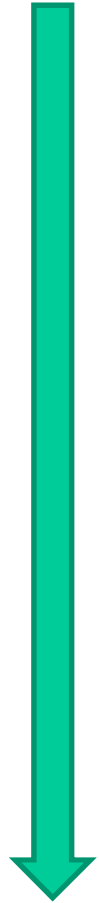


***Matematické základy fotogrammetrie,
souřadnicové soustavy, transformace***





- **Pořízení snímků + změření hodnot**
 - **Fotogrammetrické zpracování**
 - **- transformace**
 - **- vyrovnání**
 - **- korelace**
 - **...**
 - **Fotogrammetrické výstupy**

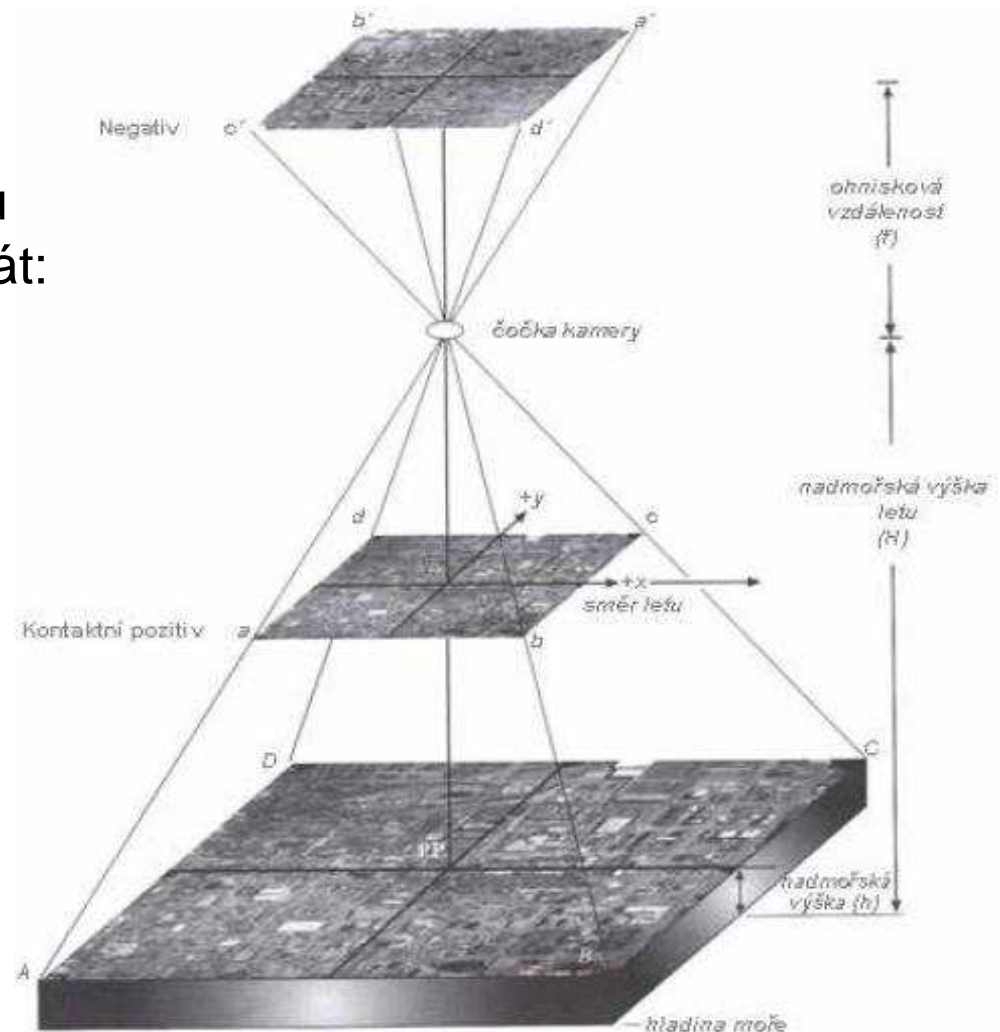
Snímkové orientace

Fotogrammetrie řeší přepočítání polohy bodu ze snímkových souřadnic do reálných souřadnic požadovaného systému.

Před vlastní transformací souřadnic a následným vyhodnocováním LMS je nutné provést **rekonstrukci** polohy snímacího zařízení v době pořízení snímku – tzv. **orientaci snímků**.

Pro měřické úkoly a pro následnou tvorbu map je nezbytné přesně znát:

- polohu středu promítání vzhledem k rovině snímku (**vnitřní orientaci**)
- polohu středu promítání k vnějším souřadnicím a orientaci osy záběru v prostoru (**vnější orientaci**).



Souřadnicové soustavy ve fotogrammetrii

a) hlavní souřadnicové soustavy

- systém **snímkových** souřadnic
- systém **modelových** souřadnic
- systém **geodetických** souřadnic

b) pomocné souřadnicové soustavy

- systém fiktivních snímkových souřadnic
- systém souřadnic svislého snímku

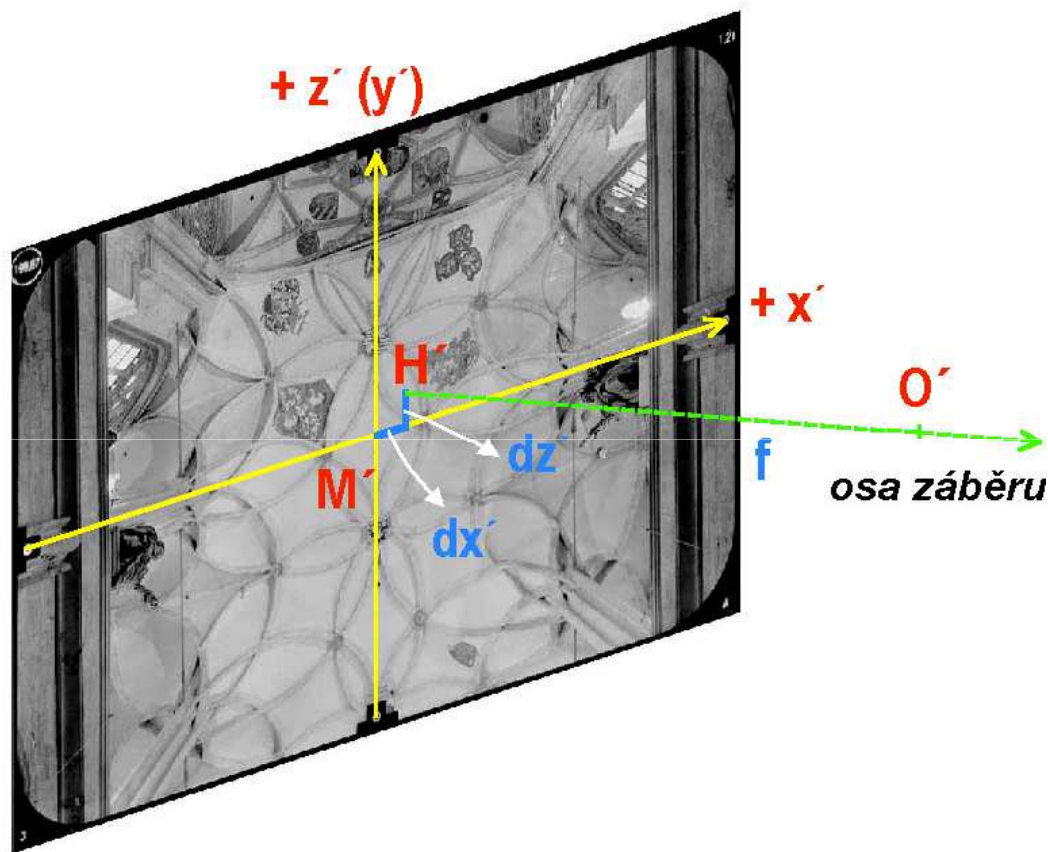
System snimkovych souřadnic

- dvě snimkové souřadnice (rovinné !!)

