ÚVOD DO MATEMATICKÉ BIOLOGIE I.

setkání páté

MU
IBA

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, pav.A29, RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE
A
EPIDEMIOLOGIE

© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Populační biologie se zabývá

- vzájemnými vztahy mezi jedinci
- limitní hustotou jedinců
- reprodukčním potenciálem
- délkou životního cyklu a jeho dílčích fází
- meziročními změnami uvnitř populací atd.

K čemu je to dobré?

Ochrana přírody, výroba potravin (živočišných, rostlinných) i technických plodin, produkce dřevní hmoty atd.

© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.

Je považována za základ výzkumné metodologie ve zdravotnictví a pomáhá medicíně založené na důkazech, protože rozpoznává rizikové faktory přenosu nemocí a určuje a hodnotí (optimální) postupy jejich léčby.

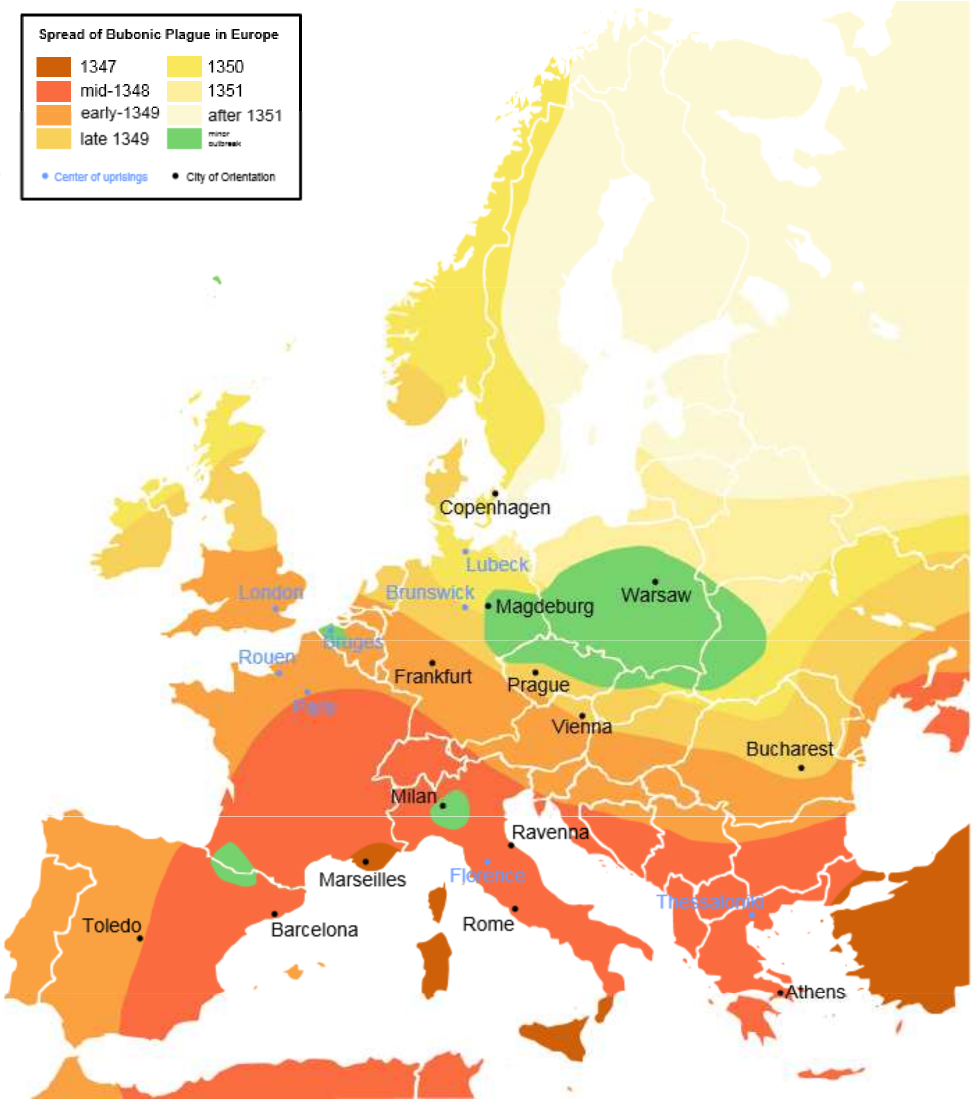
Zahrnuje zkoumání vzniku nemoci, výběr vhodné studie, sběr a analýzu dat s ohledem na vývoj statistických modelů, sestavení hypotézy, …. Souvisí i z dalšími odvětvími - biologie je potřeba k pochopení působení nemocí, společenské vědy jako sociologie a filozofie pomáhají vyhodnotit bezprostřední i méně aktuální rizikové faktory.

Dělí se na *epidemiologii obecnou*, zabývající se metodologií práce a obecnými epidemiologickými zákonitostmi a *speciální epidemiologii* konkrétních nemocí.

© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Epidemiologie jako odvětví medicíny studuje faktory ovlivňující zdraví a nemocnost obyvatelstva. Její výsledky slouží jako poklad k zdůvodnění lékařských zásahů v zájmu veřejného zdraví a zdravotní prevence.



© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÁ BIOLOGIE

Demografie (δ□μος - lid γράφω - píši, popisuji, měřím) je obor, který se zabývá procesy reprodukce lidských populací.

Objektem studia demografie tedy jsou lidské populace, předmětem jejího studia je proces demografické reprodukce, tedy přirozený proces obnovy obyvatelstva důsledkem rození a vymírání.

