Písemná práce - Výroky - varianta A

Čas na vypracování: 15 minut

1. Bez užití obratu „není pravda, že ..." zformulujte negace následujících výroků.
   (a) Dnes se necítím dobře. *(1 bod)*
   (b) Všechny písemné práce byly podepsané. *(1 bod)*
   (c) Alespoň pět studentů se neučí do žádného předmětu. *(1 bod)*
   (d) Jindřich dnes snídal vánočku a jogurt. *(1 bod)*
   (e) Pokud umím negovat výroky, pak mi tyto úlohy nedělají potíže. *(1 bod)*
2. Napište tabulku pravdivostních hodnot následující výrokové formule
$$[A' \wedge (A \Rightarrow B)] \vee (B' \Leftrightarrow A)$$
a rozhodněte, zda se jedná o tautologii. Své tvrzení zdůvodněte. *(3 body)*
3. Udejte příklad libovolné kontradikce o alespoň třech výrokových proměnných. *(1 bod)*

Písemná práce - Výroky - varianta B

Čas na vypracování: 15 minut

1. Bez užití obratu „není pravda, že ..." zformulujte negace následujících výroků.
   (a) Dnes mám objednaný oběd. *(1 bod)*
   (b) Alespoň jedna písemná práce byla bez chyby. *(1 bod)*
   (c) Nejvýše tři studenti navštěvují aspoň dva kroužky. *(1 bod)*
   (d) V restauraci si dám horký čaj nebo polévku. *(1 bod)*
   (e) Chybu v negování výroků udělám právě tehdy, když neovládám dobře výrokovou logiku. *(1 bod)*
2. Napište tabulku pravdivostních hodnot následující výrokové formule
$$(A' \Leftrightarrow B) \wedge [(B \Rightarrow A) \vee B']$$
a rozhodněte, zda se jedná o kontradikci. Své tvrzení zdůvodněte. *(3 body)*
3. Udejte příklad libovolné tautologie o alespoň třech výrokových proměnných. *(1 bod)*

Písemná práce - Výroky - varianta C

Čas na vypracování: 15 minut

1. Bez užití obratu „není pravda, že ..." zformulujte negace následujících výroků.
   (a) V libovolném trojúhelníku je součet všech jeho vnitřních úhlů roven $180°$ *(1 bod)*
   (b) Právě čtyři prvočísla jsou nejvýše dvojciferná. *(1 bod)*
   (c) Jestliže $n = 5$, pak $n^3 > 130$. *(1 bod)*
   (d) Součet $a + b$ je kladný právě tehdy, když je alespoň jeden ze sčítanců kladný. *(1 bod)*

   Dále rozhodněte, jaká je pravdivostní hodnota každého z výše uvedených výroků. *(2 body)*
2. Napište tabulku pravdivostních hodnot následující výrokové formule
$$\Big[(A \Leftrightarrow C)' \wedge (B \Rightarrow B)\Big] \vee (C \vee A')$$
a rozhodněte, zda se jedná o tautologii. Své tvrzení zdůvodněte. *(3 body)*

Písemná práce - Trigonometrie - varianta A

Při této písemné práci není dovoleno používat tabulky či jiné přehledy vzorců.

Čas na vypracování: 15 minut

V tojúhelníku ABC je při obvyklém značení stran a vnitřních úhlů dáno $b = 4$ cm, $c = 6$ cm a $\gamma = 60°$. Vypočtěte délku strany a, velikosti vnitřních úhlů α a β, poloměr R kružnice opsané a obsah S tohoto trojúhelníku.

Vysvětlete, zda je úloha zadána jednoznačně. V kladném případě uveďte větu, která jednoznačnost řešení dokazuje, v záporném případě najděte všechna řešení vyhovující zadaným rozměrům trojúhelníku ABC.

Velikosti úhlů vypočtěte s přesností právě na jednotky minut, ostatní údaje s přesností právě na dvě desetinná místa (bez převádění jednotek). Výpočty provádějte pomocí kalkulačky bez zbytečného zaokrouhlování a přenášení takto vzniklé chyby do dalších výpočtů.

Písemná práce - Trigonometrie - varianta B

Při této písemné práci není dovoleno používat tabulky či jiné přehledy vzorců.