x' , y' (z') \Rightarrow letecká (pozemní) FM

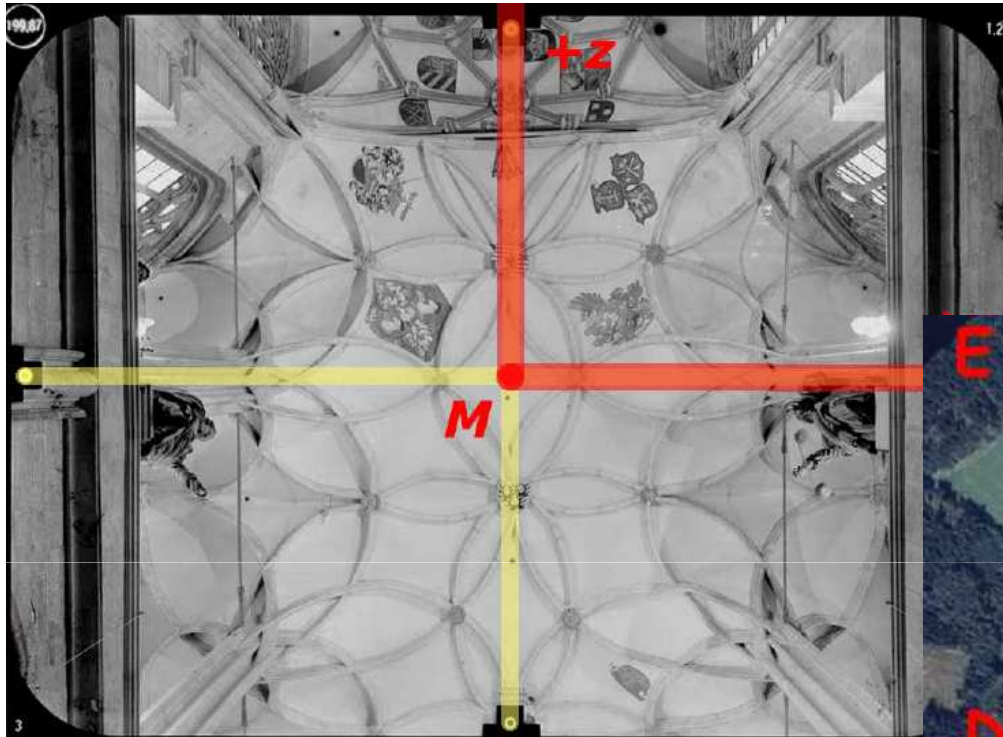
- počátek souřadnicové soustavy = střed snímku M' , kde M' je průsečík spojnic rámových značek
 - **souřadnicové osy**
 - osa x' spojnice horizontálních RZ; + vpravo
 - osa y' (z') \perp na osu x' v rovině snímku; orientace v matematickém smyslu
- (česká konvence os = letecký x pozemní snímek)

Snímkové souřadnice-schéma

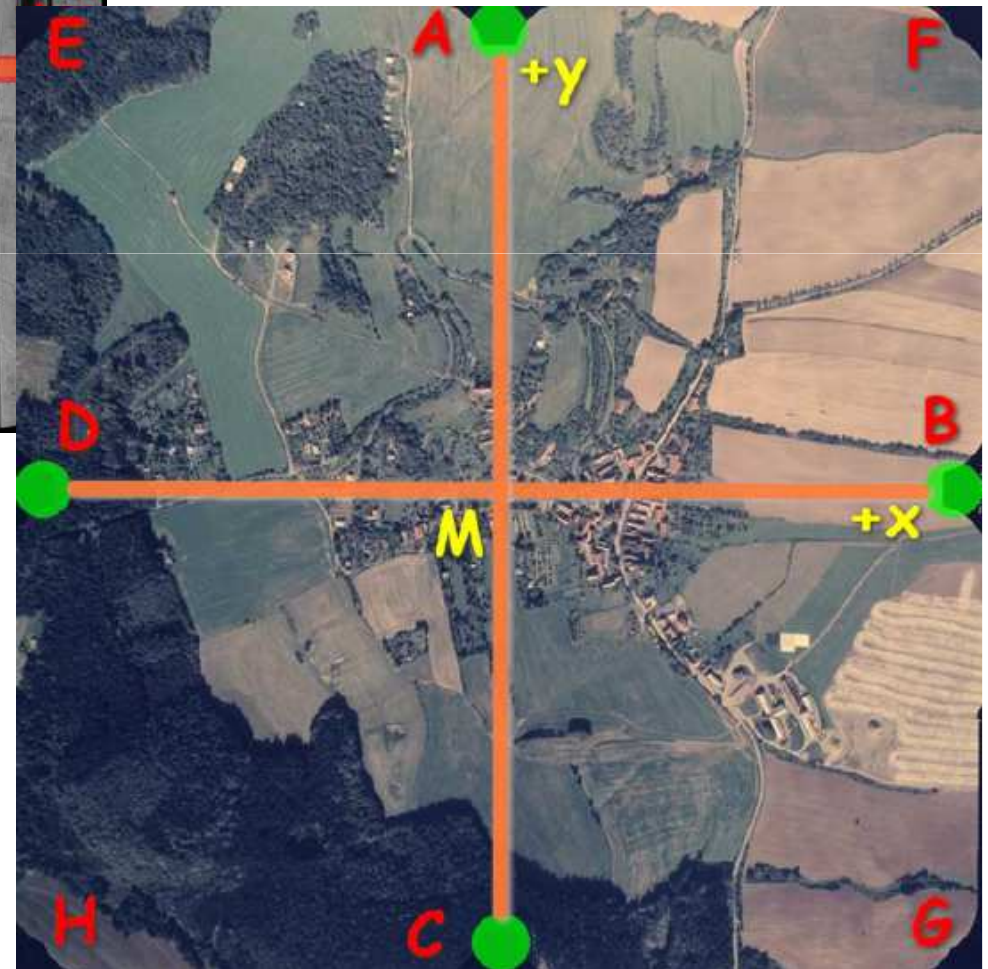


- Charakteristiky:
- 2D souřadnice v rovině snímku
- vysoká přesnost měření \Rightarrow řád μm
- $H' = M'$ ideál
- $H' \neq M'$ obecný případ \Rightarrow PVniO
- dx' , dy' (dz')

Orientace os – pozemní snímek

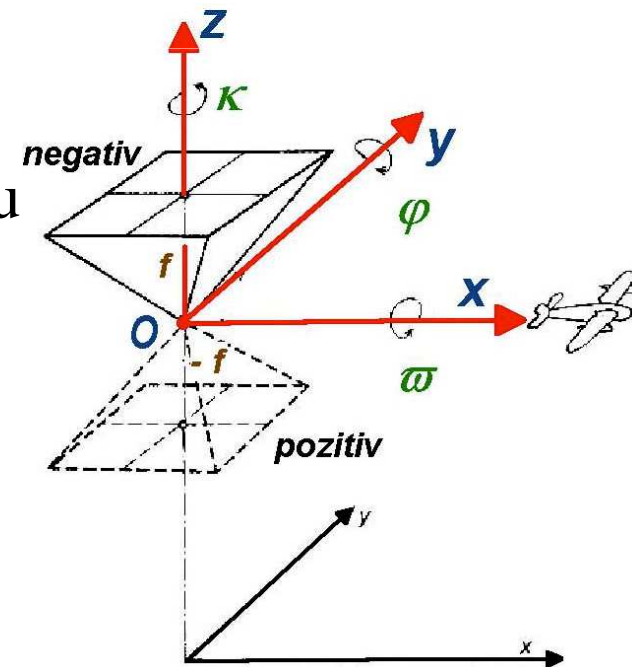
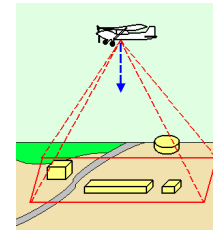


Orientace os – letecký snímek



System modelových souřadnic

- tři modelové souřadnice **x, y, z**
 - v měřítku, pravoúhlé, prostorové
- počátek – střed promítání **O**
- souřadnicové osy:
 - osa **x** ve směru letu
 - osa **y** kolmá v pravotočivém směru
 - osa **z** + orientace k zenitu (směr nadm.výšek)



- rovina xy - horizontální rovina (rovnoběžná se snímkovou rovinou, nebo stejná rovina jako geodetický systém)

