_r$ tak pro $c < 0$ je řešení x_l

④ Ve všech ostatních případech obsahuje průnik polopřímku na které f roste

Závěr: Jednodimenzionální úloha LP má časovou náročnost $O(n)$.

Omezená úloha lin programování v rovině

Předpokládáme, že máme 2 poloroviny m_1 a m_2 takové, že $f(x) = c_1x_1 + c_2x_2$ je na $m_1 \cap m_2$ omezená



Nyní hledáme bod množiny průniku polorovin

$m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \dots \cap h_n$

kde f nabývá svého maxima

(Předpokládejme, že f má na $m_1 \cap m_2$ jediný bod maxima.)

Základní myšlenka algoritmu spočívá v tom, že hledáme postupně

body $v_0 \in m_1 \cap m_2 = C_0$

$v_1 \in m_1 \cap m_2 \cap h_1 = C_1$

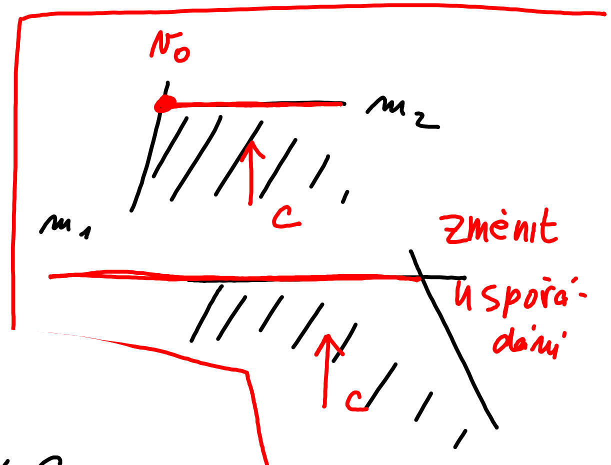
$\dots \quad \dots$

$v_i \in m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \dots \cap h_i = C_i$

$\dots \quad \dots$

$v_n \in m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \dots \cap h_n = C_n$

které maximalizují funkci f postupně na



Uvažujme v $\mathbb{R}^2$ standardní lexikografické uspořádání $C_0, C_1, \dots, C_n$

$$p < q \Leftrightarrow p_x < q_x \text{ nebo } p_x = q_x \text{ a } p_y < q_y$$

Nechť v_i je bod, ve kterém f nabývá svého maxima na $H_i := m_1 \cap m_2 \cap \dots \cap h_i$, a který je ze všech těchto bodů nejmenší v lexikografickém uspořádání.

-7-

Věta: (a) Je-li $v_{i-1} \in h_i$, pak $v_i = v_{i-1}$.

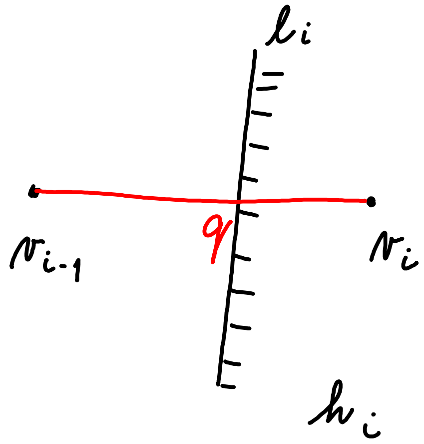
(b) Jestliže $v_{i-1} \notin h_i$, pak buď $C_i = \emptyset$ nebo $v_i \in l_i$, což je hraniční přímka poloroviny h_i. V tomto případě v_i najdeme jako řešení jednodimenzionální úlohy LP s $(i+2)$ omezeními.

Důkaz: (a) Platí $C_{i-1} \supseteq C_i$. Je-li $v_{i-1} \in h_i$, pak $v_{i-1} \in C_i$

f nabývá ve v_{i-1} svého maxima na C_{i-1}, tudíž musí v něm nabývat svého maxima na menší množině C_i.

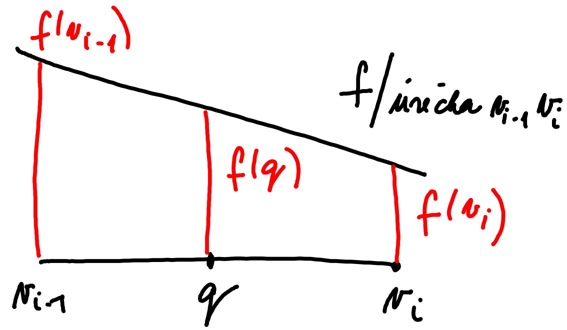
v_{i-1} nejmenší v lex. uspořádání na C_{i-1}, tudíž i v C_i.