Čas na vypracování: 15 minut

V tojúhelníku ABC je při obvyklém značení stran a vnitřních úhlů dáno $a = 8$ cm, $b = 7$ cm a $\gamma = 120°$. Vypočtěte délku strany c, velikosti vnitřních úhlů α a β, poloměr R kružnice opsané a obsah S tohoto trojúhelníku.

Vysvětlete, zda je úloha zadána jednoznačně. V kladném případě uveďte větu, která jednoznačnost řešení dokazuje, v záporném případě najděte všechna řešení vyhovující zadaným rozměrům trojúhelníku ABC.

Velikosti úhlů vypočtěte s přesností právě na jednotky minut, ostatní údaje s přesností právě na dvě desetinná místa (bez převádění jednotek). Výpočty provádějte pomocí kalkulačky bez zbytečného zaokrouhlování a přenášení takto vzniklé chyby do dalších výpočtů.

Písemná práce - Trigonometrie - varianta C

Při této písemné práci není dovoleno používat tabulky či jiné přehledy vzorců.

Čas na vypracování: 20 minut

V tojúhelníku ABC je při obvyklém značení stran a vnitřních úhlů dáno $a = 4$ cm, $c = 6$ cm a $\alpha = 30°$. Vypočtěte délku strany b, velikosti vnitřních úhlů β a γ, poloměr R kružnice opsané a obsah S tohoto trojúhelníku.

Vysvětlete, zda je úloha zadána jednoznačně. V kladném případě uveďte větu, která jednoznačnost řešení dokazuje, v záporném případě najděte všechna řešení vyhovující zadaným rozměrům trojúhelníku ABC.

Velikosti úhlů vypočtěte s přesností právě na jednotky minut, ostatní údaje s přesností právě na dvě desetinná místa (bez převádění jednotek). Výpočty provádějte pomocí kalkulačky bez zbytečného zaokrouhlování a přenášení takto vzniklé chyby do dalších výpočtů.

Písemná práce za 1. čtvrtletí - varianta A

Čas na vypracování: 45 minut

1. Výraz
$$\cos^2\frac{x}{2}+\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1-\cos 2x}{\sin x}-\frac{3}{2}\cos x-\frac{1}{2}$$
upravte do nejjednoduššího možného tvaru a stanovte podmínky, za nichž je definován.

2. Nepřístupný bod C v rovině byl zaměřen ze dvou stanovišť A, B, jejichž vzdálenost je 56 m, pod úhly $|\sphericalangle BAC| = 49°57'$ a $|\sphericalangle ABC| = 68°20'$. Jaká je vzdálenost bodu C od obou pozorovatelen? Vzdálenosti vypočtěte v metrech s přesností právě na dvě desetinná místa. Výpočty provádějte pomocí kalkulačky bez zbytečného zaokrouhlování a přenášení takto vzniklé chyby do dalších výpočtů.

3. Ve vlakovém kupé je celkem 8 míst (z toho 4 ve směru jízdy a 4 proti směru jízdy). Kolika způsoby v něm lze na očíslovaná sedadla posadit 8 cestujících, z nichž 2 chtějí sedět ve směru jízdy, 3 proti směru jízdy a zbývajícím 3 je to jedno tak, aby všechny jejich požadavky byly splněny. Dva zasedací pořádky považujeme za různé, pokud v každém z nich alespoň jeden z cestujících sedí na jiném místě. Výsledek podložte výpočtem a vyčíslete jej, tzn. vyjádřete ho jediným přirozeným číslem.

4. V Kocourkově se používá 36 mužských a 45 ženských jmen. Kolik svatebních blahopřání se jmenným oslovením každého z obou novomanželů je třeba natisknout, aby existovalo přání pro každý možný pár novomanželů? Rozhodněte, zda mezi každými 2 000 kocourkovskými manželskými páry musí být alespoň dva páry, v nichž mají manželé i manželky stejná jména. Své tvrzení zdůvodněte. Dále určete nejmenší počet manželských párů, mezi nimiž nutně musí být alespoň 4 páry se stejnými jmény. Své tvrzení podložte výpočtem.

Písemná práce za 1. čtvrtletí - varianta B

Čas na vypracování: 45 minut

1. Výraz
$$\sin^2\frac{x}{2}+\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)+\frac{1+\cos 2x}{\cos x}-\sin x-\frac{1}{2}$$
upravte do nejjednoduššího možného tvaru a stanovte podmínky, za nichž je definován.