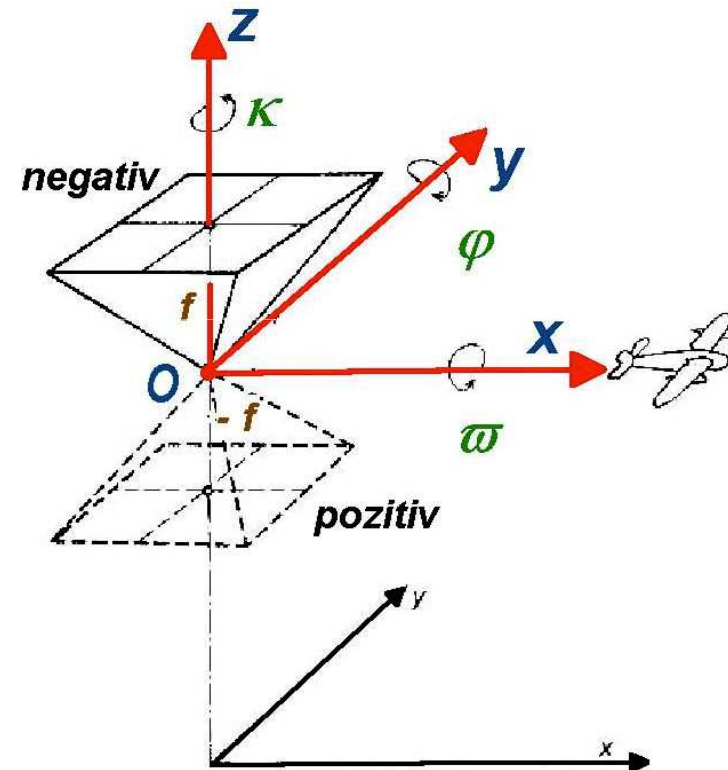
- rotace

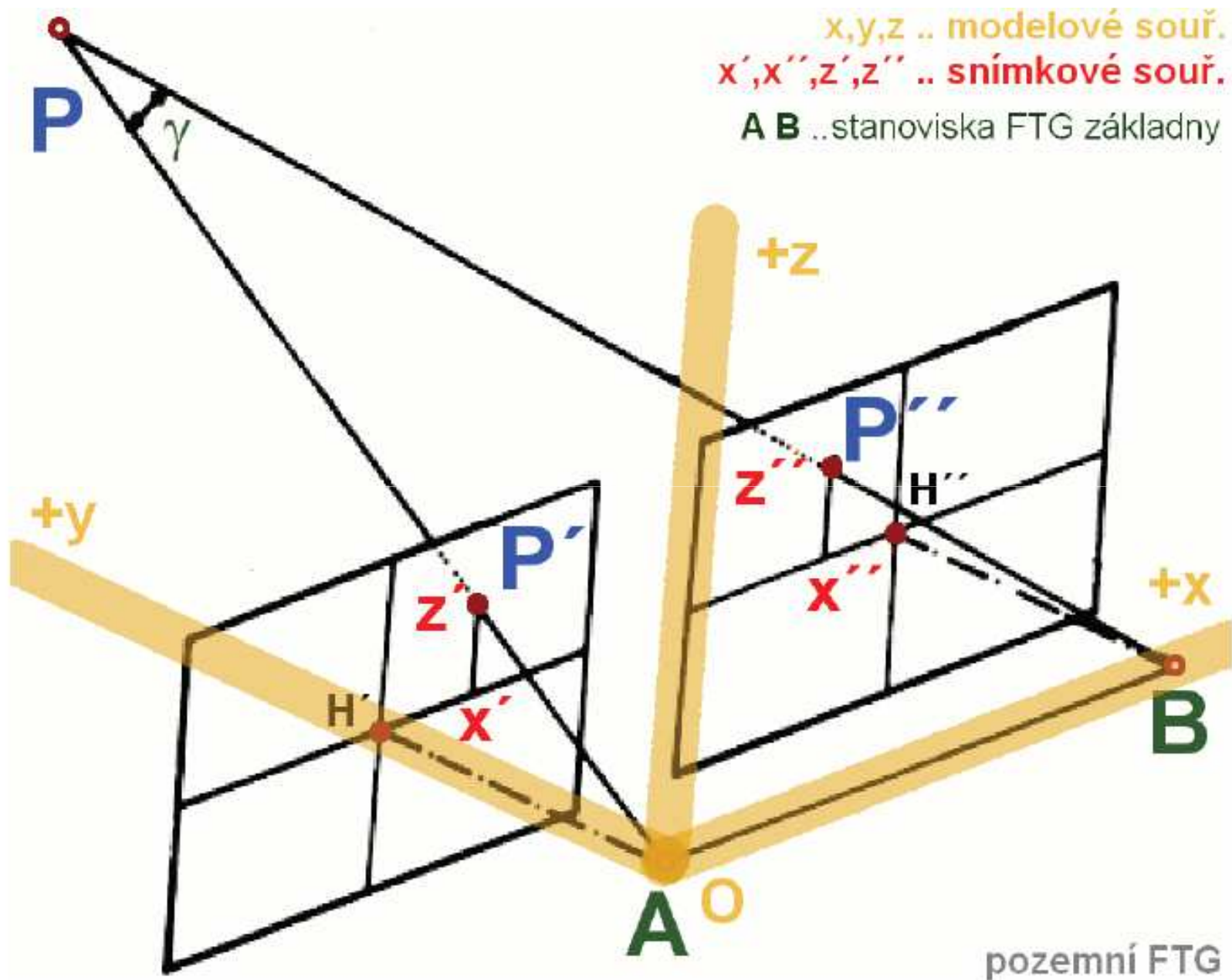
- ω kolem osy x (primární)
- φ kolem osy y (sekundární)
- κ kolem osy z (terciální)

kladný směr \Rightarrow pravotočivý

Pozn.: stereodvojice

- počátek leží ve středu promítání levého snímku





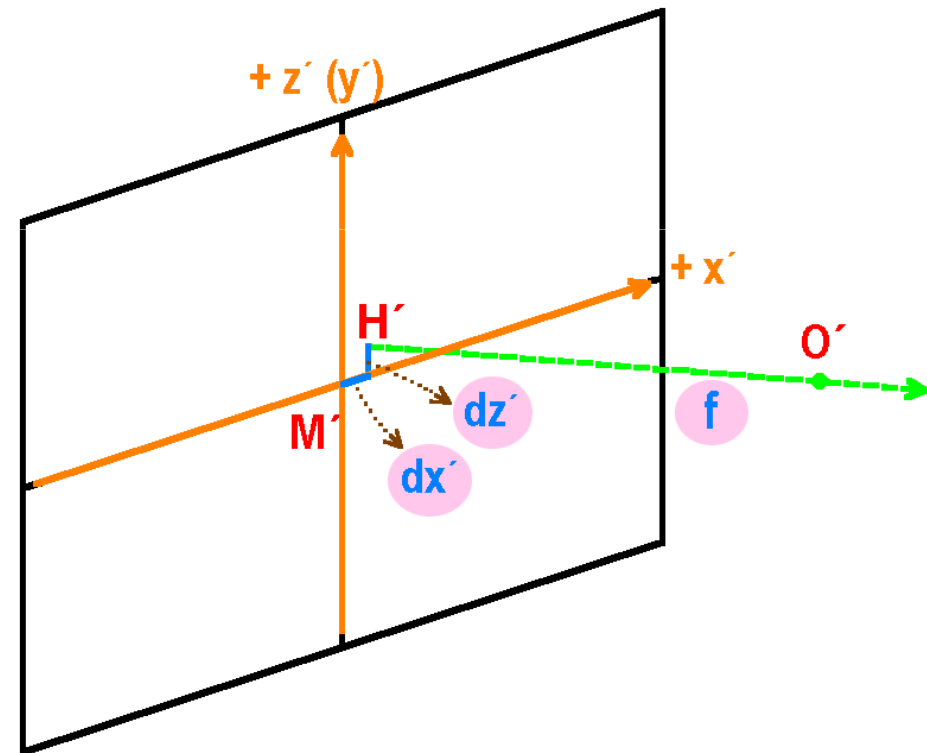
System geodetických souřadnic

- tři geodetické souřadnice X, Y, Z
nejčastěji prostorové, pravoúhlé
- výsledná souřadnicová soustava objektu,
nejčastěji S-JTSK (pro katastr, základní mapy
apod.), WGS-84, ETRS89 aj. (GPS), u pozemní
FM možné i vlastní místní souřadnicové soustavy

Prvky vnitřní orientace

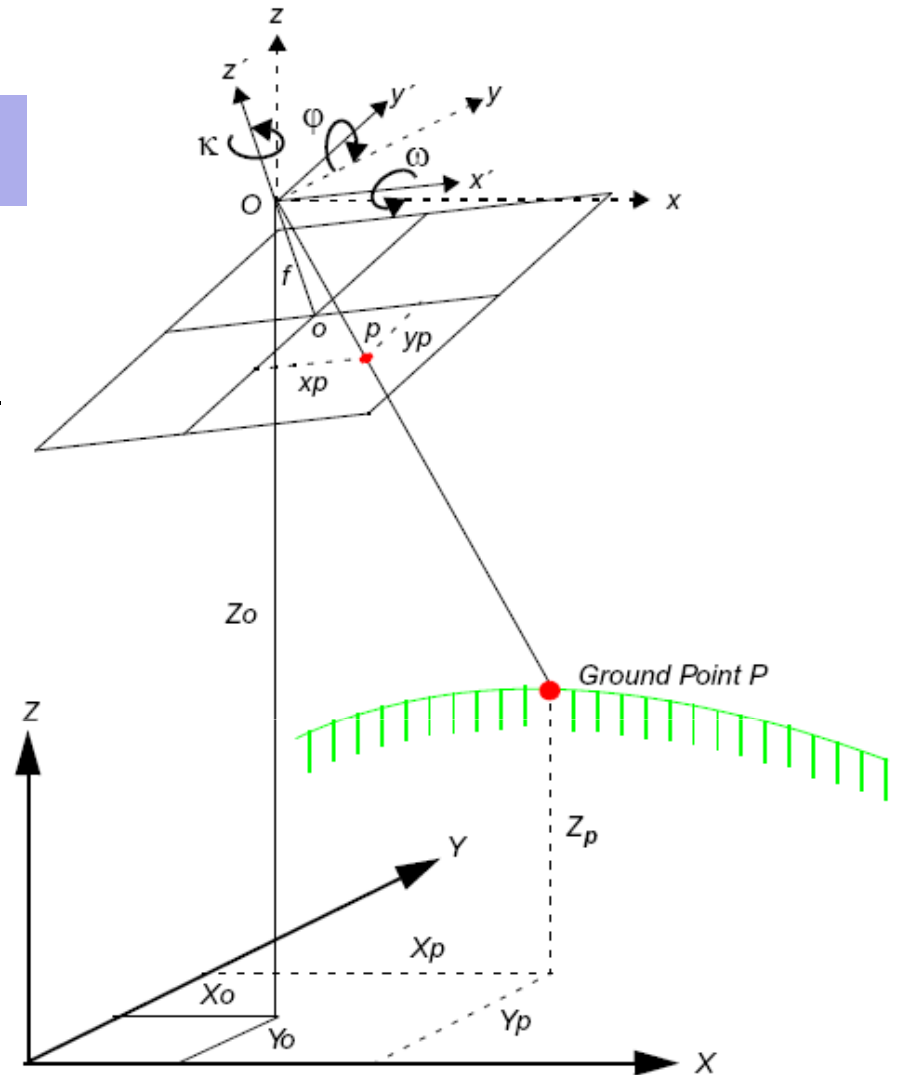
Prvky vnitřní orientace přesně definují polohu středu promítání vzhledem k rovině snímku. Umožňují rekonstruovat svazek paprsků, který v okamžiku expozice vytvořil měřický snímek. Střed promítání je střed výstupní pupily O'