(b) Předp. že $v_i \in l_i$.



Spojme v_{i-1} a v_i úsečkou, její průnik s l_i označme q.

Platí $f(v_{i-1}) \geq f(v_i)$.

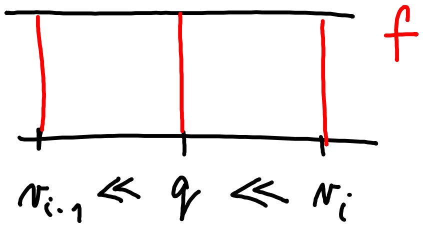


- Jestliže $f(v_{i-1}) > f(v_i)$, pak platí

$$f(v_{i-1}) > f(q) > f(v_i)$$

Tedy $q \in C_i$ a přitom $f(q) > f(v_i)$, spor s definicí v_i.

- Jestliže $f(v_{i-1}) = f(v_i)$, pak $f(v_{i-1}) = f(q)$



V tom případě je $v_{i-1} \ll q$,
z toho plyne $q \ll v_i$

$f(q) = f(v_i)$, $q \ll v_i$, spor s definicí v_i.

Tím je dokázáno, že $v_i \in l_i$.

Jak v_i spočítáme:

Nechť přímka l_i má rovnici $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$.

$v_i = (x_1, x_2) \in l_i$. Nechť $\beta \neq 0$: $x_2 = \dfrac{\gamma - \alpha x_1}{\beta}$

Hledáme maximum funkce f/l_i

$$g(x_1) = c_1 x_1 + c_2 x_2 = c_1 x_1 + c_2 \left(\frac{\gamma - \alpha x_1}{\beta} \right) = \left(c_1 - c_2 \frac{\alpha}{\beta} \right) x_1 - \underbrace{c_2 \frac{\gamma}{\beta}}_{\text{konst}}$$

Místo ní uvažujme funkci

$$\tilde{g}(x_1) = \left(c_1 - c_2 \frac{\alpha}{\beta} \right) x_1 = c x_1$$

Její maximum hledáme na množině

$$m_1 \cap m_2 \cap h_1 \cap \dots \cap h_{i-1} \cap l_i = C_{i-1} \cap l_i .$$

Tato množina je popsána nerovnicí

$$a_{j1} x_1 + a_{j2} x_2 \le b_j$$

$$a_{j1} x_1 + a_{j2}\left(\frac{\gamma - \alpha x_1}{\beta}\right) \le b_j$$

$$\left(a_{j1} - a_{j2}\frac{\alpha}{\beta}\right) x_1 \le b_j - a_{j2}\frac{\gamma}{\beta}$$

Tedy je vidět, že nalezení souřadnice x_1 bodu v_i je úlohou 1-dim LP.

Algoritmus ... soubor LP.pdf v ISu

v_0 = průnik hraničních přímek m_1 a m_2.

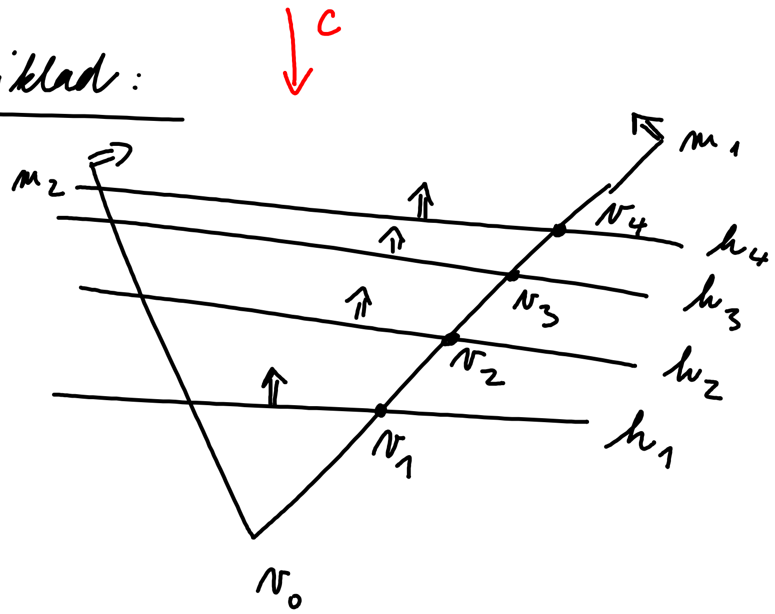
<u>Časová náročnost algoritmu</u>

Nalezení v_i pomocí úlohy 1-dim LP má čas $O(i)$

Celková časová náročnost je $\le O(1) + O(2) + \dots + O(n) = O(1+2+3+\dots+n) = O(n^2)$