2. Ze dvou míst A, B na moři, jejichž vzdálenost je 3 740 m, byla pozorována loď L pod úhly $|\sphericalangle BAL| = 72°35'$ a $|\sphericalangle ABL| = 81°41'$. Jaká je vzdálenost lodi L od obou pozorovatelen? Vzdálenosti vypočtěte v metrech s přesností právě na jedno desetinné místo. Výpočty provádějte pomocí kalkulačky bez zbytečného zaokrouhlování a přenášení takto vzniklé chyby do dalších výpočtů.

3. Ve vlakovém kupé je celkem 8 míst (z toho 4 ve směru jízdy a 4 proti směru jízdy). Kolika způsoby v něm lze na očíslovaná sedadla posadit 8 cestujících, z nichž 3 chtějí sedět ve směru jízdy, 1 proti směru jízdy a zbývajícím 4 je to jedno tak, aby všechny jejich požadavky byly splněny. Dva zasedací pořádky považujeme za různé, pokud v každém z nich alespoň jeden z cestujících sedí na jiném místě. Výsledek podložte výpočtem a vyčíslete jej, tzn. vyjádřete ho jediným přirozeným číslem.

4. V Kocourkově se používá 45 mužských a 36 ženských jmen. Kolik svatebních blahopřání se jmenným oslovením každého z obou novomanželů je třeba natisknout, aby existovalo přání pro každý možný pár novomanželů? Rozhodněte, zda mezi každými 1 500 kocourkovskými manželskými páry musí být alespoň dva páry, v nichž mají manželé i manželky stejná jména. Své tvrzení zdůvodněte. Dále určete nejmenší počet manželských párů, mezi nimiž nutně musí být alespoň 3 páry se stejnými jmény. Své tvrzení podložte výpočtem.

Písemná práce za 1. čtvrtletí - varianta C

Čas na vypracování: 45 minut

1. V $\mathbb{R}$ vyřešte rovnici
$$\cos x + \sqrt{3}\sin x = -1\,.$$

2. Síla $\vec{F}$ je výslednicí sil $\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$. Zmíněné síly mají velikosti $F = 8$ N, $F_1 = 6$ N a $F_2 = 4$ N. Jaké úhly svírá síla $\vec{F}$ se svými složkami $\vec{F_1}$ a $\vec{F_2}$? Velikosti požadovaných úhlů vypočtěte s přesností právě na jednotky minut. Výpočty provádějte pomocí kalkulačky bez zbytečného zaokrouhlování a přenášení takto vzniklé chyby do dalších výpočtů.

3. Ve vlakovém kupé je celkem 8 míst (z toho 4 ve směru jízdy a 4 proti směru jízdy), v každém směru je právě jedno místo u okna (na druhé straně kupé je ulička). Kolika způsoby v něm lze na očíslovaná sedadla posadit 8 cestujících, z nichž 1 chce sedět u okna, 3 chtějí sedět ve směru jízdy, 2 proti směru jízdy a zbývajícím 2 je to jedno tak, aby všechny jejich požadavky byly splněny. Dva zasedací pořádky považujeme za různé, pokud v každém z nich alespoň jeden z cestujících sedí na jiném místě. Výsledek podložte výpočtem a vyčíslete jej, tzn. vyjádřete ho jediným přirozeným číslem.

4. Na gymnáziu se vyučuje p předmětů, přičemž m z nich si každý student vybírá ke složení maturitní zkoušky.

   (a) Kolik možností výběru sestavy maturitních předmětů má libovolný student této školy? Výsledek sestavte pomocí výrazů, které mohou obsahovat faktoriály či kombinační čísla a není třeba je dále upravovat.