- **konstanta komory** f – určuje se s přesností na setiny mm.
- **poloha hlavního snímkového bodu**, který lze ztotožnit se středem snímku jako průsečíkem rámových značek (u správně seřízené komory $M' = H'$, jinak je potřeba určit dx' a dy')
- **distorze objektivu** - je udána výrobcem pro danou komoru či objektivu

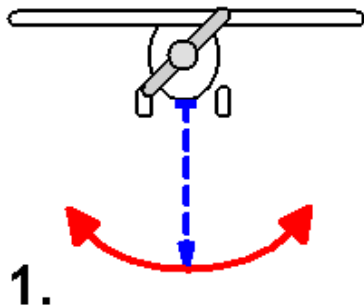


Prvky vnější orientace

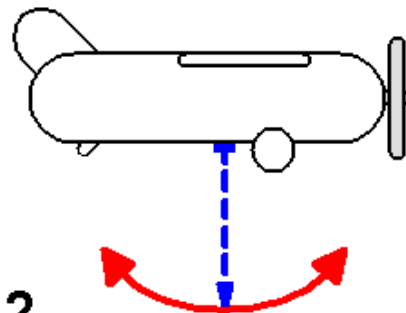
- Vnější orientace určuje polohu snímacího systému (středu promítání – O vstupní pupily) vzhledem k reálným souřadnicím. Určují i orientaci osy záběru v prostoru
- Její prvky jsou většinou neznámé.
- K prvkům vnější orientace patří šest následujících hodnot:



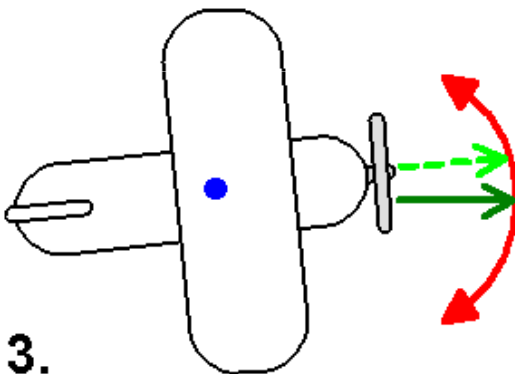
- **tři souřadnice středu optického systému (O)** v dané souřadné soustavě – X_o , Y_o , Z_o
- **tři úhly definující polohu osy záběru vůči souřadnicovým osám** (směr osy záběru, sklon osy záběru a pootočení snímku - ω, φ, κ)



1.



2.



3.

rotace:
1. příčná
2. podélná
3. ve směru letu

κ - pootočení snímku ve vlastní rovině (rotace okolo osy z ... 3)

φ - podélný sklon \Rightarrow sklon osy záběru od svislice ve směru letu (rotace okolo osy y ... 2)

ω - příčný sklon \Rightarrow sklon osy záběru od svislice napříč směru letu (rotace okolo osy x ... 1)

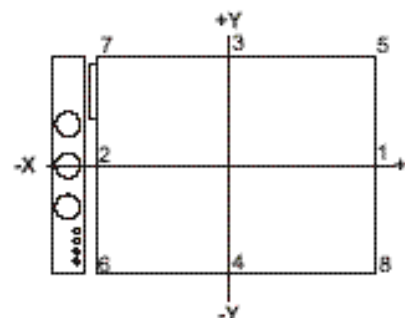
Určení prvků vnitřní orientace

Kalibrační protokol – obsahuje informace o konstantě komory (f), přesné souřadnice rámových značek a radiální zkreslení.

Přesné **změření rozměrů fotografie** (rámových značek), f je na okraji fotografie – potom lze zrekonstruovat polohu středu promítání.

Údaje o rámových značkách a radiálním zkreslení kamery.

kalibrace dne 08.12.2003



Základní údaje:

Typ kamery	Číslo kamery	Číslo objektivu	Konstanta kamery
LMK 15	263790 A	7381668C	152,135

Souřadnice rámových značek:

Číslo RZ	1	2	3	4	5	6	7	8
X	+110,033	-109,968	+0,030	+0,043	+110,036	-109,958	-109,969	+110,039
Y	+0,011	+0,024	+110,017	-109,998	+109,998	-109,981	+110,022	-109,998

Souřadnice středů:

		x/mm	y/mm
Hlavní bod autokolimace	PPA	+0,015	+0,006
Předpokládaný střed	FC	+0,036	+0,018
Průsečík spojnic rohových RZ	FCC	+0,039	+0,008

Radiální zkreslení:

s./mm	0	20	40	60	80	100	120	140
5	0	1	1	-2	-7	-4	1	5
6	0	1	1	2	0	2	5	1
7	0	2	1	0	-3	-2	2	3
8	0	1	1	0	-2	-1	3	2
průměr	0	1	1	0	-3	-1	3	3

Určení prvků vnější orientace

Prvky vnější orientace se určují dodatečně (početně - analytické metody - a nebo empiricky), nejčastěji pomocí tzv. **vlíčovacích bodů**

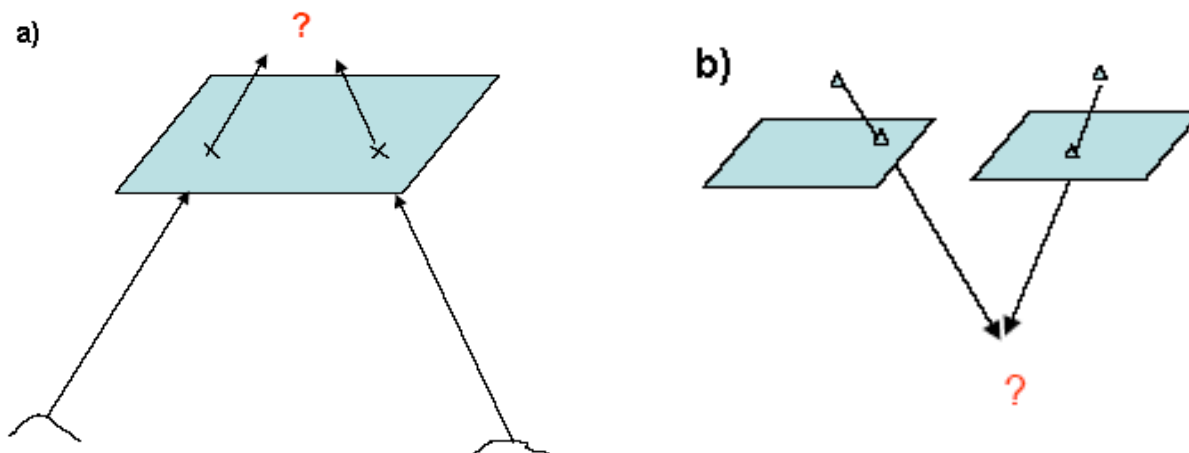
V závislosti na konkrétních postupech orientace snímků (jeden snímek, překrývající se dvojice, blok snímků) je zapotřebí mít jistý minimální počet bodů, u nichž je známa poloha X , Y , resp. X , Y , Z .

Vlíčovací body mohou být značené či neznačené. Jejich přesné souřadnice se dříve zjišťovaly geodeticky,

V současné době převládají metody GPS – určují souřadnice středu promítání. Tři úhly rotace se určují z měření IMS (inertial measuring unit).

V některých případech je možné s dostatečnou přesností určit prvky vnější orientace přímo měřením GPS (v reálném čase) s přesností cca 15 cm.

