Procvičovací úkol č.7 - Zadání

Příklad č.1 Ve 12-ti náhodně vybraných internetových obchodech byly zjištěny následující ceny deskriptoru artefaktů (v Kč): $102, 99, 106, 103, 96, 98, 100, 105, 103, 98, 104, 107$. Těchto 12 hodnot považujeme za realizace náhodného výběru $X_1, \ldots, X_{12}$ z rozložení, které má střední hodnotu μ a rozptyl σ^2. Pomocí R určete nestranné bodové odhady

1. neznámé střední hodnoty μ,
2. neznámého rozptylu σ^2
3. neznámé směrodatné odchylky σ.

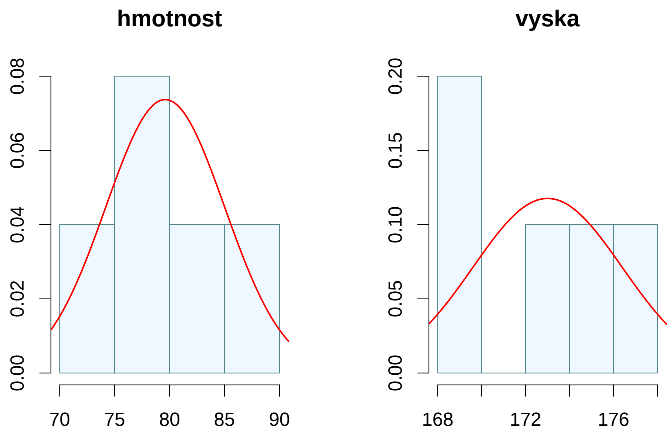
Všechny výsledky interpretujte !!! :)

Příklad č.2: Pět mužů zjistilo a zapsalo svou hmotnost (v kg) a výšku (v cm):

Číslo muže	1	2	3	4	5
Hmotnost	76	86	73	84	79
Výška	170	177	169	174	175

1. Najděte pomocí R nestranné bodové odhady
   (a) střední hodnoty hmotnosti a střední hodnoty výšky
   (b) rozptylu hmotnosti a rozptylu výšky
   (c) kovariance hmotnosti a výšky.
2. Najděte pomocí R asymptotický bodový odhad koeficientu korelace hmotnosti a výšky.
3. Všechny zjištěné hodnoty řádně interpretujte, včetně stanovení typu závislosti mezi náh. veličinami.
4. Vytvořte a řádně popište histogramy pro hmotnost a výšku. Do každého histogramu zaznamenejte také křivku hustoty normálního rozložení s parametry μ =výběrový průměr, σ^2 =výběrový rozptyl.

Nápověda: Příkaz pro nalezení kovariance náh.veličin X a Y má tvar cov(X, Y), příkaz pro nalezení keoficientu korelace náhodnách veličin má tvar cor(X, Y).



Příklad č.3: Dokončení z hodiny: Při kontrolních zkouškách životnosti 16-ti žárovek byl stanoven odhad $m = 3000\,h$ střední hodnoty jejich životnosti. Z dřívějších zkoušek je známo, že životnost žárovky se řídí normálním rozložením se směrodatnou odchylkou $\sigma = 20\,h$. Vypočtěte pomocí R:

(a) 99 % empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti;

$$(d, h) = (2987.1; 3012.9)$$

(b) 90 % levostranný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti;

$$\langle 2993.6, \infty)$$

(c) 95 % pravostranný empirický interval spolehlivosti pro střední hodnotu životnosti.

$$(-\infty, 3008.2\rangle$$

Výsledky řádně interpretujte a vždy okomentujte, proč jste k výpočtu zvolili vámi vybraný IS.

Příklad č.4: Z populace stejně starých selat téhož plemene bylo vylosováno šest selat a po dobu půl roku jim byla podávána táž výkrmná dieta. Byly zaznamenávány průměrné denní přírůstky hmotnosti v Dg. Z dřívějších pokusů je známo, že v populaci mívají takové přírůstky normální rozložení, avšak střední hodnota i rozptyl se měnívají. Přírůstky v Dg: 62, 54, 55, 60, 53, 58.

(a) Najděte 95% empirický levostranný interval spolehlivosti pro neznámou střední hodnotu μ při neznámém rozptylu σ^2.

$$\langle 54.06\,;\,\infty)$$

(b) Najděte 95% empirický interval spolehlivosti pro rozptyl σ^2.

$$\langle 2.23\,;\,8.77)$$

Výsledky řádně interpretujte a vždy okomentujte, proč jste k výpočtu zvolili vámi vybraný IS.

Příklad č.5 - Dobrovolný :)

Vyjděte z pivotovy statistiky $T = \dfrac{m-\mu}{\frac{s}{\sqrt{n}}}$ a odvoďte tvar pro $100(1-\alpha)\%$ oboustranný interval spolehlivosti. Postup je analogický postupu uvedenému na hodině. Odvození proveďte ručně a napište mi postup odvození.

Nápověda:

- Není-li uveden typ intervalu, je tím myšlen interval **oboustranný**
- Tvary intervalů spolehlivosti:

  1. IS pro μ, když σ^2 známe
     (a) Oboustranný:
     $$(d,h) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha/2})$$
     (b) Levostranný:
     $$(d,\infty) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty)$$
     (c) Pravostranný:
     $$(-\infty,h) = (-\infty, m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{\alpha})$$
     Pozn: u_α je α kvantil standardizovaného normálního rozložení.
  2. IS pro μ, když σ^2 neznáme
     (a) Oboustranný:
     $$(d,h) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1), m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha/2}(n-1))$$
     (b) Levostranný:
     $$(d,\infty) = (m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha}(n-1), \infty)$$
     (c) Pravostranný:
     $$(-\infty,h) = (-\infty, m - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{\alpha}(n-1))$$
     Pozn: $t_\alpha(n-1)$ je α kvantil studentova rozdělení o $n-1$ stupních volnosti.
  3. IS pro σ^2, když μ známe
     (a) Oboustranný:
     $$(d,h) = (\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n)}, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n)})$$
     (b) Levostranný:
     $$(d,\infty) = (\frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n)}, \infty)$$
     (c) Pravostranný:
     $$(-\infty,h) = (-\infty, \frac{\sum_{i=1}^n (x_i-\mu)^2}{\chi^2_{\alpha}(n)})$$
     Pozn: $\chi^2_\alpha(n)$ je α kvantil χ^2 rozdělení o n stupních volnosti.
  4. IS pro σ^2, když μ neznáme
     (a) Oboustranný:
     $$(d,h) = (\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)})$$

(b) Levostranný:

$$(d, \infty) = (\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha}(n-1)}, \infty)$$

(c) Pravostranný:

$$(-\infty, h) = (-\infty, \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha}(n-1)})$$

Pozn: $\chi^2_\alpha(n-1)$ *je* α *kvantil* χ^2 *rozdělení o* $n-1$ *stupních volnosti.*