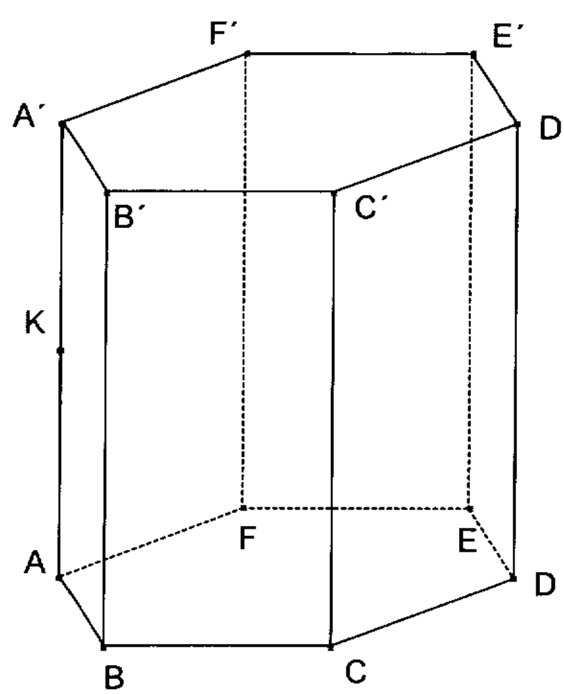
   (b) V této části úlohy uvažujme pouze případ $m = 2$ (tzn. každý student si vybírá k maturitě právě 2 předměty). Určete při jakém největším počtu p předmětů (z nichž si studenti maturitní předměty volí) bude jisté, že alespoň tři ze 120 maturantů této školy budou maturovat ze stejných dvou předmětů? Své tvrzení podložte výpočtem.

   (c) V této části úlohy uvažujme pouze případ $m = 3$ (tzn. každý student si vybírá k maturitě právě 3 předměty). Určete při jakém největším počtu p předmětů (z nichž si studenti maturitní předměty volí) bude jisté, že alespoň dva ze 120 maturantů této školy budou maturovat ze stejných všech tří předmětů? Své tvrzení podložte výpočtem.

Písemná práce – stereometrie - varianta A

čas na vypracování: 45 minut

1. Definujte *kolmost* přímky a roviny.
2. Nechť je dán pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA′B′C′D′E′F′ o podstavné hraně délky $|AB| = a$ a tělesové výšce délky $|AA'| = v$.
   a) Za předpokladu, že $a=v$ vypočtěte odchylku přímek $\overleftrightarrow{CF'}$ a $\overleftrightarrow{C'E}$. Výsledek vyjádřete s přesností právě na jednotky minut. *(6 bodů)*
   b) Středem K hrany AA′ veďte příčku mimoběžek $\overleftrightarrow{CF'}$ a $\overleftrightarrow{C'E}$. Zapište rozbor a do předrýsovaného obrázku proveďte vlastní rys. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. *(5 bodů)*

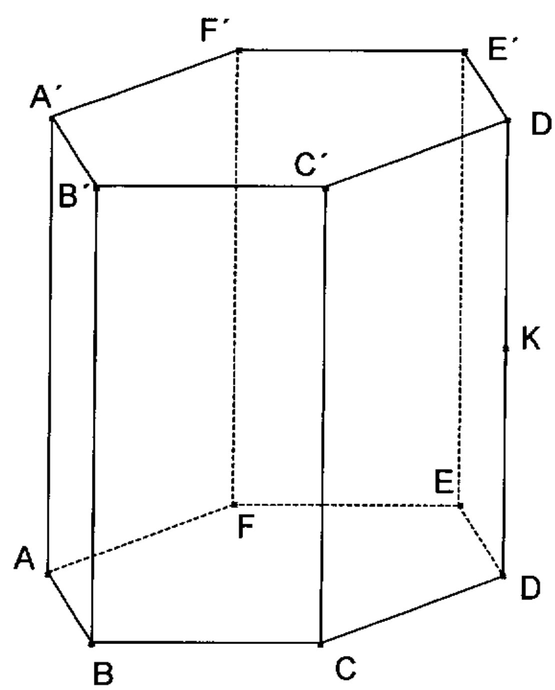


3. Nechť je dána krychle ABCDEFGH o hraně délky a. Sestrojte řez této krychle rovinou ς, která je kolmá k přímce $\overleftrightarrow{AG}$ a prochází středem hrany CG. Popište přesné polohy vrcholů uvažovaného řezu. Dokažte, že rovina, kterou jste popsali je skutečně kolmá k přímce $\overleftrightarrow{AG}$. Dále vypočtěte obvod útvaru, který je příslušným řezem. Situaci stačí pouze načrtnout. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. *(5 bodů)*