Určení prvků vnější orientace



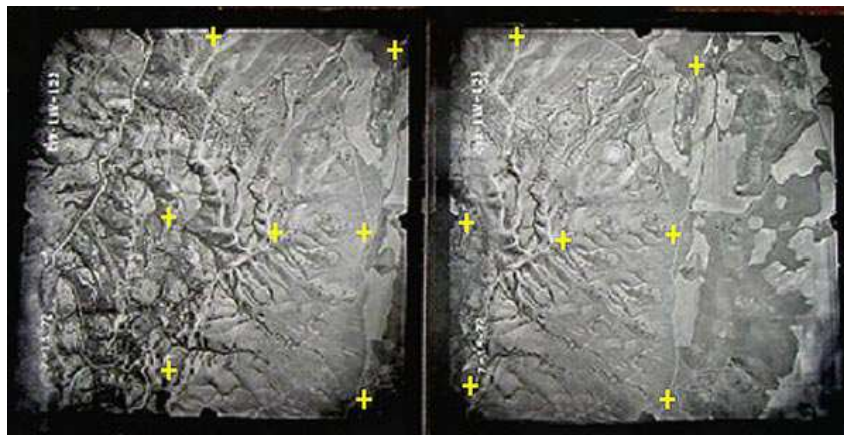
Vnější orientace modelu za pomoci vlíčovacích bodů je tedy založena nejprve na procesu **prostorového protínání zpět** (a) - z vlíčovacích bodů do modelu

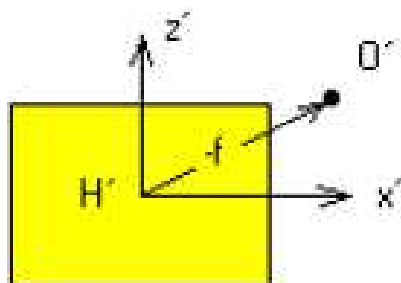
Po vypočtení prvků vnější orientace a obnovení modelu je potom možno určovat polohu všech ostatních bodů **prostorovým protínáním vpřed** (b).

Relativní a absolutní orientace

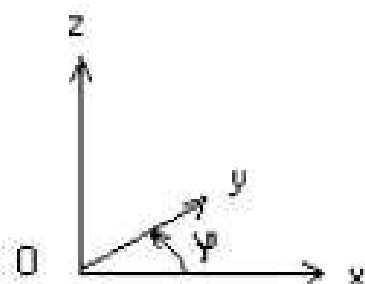
Především u zpracování snímků analytickými postupy na stereoplotrech se určení prvků vnější orientace provádí ve dvou krocích.

- **Relativní orientace** – orientace stereoskopického páru v přístroji tak, aby vytvořil stereomodel v relativních souřadnicích – libovolně prostorově orientovaný, bez vazby na geodetické souřadnice.
- **Absolutní orientace** – pootočení (rotace) a posun stereomodelu do geodetických souřadnic pomocí vlíčovacích bodů.





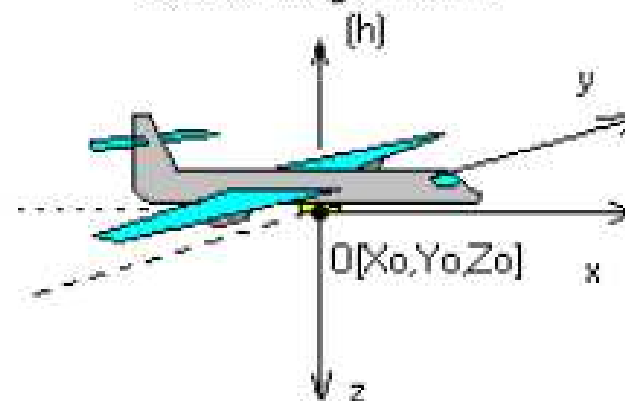
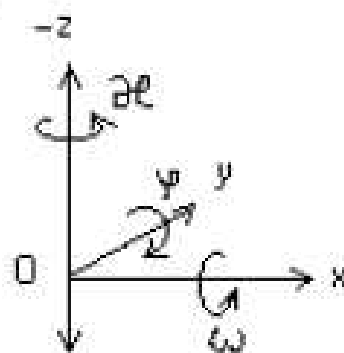
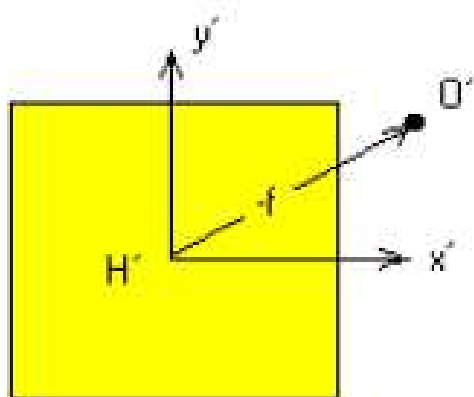
snímkové souřadnice



modelové souřadnice



letecká fotogrammetrie



Prvky vnitřní a vnější orientace pro pozemní a leteckou fotogrammetrii

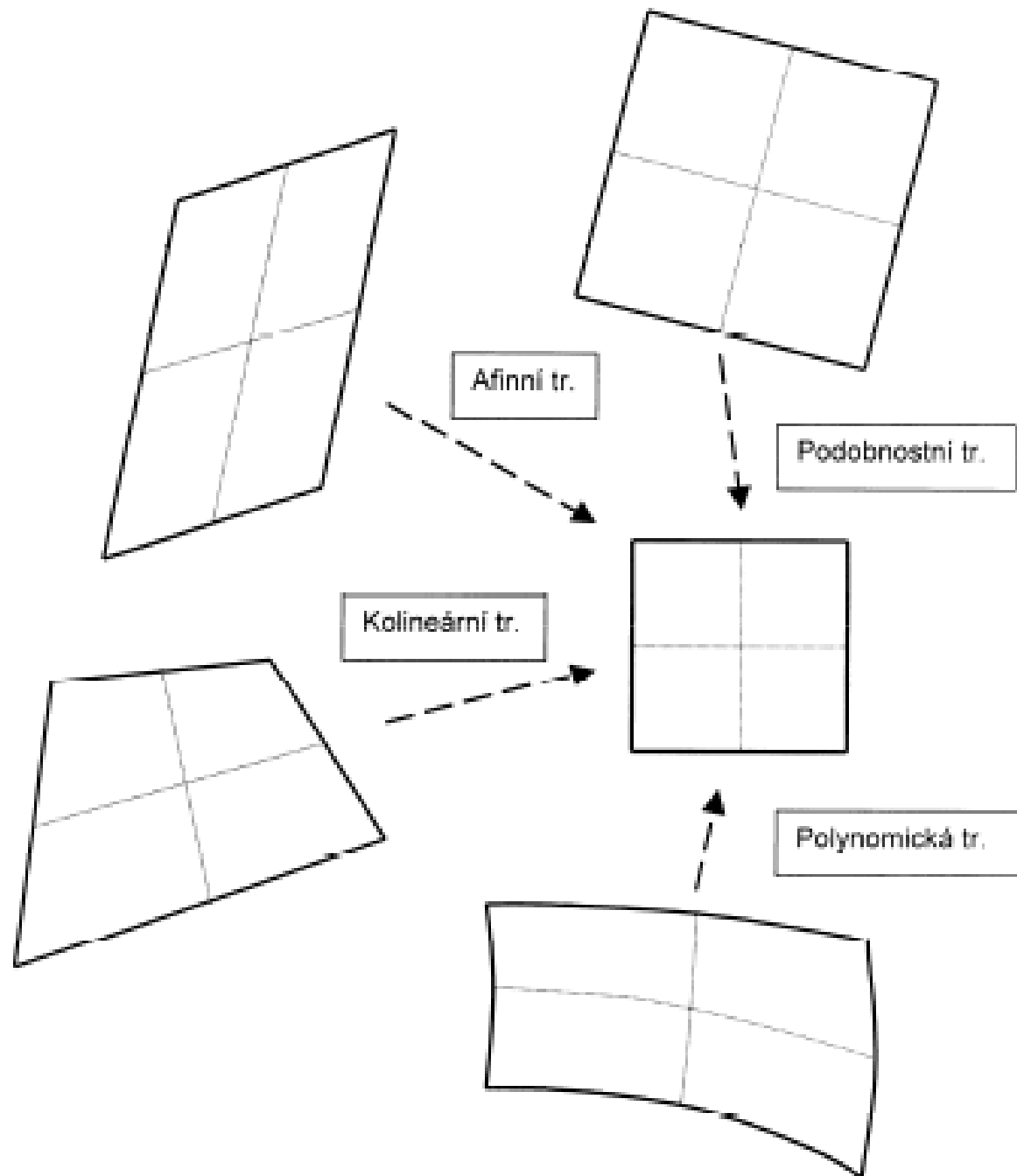
Základní transformační vztahy v FGM

Transformace souřadnic – vzájemné zobrazení mezi 2 kartézskými souřadnicovými systémy

a) rovinné transformace

- shodnostní (posun, otočení)
- podobnostní (posun, otočení, změna měřítka – 2 identické body), použití ve FM - např. převod zaměřených vlícovacích bodů, mezi místní a geodet. soustavou
- afinní (posun, otočení, změna měřítka, tvaru – zkosení – 3 ident. body), např. převod měřených plošných souř. do soustavy snímkových souřadnic (pomocí rámových značek)
- kolineární – středové zobrazení dvou rovinných souř. systémů – zachovává dvojpoměr, 4 ident. body, ve FM jednosnímková fotogrammetrie

b) prostorové transformace



Vztahy mezi souřadnými soustavami

Fotogrammetrie řeší převod snímkových souřadnic objektu (x' , y' , z') na souřadnice geodetické (X , Y , Z).

