

Diskrétní deterministické modely – cvičné písemky

1. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+1) = \frac{2x(t) + 4}{x(t) - 1}.$$

2. Najděte obecné řešení systému rovnic

$$\begin{aligned}x(t+1) &= -x(t) + y(t) \\ y(t+1) &= 2y(t) + t.\end{aligned}$$

3. Uvažujte autonomní rovnici druhého řádu

$$x(t+1) = rx(t) \left(1 - \frac{x(t-1)}{K}\right);$$

parametry r a K jsou kladné. Najděte všechny její rovnovážné body a vyšetřete jejich stabilitu.

Uvedenou rovnici interpretujte.

Řešení:

1.
$$x(t) = \frac{4(1+x_0)(-3)^t - (4-x_0)2^t}{(1+x_0)(-3)^t + (4-x_0)2^t} = 1 - \frac{2(4-x_0)}{4-x_0 + (1+x_0)\left(-\frac{3}{2}\right)^t} + \frac{3(1+x_0)}{1+x_0 + (4-x_0)\left(-\frac{2}{3}\right)^t}$$

2.
$$x(t) = 2^t A + (-1)^t B - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4},$$

$$y(t) = 3 \cdot 2^t A - t - 1,$$

podrobněji:

$$x(t) = \frac{1}{3}(3x_0 - y_0 + \frac{1}{2}t_0 - \frac{1}{4})(-1)^{t-t_0} + \frac{1}{3}(y_0 + t_0 + 1)2^{t-t_0} - \frac{1}{2}t - \frac{1}{4},$$

$$y(t) = (y_0 + t_0 + 1)2^{t-t_0} - t - 1$$

3. Rovnovážné body jsou $x_1^* = 0$ a $x_2^* = K \frac{r-1}{r}$.

- $0 < r < 1 \Rightarrow x_1^*$ je stabilní, x_2^* je nestabilní
- $1 < r < 2 \Rightarrow x_1^*$ je nestabilní, x_2^* je stabilní
- $2 < r \Rightarrow x_1^*$ oba rovnovážné body jsou nestabilní

Rovnice může modelovat vývoj velikosti populace, u níž vnitrodruhová konkurence působí se zpožděním jedné generace. Parametr r je vnitřní koeficient růstu (maximální možný přírůstek velikosti populace, růstový koeficient populace bez vnitrodruhové konkurence, biotický potenciál modelované populace), parametr K vyjadřuje kapacitu (úživnost) prostředí; ta závisí na růstovém koeficientu a je $\left(1 - \frac{1}{r}\right)$ -násobkem parametru K .

1. Najděte řešení počáteční úlohy

$$x(t+1)^2 - (2+t)x(t+1)x(t) + 2tx(t)^2 = 0, \quad x(1) = 1.$$

2. Najděte obecné řešení rovnice

$$x(t+2) - x(t) = 2^t t \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right).$$

3. Uvažujte autonomní systém

$$\begin{aligned} H(t+1) &= rH(t) \exp(-aP(t)), \\ P(t+1) &= cH(t) [1 - \exp(-aP(t))]; \end{aligned}$$

parametry r , a a c jsou kladné. Najděte rovnovážný bod systému s oběma souřadnicemi kladnými a vyšetřete jeho stabilitu.

Řešení:

1. Dvě řešení: $x_1(t) = 2^{t-1}$, $x_2(t) = (t-1)!$
2. $x(t) = A + (-1)^t B + \frac{1}{25} 2^t (8 - 5t) \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)$
3.
 - $r \leq 1$ rovnovážný bod uvnitř prvního kvadrantu neexistuje
 - $r > 1$ rovnovážný bod $\left(\frac{1}{ac} \frac{r \ln r}{r-1}, \frac{\ln r}{a}\right)$ je nestabilní