Písemná práce – stereometrie - varianta B

čas na vypracování: 45 minut

1. Zformulujte *kritérium kolmosti* přímky a roviny.
2. Nechť je dán pravidelný šestiboký hranol ABCDEFA´B´C´D´E´F´ o podstavné hraně délky $|AB| = a$ a tělesové výšce délky $|AA'| = v$.
   a) Za předpokladu, že $a=v$ vypočtěte odchylku přímek $\overleftrightarrow{C'F}$ a $\overleftrightarrow{BF'}$. Výsledek vyjádřete s přesností právě na jednotky minut. *(6 bodů)*
   b) Středem K hrany DD´ veďte příčku mimoběžek $\overleftrightarrow{C'F}$ a $\overleftrightarrow{BF'}$. Zapište rozbor a do předrýsovaného obrázku proveďte vlastní rys. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. *(5 bodů)*



3. Nechť je dána krychle ABCDEFGH o hraně délky a. Sestrojte řez této krychle rovinou ς, která je kolmá k přímce $\overleftrightarrow{EC}$ a prochází středem hrany EH. Popište přesné polohy vrcholů uvažovaného řezu. Dokažte, že rovina, kterou jste popsali je skutečně kolmá k přímce $\overleftrightarrow{EC}$. Dále vypočtěte obvod útvaru, který je příslušným řezem. Situaci stačí pouze načrtnout. Ostatní náležitosti konstrukční úlohy provádět nemusíte. *(5 bodů)*

Písemná práce - Úlohy o přímkách - varianta A

Čas na vypracování: 25 minut

1. Zformulujte tvrzení o *směrnicové* rovnici přímky. Uveďte větu, která vysvětluje geometrický význam koeficientů v požadované rovnici a udává všechny případy polohy přímky, ve kterých tato rovnice neexistuje.

2. Nechť jsou dány body $A = [0;1;-3]$, $B = [-6;3;-1]$ a $V = [2;-1;-2]$. Najděte rovnici osy konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ (tj. rovnici příslušné polopřímky). *(2 body)*

3. Nechť jsou dány přímky

$$a:\ 2x+y+5=0\,,\quad b:\ 2x+3y+3=0 \quad \text{a} \quad p=\{[1-t;-2+3t]\,, t\in\mathbb{R}\}\ .$$

   Určete obecnou rovnici přímky p', která je obrazem přímky p ve středové souměrnosti se středem $S\in a\cap b$. *(3 body)*

4. **Nepovinná bonusová úloha**. Uvažujme bod $C = [9;-6;-1]$. Porovnejte vzdálenosti bodu C od přímek $\overleftrightarrow{VA}$ a $\overleftrightarrow{VB}$ z úlohy č. 2. Své tvrzení podložte výpočtem.

Písemná práce - Úlohy o přímkách - varianta B

Čas na vypracování: 25 minut

1. Zformulujte tvrzení o *úsekové* rovnici přímky. Uveďte větu, která vysvětluje geometrický význam koeficientů v požadované rovnici a udává všechny případy polohy přímky, ve kterých tato rovnice neexistuje.

2. Nechť jsou dány body $A = [-1;6;1]$, $B = [5;-4;-1]$ a $V = [3;-2;0]$. Najděte rovnici osy konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ (tj. rovnici příslušné polopřímky). *(2 body)*

3. Nechť jsou dány přímky

$$a:\ 3x+y-1=0\,,\quad b:\ 5x+3y+5=0 \quad \text{a} \quad p=\{[3+2t;-4-t]\,, t\in\mathbb{R}\}\ .$$

   Určete obecnou rovnici přímky p', která je obrazem přímky p ve středové souměrnosti se středem $S\in a\cap b$. *(3 body)*

4. **Nepovinná bonusová úloha**. Uvažujme bod $C = [0;-5;3]$. Porovnejte vzdálenosti bodu C od přímek $\overleftrightarrow{VA}$ a $\overleftrightarrow{VB}$ z úlohy č. 2. Své tvrzení podložte výpočtem.

Písemná práce - Úlohy o přímkách - varianta A

Čas na vypracování: 25 minut

1. Zformulujte tvrzení o *směrnicové* rovnici přímky. Uveďte větu, která vysvětluje geometrický význam koeficientů v požadované rovnici a udává všechny případy polohy přímky, ve kterých tato rovnice neexistuje.