Tento převod zahrnuje obecně tři dílčí úkoly:

- 1) postupnou změnu orientace soustavy snímkových souřadnic (tzv. **rotaci**),
- 2) posunutí (tzv. **translaci**) počátku soustavy snímkových souřadnic
- 3) změnu **měřítká**

Celou transformaci lze řešit postupně po krocích, které zahrnují převod snímku do ideální polohy (kolmý snímek), poté převod do soustavy modelových souřadnic a konečně převod souřadnic modelových na geodetické.

Rotace

Pootočení snímkového souřadného systému tak, aby tento byl rovnoběžný se souřadným systémem geodetickým.

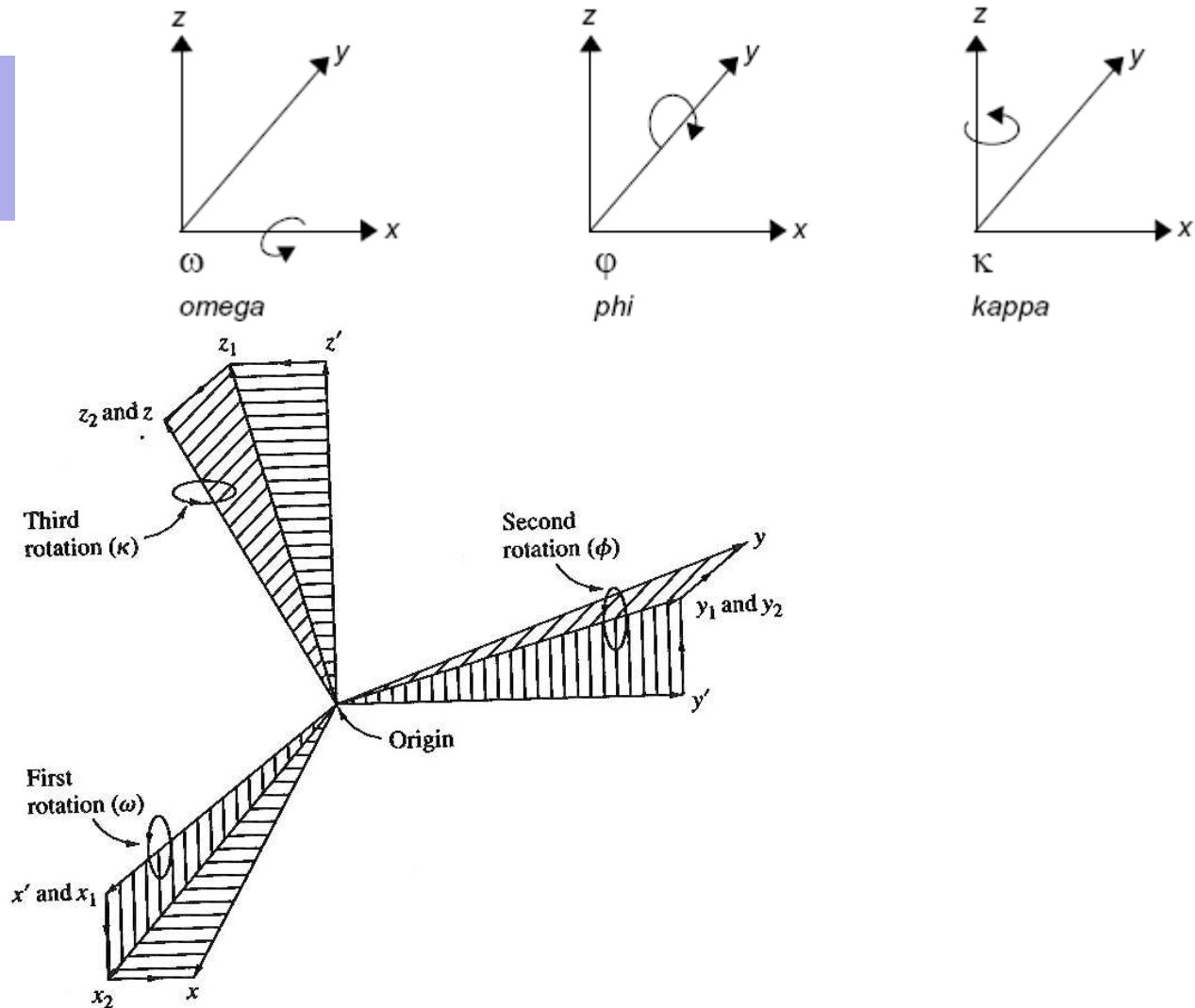
Modelové souřadnice x, y, z jsou souřadnice rovnoběžné s reálným systémem X, Y, Z .

Získáme je rotací z původního systému snímkových souřadnic $x', y', z'(f)$.

Rotace je ve vztazích mezi těmito trojrozměrnými souřadnými soustavami vyjádřena tzv. **rotační maticí \mathbf{M}** o rozměru 3 x 3:

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$$

Odvození rotační matice



Rotace v trojrozměrném systému spočívá v trojím postupném pootočení vždy kolem jedné osy systému

Nejprve se systém otočí o úhel - ω kolem osy x , poté o úhel ϕ kolem osy y a konečně o úhel κ kolem osy z

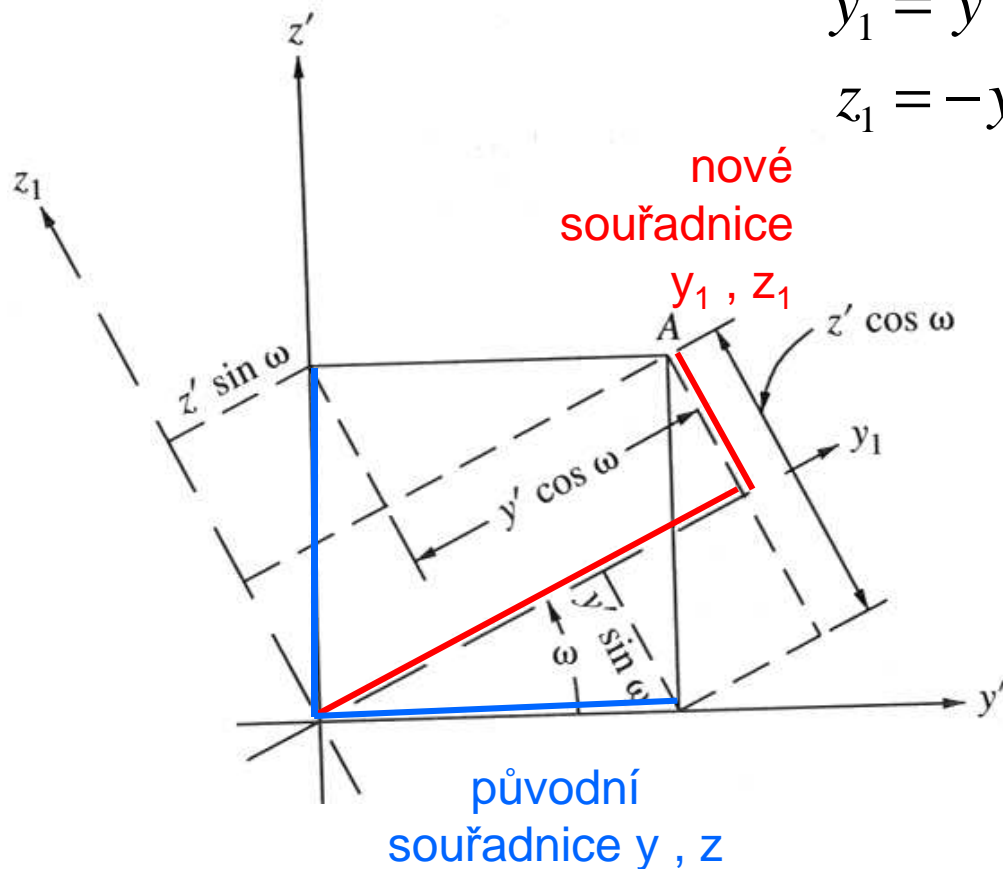
1. Pootočení kolem osy x o úhel ω

Souřadnice bodu A v nové soustavě y_1, z_1 pootočené o úhel ω z původní soustavy y', z' :

$$x_1 = x'$$

$$y_1 = y' \cos \omega + z' \sin \omega$$

$$z_1 = -y' \sin \omega + z' \cos \omega$$



v maticovém zápisu:

