Domácí úkol z 25. září 2014

1. Dokončete důkaz věty Theorem 7.7:

   Předpokládejme, že A je řádný (celý) ideál pořádku $\mathcal{O}$ v imaginárním kvadratickém tělese, přičemž diskriminant $\mathcal{O}$ je D. Tedy $A = [\alpha, \beta]$, přičemž lze předpokládat, že $\tau = \frac{\beta}{\alpha}$ má kladnou imaginární složku. Pak existuje jediná trojice $a, b, c \in \mathbb{Z}$ taková, že $a > 0$, $(a, b, c) = 1$ a $a\tau^2 + b\tau + c = 0$. Na přednášce jsme ukázali, že v tom případě primitivní pozitivně definitní kvadratická forma $f(x, y) = ax^2 + bxy + cy^2$ má diskriminant D, že $\mathcal{O} = [1, a\tau]$, že $N(A) = \frac{N(\alpha)}{a}$ a že třída forem v $C(D)$ obsahující formu $f(x, y)$ se zobrazí na třídu ideálů v $C(\mathcal{O})$ obsahující ideál A. Dokažte, že forma $f(x, y)$ vyjadřuje přirozené číslo $m = N(A)$.

   [Návod: využijte toho, že $A \subseteq \mathcal{O}$.]

2. Dokažte, že forma $f(x, y)$ z předchozí úlohy splňuje pro každé $x, y \in \mathbb{Z}$ rovnost
$$f(x, y) = \frac{N(\alpha x - \beta y)}{N(A)}.$$

   Odtud plyne,že inverzní zobrazení ke konstruovanému izomorfismu $C(D) \to C(\mathcal{O})$ lze definovat takto: třída ideálů obsahující řádný (celý) ideál $A = [\alpha, \beta]$ se zobrazí na třídu forem obsahující formu $\frac{N(\alpha x - \beta y)}{N(A)}$.