2. Nechť jsou dány body $A = [0;1;-3]$, $B = [-6;3;-1]$ a $V = [2;-1;-2]$. Najděte rovnici osy konvexního úhlu $\sphericalangle AVB$ (tj. rovnici příslušné polopřímky). *(2 body)*

3. Nechť jsou dány přímky

$$a:\ 2x+y+5=0\,,\quad b:\ 2x+3y+3=0 \quad \text{a} \quad p=\{[1-t;-2+3t]\,, t\in\mathbb{R}\}\ .$$

   Určete obecnou rovnici přímky p', která je obrazem přímky p ve středové souměrnosti se středem $S\in a\cap b$. *(3 body)*

4. **Nepovinná bonusová úloha**. Uvažujme bod $C = [9;-6;-1]$. Porovnejte vzdálenosti bodu C od přímek $\overleftrightarrow{VA}$ a $\overleftrightarrow{VB}$ z úlohy č. 2. Své tvrzení podložte výpočtem.

Písemná práce za 4. čtvrtletí - varianta A

Čas na vypracování: 90 minut

1. Definujte

   (a) *regulární* kuželosečku,

   (b) *singulární bod* kuželosečky.

2. Na přímce $p = \{[5 - 4t, -5 + 6t, t], t \in \mathbb{R}\}$ najděte bod M, který má od roviny $\rho: 2x - y + 2z + 3 = 0$ vzdálenost 2 j. Určete všechna řešení této úlohy. *(3 body)*

3. Najděte množinu všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, které mají od přímky $p: \ x = 3$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $M = [0; 3]$. Pokud se jedná o regulární kuželosečku, klasifikujte ji, najděte její střed a délky poloos (respektive vrchol a parametr). *(4 body)*

4. Nechť je dána kuželosečka
$$k: x^2 - 2x - 2y + 1 = 0\,.$$
   Kuželosečku k klasifikujte (tzn. určete její druh, ohniska a středy či vrcholy). Bodem $R = [1; -2]$ pak veďte všechny přímky (tzn. určete obecné rovnice příslušných přímek), které mají s k právě jeden společný bod, u případných tečen najděte i dotykové body. V případě, že tečny existují právě dvě, vypočtěte délku tětivy T_1T_2, kde T_1 a T_2 značí body dotyku těchto tečen s kuželosečkou k. *(8 bodů)*

5. Určete střed a poloměr kulové plochy
$$\kappa: x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 8y + 4z - 4 = 0\,.$$
   Dále najděte všechna $d \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že průnikem roviny
$$\rho: 2x - 3y - 6z + d = 0$$
   a kulové plochy κ je kružnice o poloměru 4 j. *(4 body)*

6. Nechť je dána kuželosečka
$$k: -2x^2 + xy + y^2 + 7x + 5y + 4 = 0\,.$$
   (a) Zjistěte, zda k je regulární či singulární kuželosečka.

   (b) Najděte všechny asymptotické směry kuželosečky k.

   (c) Určete všechny středy a všechny singulární body kuželosečky k.

   (d) Zjistěte, čím je kuželosečka k tvořena (najděte rovnice příslušných útvarů). Rovnici kuželosečky k upravte do odpovídajícího součinového tvaru (tak, aby z něj bylo patrné čím je k tvořena).

   (6 bodů)

7. **Nepovinná bonusová úloha**. Každé z následujících tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost.

   (a) Jestliže je kuželosečka k singulární, tak má nejvýše jeden střed.

   (b) Jestliže je kuželosečka k singulární, pak každý její střed musí být singulárním bodem.

Písemná práce za 4. čtvrtletí - varianta B

Čas na vypracování: 90 minut

1. Definujte
   (a) *singulární* kuželosečku,
   (b) *střed* kuželosečky.

2. Na přímce $p = \{[-4+4t, -5+3t, 9-4t], t \in \mathbb{R}\}$ najděte bod M, který má od roviny $\rho : x + 2y - 2z + 5 = 0$ vzdálenost 3 j. Určete všechna řešení této úlohy. *(3 body)*

3. Najděte množinu všech bodů $X = [x; y]$ v rovině, které mají od přímky $p : \ y = 3$ dvakrát větší vzdálenost než od bodu $M = [2; 0]$. Pokud se jedná o regulární kuželosečku, klasifikujte ji, najděte její střed a délky poloos (respektive vrchol a parametr). *(4 body)*