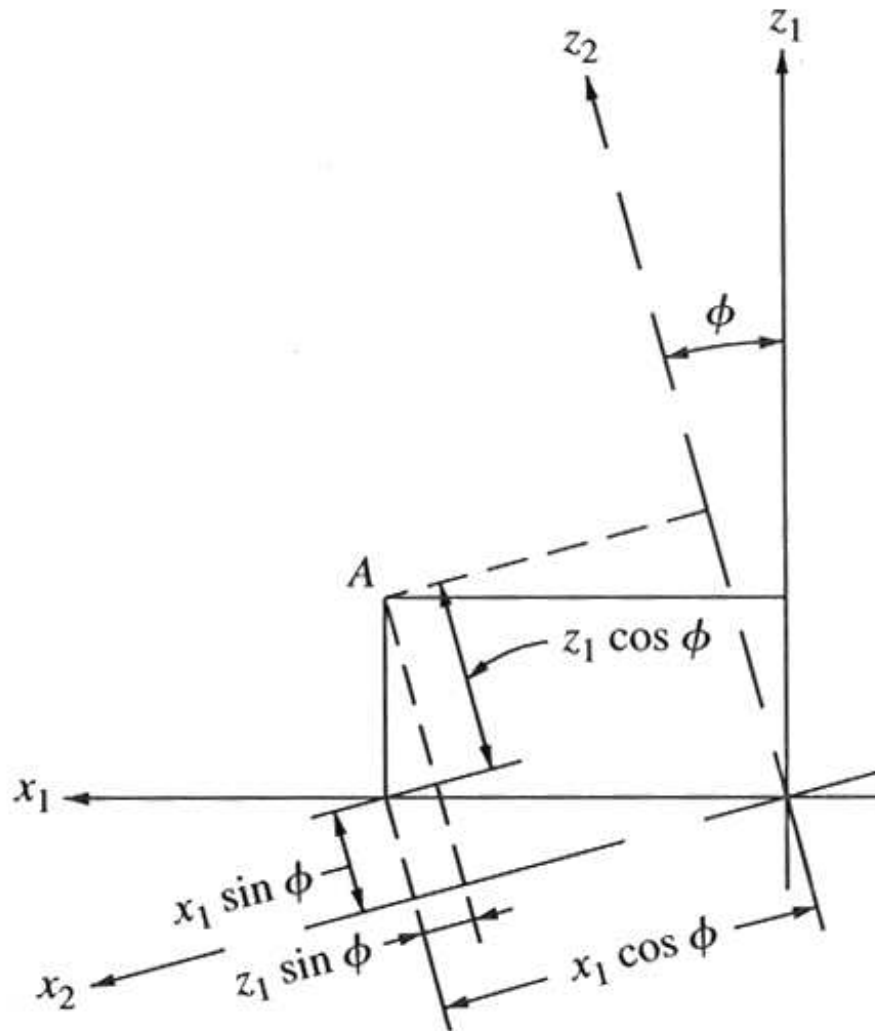
$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \omega & \sin \omega \\ 0 & -\sin \omega & \cos \omega \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

a nebo zkráceně:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M_x \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

2. Pootočení kolem osy y_1 o úhel ϕ

Souřadnice bodu A v dvakrát rotovaném systému $x_2 y_2 z_2$ budou:



$$x_2 = x_1 \cos \phi + z_1 \sin \phi$$

$$y_2 = y_1$$

$$z_2 = -x_1 \sin \phi + z_1 \cos \phi$$

v maticovém zápisu:

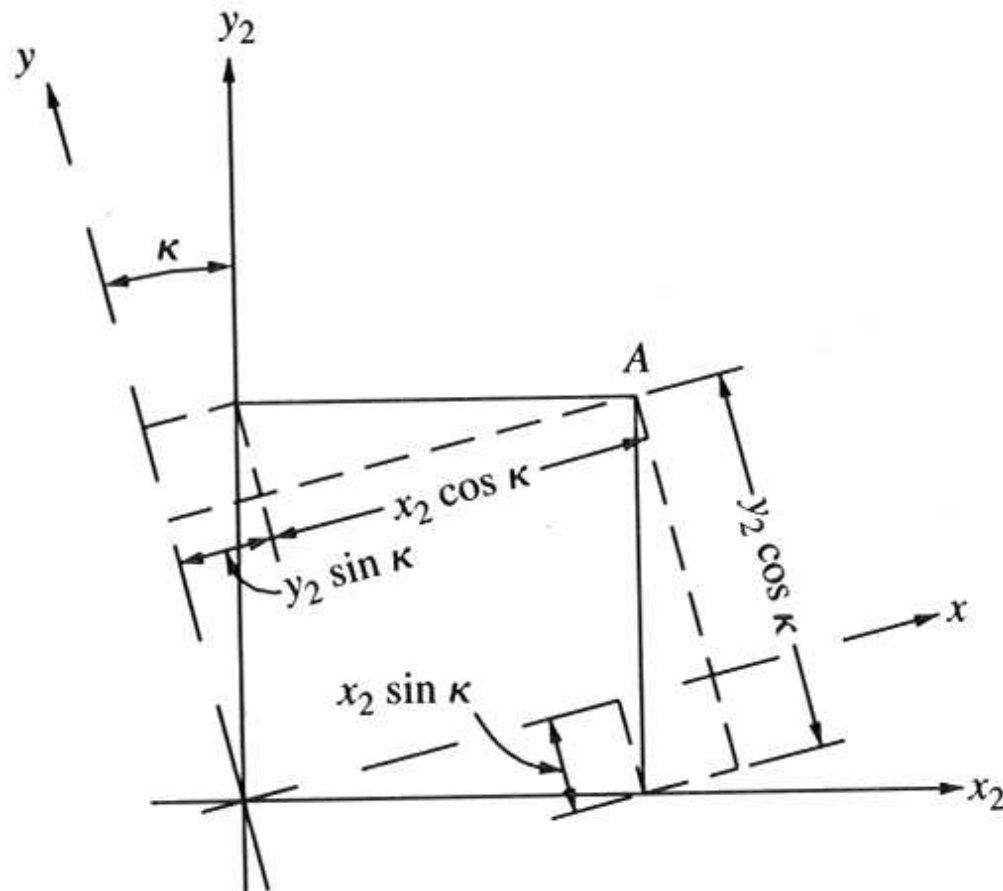
$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & 0 & \sin \phi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \phi & 0 & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

a nebo zkráceně:

$$\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = M_y \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

3. Pootočení kolem osy z_2 o úhel κ

Souřadnice bodu A v již třikrát rotovaném systému x, y, z :



$$x = x_2 \cos \kappa + y_2 \sin \kappa$$

$$y = -x_2 \sin \kappa + y_2 \cos \kappa$$

$$z = z_2$$

v maticovém zápisu:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \kappa & \sin \kappa & 0 \\ -\sin \kappa & \cos \kappa & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

a nebo zkráceně:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_z \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

Celý proces postupných rotací z původního systému souřadnic (x', y', z') do nového systému, který bude rovnoběžný se systémem geodetických souřadnic lze vyjádřit následovně:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M_z \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} = M_z M_y \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = M_z M_y M_x \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \text{a nebo zkráceně} \quad X = MX'$$

Vlastnosti rotační matice

Jednotlivé prvky matice představují tzv. **směrové cosiny** rotace a jsou určeny z následujících vztahů:

$$m_{11} = \cos(\varphi) \cos(\kappa)$$

$$m_{12} = -\cos(\varphi) \sin(\kappa)$$

$$m_{13} = \sin(\varphi)$$

$$m_{21} = \cos(\omega) \sin(\kappa) + \sin(\omega) \sin(\varphi) \cos(\kappa)$$

$$m_{22} = \cos(\omega) \cos(\kappa) - \sin(\omega) \sin(\varphi) \sin(\kappa)$$

$$m_{23} = -\sin(\omega) \cos(\varphi)$$

$$m_{31} = \sin(\omega) \sin(\kappa) - \cos(\omega) \sin(\varphi) \cos(\kappa)$$

$$m_{32} = \sin(\omega) \cos(\kappa) + \cos(\omega) \sin(\varphi) \sin(\kappa)$$

$$m_{33} = \cos(\omega) \cos(\varphi)$$

Rotační matice je maticí ortogonální, která má následující vlastnost:

$$M^{-1} = M^T$$

tedy inverzní matice se rovná matici transponované. Tato vlastnost je ve fotogrammetrii důležitá pro sestavení vztahu určujícího snímkové souřadnice bodu:

$$X' = M^T X$$

a nebo:

$$x' = m_{11}x + m_{12}y + m_{13}z$$

$$y' = m_{21}x + m_{22}y + m_{23}z$$

$$z' = m_{31}x + m_{32}y + m_{33}z$$

Podmínka kolinearity

Bod na zemském povrchu, obraz tohoto bodu na snímku a střed promítání leží na jedné přímce.

snímkové souřadnice libovolného bodu
 x'_p, y'_p

snímkové souřadnice středu promítání
 x'_o, y'_o, f .