-11-

Příklad:

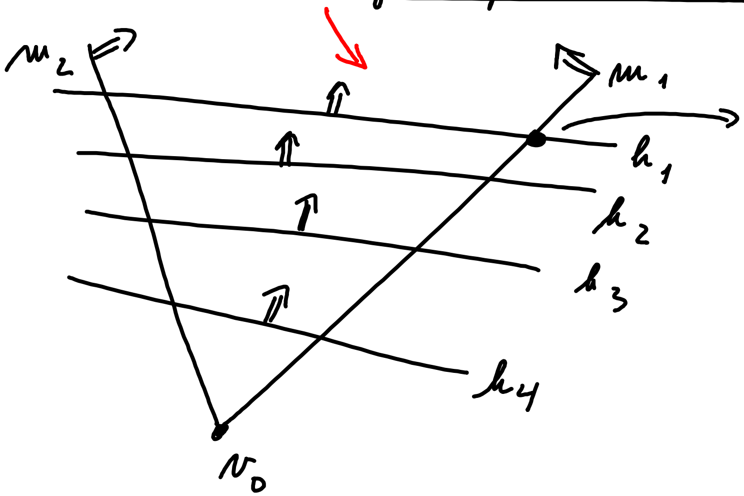


Pořadí h_1, h_2, h_3, h_4

$v_0 \to v_1 \to v_2 \to v_3 \to v_4$

všechny výpočty provádíme podle 1-dim LP

Nyní vezmeme polorovniny v jiném pořadí:



$v_1 = v_2 = v_3 = v_4$

Žádné výpočty nemusíme provádět.

Náhodnostní algoritmus vezme náhodné pořadí polorovin $h_1, h_2, \dots h_n$. Při každém pořadí je výpočet jiný. Nás zajímá „průměrná doba výpočtu" což je tzv očekávaná časová náročnost.

-13-

Očekávaná časová náročnost pomocí středních hodnot náhodných veličin

X náhodná veličina, která nabývá kon. počtu hodnot

$$a_1, a_2, \ldots, a_s$$

Střední hodnota je číslo

$$EX = a_1 \cdot (p(X=a_1)) + a_2 \cdot (p(X=a_2)) + \ldots + a_n \cdot (p(X=a_n))$$

Hod kostkou

$$EX = 1 \cdot (p(X=1)) + 2 \cdot p((X=2)) + \ldots + 6(p(X=6))$$

$$= \frac{1+2+\ldots+6}{6} = 3,5$$

Náhodná veličina X_i

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{jestliže } v_i = v_{i-1} \\ 1 & \text{jestliže } v_i \neq v_{i-1} \end{cases}$$

Očekávaný čas algoritmu je

$$E\Big(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \big(O(i) \cdot X_i\big)}_{\text{náhodná veličina}}\Big) = \sum_{i=1}^{n} O(i) \; E X_i$$

$$E X_i = 0 \cdot p(v_i = v_{i-1}) + 1 \cdot p(v_i \neq v_{i-1})$$

Platí, že $p(v_i \neq v_{i-1}) \leq \frac{2}{i}$

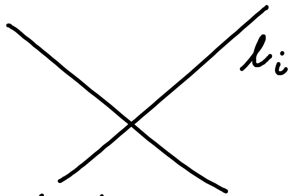
Potom $E\left(\sum O(i) X_i\right) \leq \sum O(i) \frac{2}{i} = 2 + 2 + \ldots 2 = O(n)$

$p(v_i \neq v_{i-1}) \leq p($ pravděpodobnost, že jedno číslo z dvojice $\{k, m\}$ je i
$k, m \in \{1, 2, \dots i\}$

v_i leží na průniku aspoň 2 hraničních přímek

všech dvojic je $\binom{i}{2}$

dvojic s i je $i-1$



od v_{i-1} se liší, pokud leží na průniku právě 2 a jedna je l_i

$$p(v_i \neq v_{i-1}) \leq p(\quad) = \frac{i-1}{\frac{i(i-1)}{2}} = \frac{2}{i}$$