4. Nechť je dána kuželosečka
$$k : y^2 - 2x - 2y + 1 = 0\,.$$
Kuželosečku k klasifikujte (tzn. určete její druh, ohniska a středy či vrcholy). Bodem $R = [-2; 1]$ pak veďte všechny přímky (tzn. určete obecné rovnice příslušných přímek), které mají s k právě jeden společný bod, u případných tečen najděte i dotykové body. V případě, že tečny existují právě dvě, vypočtěte délku tětivy T_1T_2, kde T_1 a T_2 značí body dotyku těchto tečen s kuželosečkou k. *(8 bodů)*

5. Určete střed a poloměr kulové plochy
$$\kappa : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y + 6z - 155 = 0\,.$$
Dále najděte všechna $d \in \mathbb{R}$, pro něž platí, že průnikem roviny
$$\rho : 4x - y - 8z + d = 0$$
a kulové plochy κ je kružnice o poloměru 12 j. *(4 body)*

6. Nechť je dána kuželosečka
$$k : -2x^2 + xy + y^2 - 7x - 5y + 4 = 0\,.$$
   (a) Zjistěte, zda k je regulární či singulární kuželosečka.
   (b) Najděte všechny asymptotické směry kuželosečky k.
   (c) Určete všechny středy a všechny singulární body kuželosečky k.
   (d) Zjistěte, čím je kuželosečka k tvořena (najděte rovnice příslušných útvarů). Rovnici kuželosečky k upravte do odpovídajícího součinového tvaru (tak, aby z něj bylo patrné čím je k tvořena).

   (6 bodů)

7. **Nepovinná bonusová úloha**. Každé z následujících tvrzení buď dokažte nebo uveďte protipříklad vyvracející jeho obecnou platnost.
   (a) Jestliže je kuželosečka k singulární, pak má přímku středů.
   (b) Jestliže je kuželosečka k singulární, pak má alespoň jeden singulární bod.

Písemná práce za 4. čtvrtletí - varianta C

Čas na vypracování: 90 minut

1. Definujte

   (a) *kuželosečku,*

   (b) *asymptotický směr* kuželosečky.

2. Nechť je dána krychle $ABCDEFGH$ o hraně délky a. Vypočtěte odchylku přímky $\overleftrightarrow{DF}$ a roviny $\overleftrightarrow{AS_{CG}H}$, kde S_{CG} značí střed hrany CG. Výsledek vyjádřete s přesností právě na jednotky minut. *(4 body)*

3. Nechť je dána elipsa
$$e:\ 25x^2 + 16y^2 + 150x - 32y - 159 = 0\,.$$
   Najděte její hlavní vrcholy a vypočtěte obsah čtyřúhelníku, který má vrcholy ve vedlejších vrcholech a ohniscích elipsy e. *(4 body)*

4. Nechť je dána kuželosečka
$$k:\ xy - 3x - 2 = 0$$
   a bod $M = [-1; 1]$. Kuželosečku k klasifikujte, tzn. pojmenujte ji, určete její střed, vrcholy, ohniska, osy, asymptoty a délky poloos (případně uveďte, které z uvedených objektů kuželosečka k nemá). Dále najděte rovnice všech přímek, které prochází bodem M a mají s kuželosečkou k právě jeden společný bod. *(8 bodů)*

5. Najděte středovou rovnici kulové plochy, která má tečnou rovinu $\tau:\ 2x - 3y + 6z - 11 = 0$ a střed $S = [-2; 4; 1]$. Dále určete její průsečíky s osou y. *(3 body)*

6. Nechť je dána kuželosečka
$$k:\ 4x^2 - 4xy + y^2 + 4x - 2y - 3 = 0\,.$$

   (a) Zjistěte, zda k je regulární či singulární kuželosečka.

   (b) Najděte všechny asymptotické směry kuželosečky k.

   (c) Určete všechny středy a všechny singulární body kuželosečky k.

   (d) Zjistěte, čím je kuželosečka k tvořena (najděte rovnice příslušných útvarů). Rovnici kuželosečky k upravte do odpovídajícího součinového tvaru (tak, aby z něj bylo patrné čím je k tvořena).

   (6 bodů)