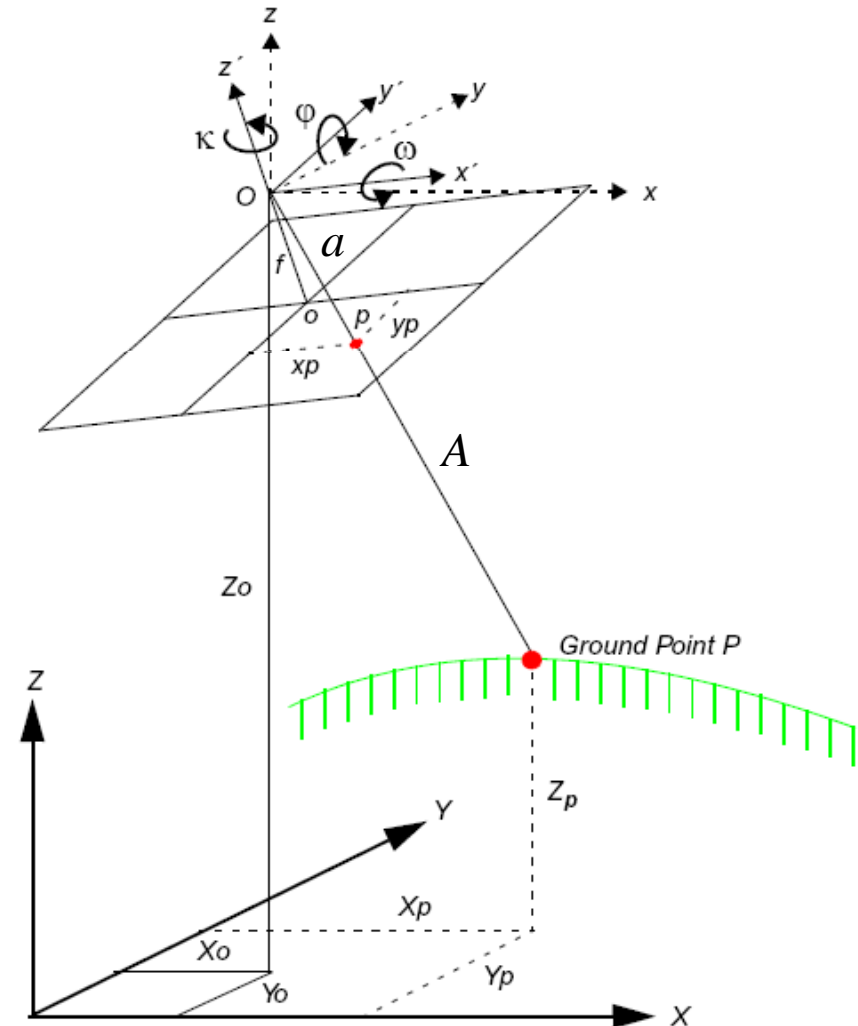
geodetické souřadnice středu promítání
 X_o, Y_o, Z_o .

a je vektor ze středu promítání O do bodu p (na snímku)

A je vektor z bodu O do bodu P (na zemském povrchu)

Podmínka kolinearity: $a = k \cdot A$

(k – měřítkové číslo)



Rovnice kolinearity

Velikost vektoru a vyjádřená snímkovými souřadnicemi:

$$a = \begin{pmatrix} x'_p - x'_o \\ y'_p - y'_o \\ -f \end{pmatrix}$$

Velikost vektoru A vyjádřená skutečnými souřadnicemi:

$$A = \begin{pmatrix} X_p - X_o \\ Y_p - Y_o \\ Z_p - Z_o \end{pmatrix}$$

Vztah mezi snímkovými souřadnicemi libovolného bodu a skutečnými souřadnicemi tohoto bodu vyjádřený pomocí rotační matice M :

$$a = k \cdot M \cdot A$$

tj.maticově:

$$\begin{pmatrix} x'_p - x'_o \\ y'_p - y'_o \\ -f \end{pmatrix} = k \cdot M \cdot \begin{pmatrix} X_p - X_o \\ Y_p - Y_o \\ Z_p - Z_o \end{pmatrix}$$

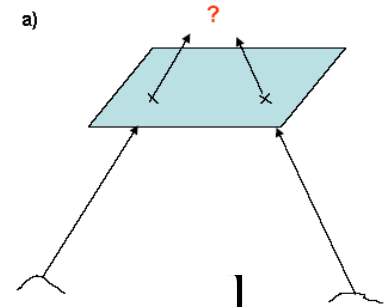
Rovnice kolinearity

Výše uvedený vztah lze vyjádřit jako soustavu tří rovnic:

$$x'_p - x'_o = k \left[m_{11}(X_P - X_O) + m_{12}(Y_P - Y_O) + m_{13}(Z_P - Z_O) \right]$$

$$y'_p - y'_o = k \left[m_{21}(X_P - X_O) + m_{22}(Y_P - Y_O) + m_{23}(Z_P - Z_O) \right]$$

$$-f = k \left[m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(Z_P - Z_O) \right]$$

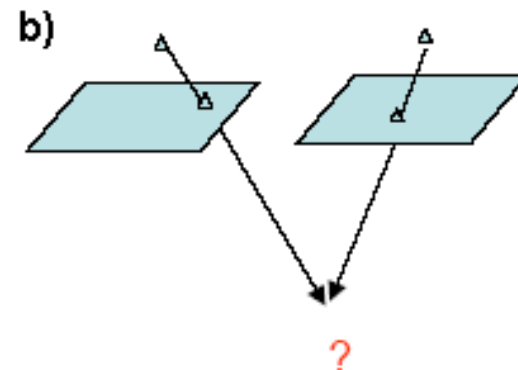


Podělíme-li první a druhou rovnicí rovnicí třetí, obdržíme tzv. **rovnice kolinearity**. Tyto definují vztah mezi snímkovými a skutečnými souřadnicemi:

$$x'_p = x'_o - f \frac{m_{11}(X_P - X_O) + m_{12}(Y_P - Y_O) + m_{13}(Z_P - Z_O)}{m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(Z_P - Z_O)}$$

$$y'_p = y'_o - f \frac{m_{21}(X_P - X_O) + m_{22}(Y_P - Y_O) + m_{23}(Z_P - Z_O)}{m_{31}(X_P - X_O) + m_{32}(Y_P - Y_O) + m_{33}(Z_P - Z_O)}$$

Rovnice kolinearity



Analogicky lze kolineární vztah využít inverzně pro určení skutečných souřadnic bodu následovně:

$$X_p = X_o + (Z_p - Z_o) \frac{m_{11}(x'_p - x'_o) + m_{12}(y'_p - y'_o) + m_{13}(-f)}{m_{31}(x'_p - x'_o) + m_{32}(y'_p - y'_o) + m_{33}(-f)}$$

$$Y_p = Y_o + (Z_p - Z_o) \frac{m_{21}(x'_p - x'_o) + m_{22}(y'_p - y'_o) + m_{23}(-f)}{m_{31}(x'_p - x'_o) + m_{32}(y'_p - y'_o) + m_{33}(-f)}$$

Kolineárních rovnic je ve fotogrammetrii možné využít k určování prvků vnější orientace a dále především k transformaci souřadnic každého bodu na snímku do nové polohy vyjádřené v geodetickém souřadném systému – tedy např. k tvorbě ortofoto.

Rovnice kolinearity

Je tam ale jeden problém:

$$X_p = X_o + (Z_p - Z_o) \frac{m_{11}(x'_p - x'_o) + m_{12}(y'_p - y'_o) + m_{13}(-f)}{m_{31}(x'_p - x'_o) + m_{32}(y'_p - y'_o) + m_{33}(-f)}$$

$$Y_p = Y_o + (Z_p - Z_o) \frac{m_{21}(x'_p - x'_o) + m_{22}(y'_p - y'_o) + m_{23}(-f)}{m_{31}(x'_p - x'_o) + m_{32}(y'_p - y'_o) + m_{33}(-f)}$$

Pro každý snímkový bod existuje nekonečné množství řešení (ze dvou měřených hodnot potřebujeme vypočítat 3 neznámé souřadnice)

Z jednoho snímku nelze zrekonstruovat polohu 3D objektu z 2D souřadnic (snímkových)

Co s tím?

- potřebujeme informaci o souřadnici Z
- nebo potřebujeme ještě jeden snímek

Způsoby určení prvků vnější orientace

V závislosti na počtu zpracovávaných snímků (jeden snímek či stereopár) a s tím souvisejícím potřebném počtu lícovacích bodů lze k fotogrammetrickým pracem využít následujících řešení, která využívají výše odvozených kolineárních rovnic:

- **zpětné promítání (space resection)** – určení prvků vnější orientace samostatně pro jeden snímek
- **prostorové protínání vpřed (space forward intersection)** – určení prvků vnější orientace společně pro dvojici překrývajících se snímků
- **blokové vyrovnání (bundle block adjustment)** – určení prvků vnější orientace bloku snímků metodami aerotriangulace

Ve fotogrammetrii existuje několik postupů k určení šesti neznámých prvků vnější orientace ($X_o, Y_o, Z_o, \omega, \varphi, \kappa$). Tyto postupy lze rozdělit na:

1. **Početni** - skládá se ze dvou kroků. Nejprve se provede relativní orientace, jejímž základem je změření tzv. vertikálních paralax na min. pěti bodech ve vyhodnocovacím přístroji. Poté následuje výpočet šesti neznámých prvků a tzv. absolutní orientace
2. **Analytické** – využívá se přímého vztahu mezi snímkovými a geodetickými souřadnicemi (základem je změření snímkových souřadnic).
3. **Empirické** – relativní orientace založená na postupném „ručním“ odstraňování vertikálních paralax na orientačních bodech a následná absolutní orientace (posun, otočení a určení měřítko).