Procesy demografické reprodukce jsou *úmrtnost* (též mortalita), *nemocnost*, *porodnost* (též natalita), *potratovost*, *sňatečnost* a *rozvodovost*.

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)

italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciova posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:
Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků. Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí další pár a ten se v dalším měsíci bude dál rozmnožovat stejným způsobem.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1};\ P_0 = 0;\ P_1 = 1;$$

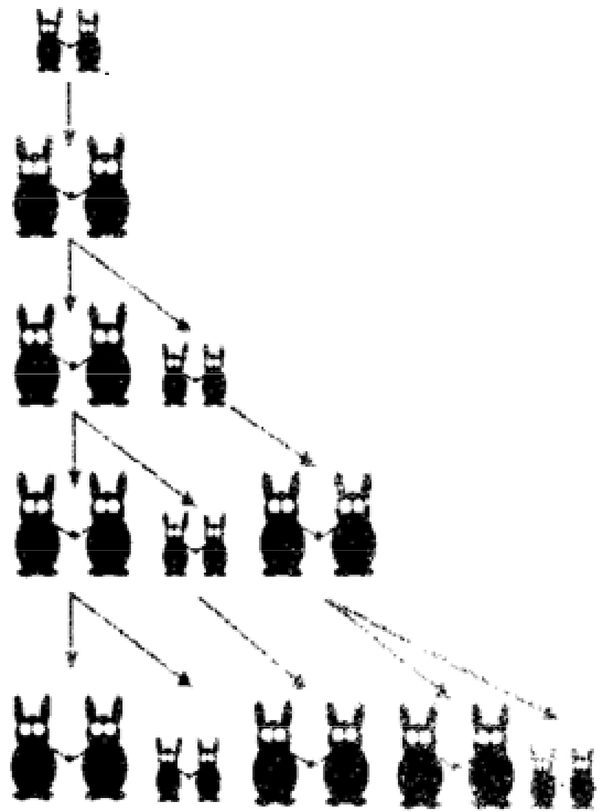
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonardo z Pisy, Leonardo Pisano, Leonardo Bigollo, Leonardo Bonacci, Fibonacci

(1170? – 1250?)



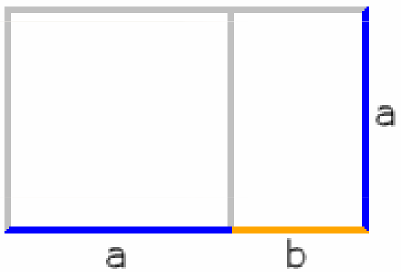
italský matematik
propagace arabských číslic v Evropě
Fibonacciova posloupnost
1202 – Liber abaci (Kniha o výpočtech)

Příklad:
Muž má v určitém uzavřeném místě pár králíků. Vypočítejte kolik tam bude za rok z tohoto páru králíků, pokud předpokládáme, že se za měsíc narodí další pár a ten se v dalším měsíci bude dál rozmnožovat stejným způsobem.

$$P_{n+1} = P_n + P_{n-1}; P_0 = 0; P_1 = 1;$$

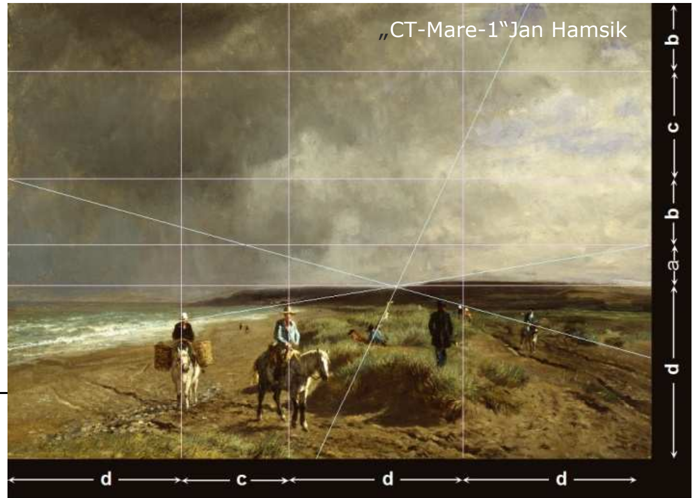
n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

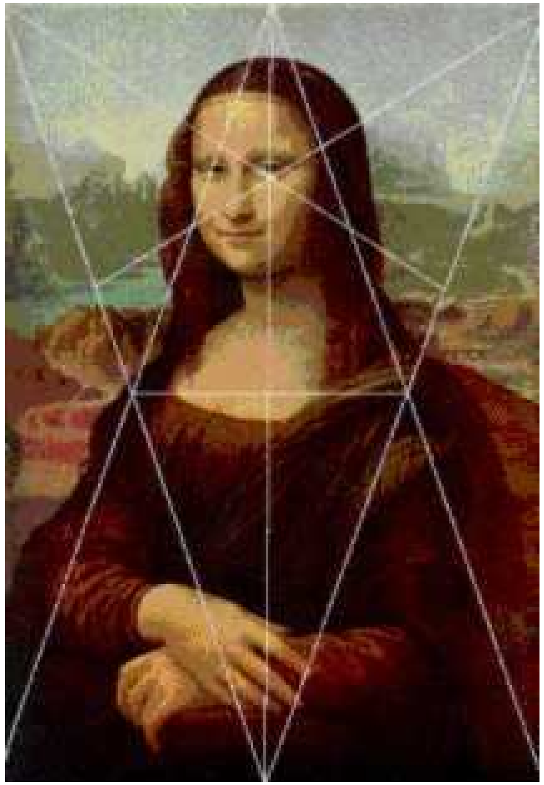
ODBOČKA – ZLATÝ ŘEZ

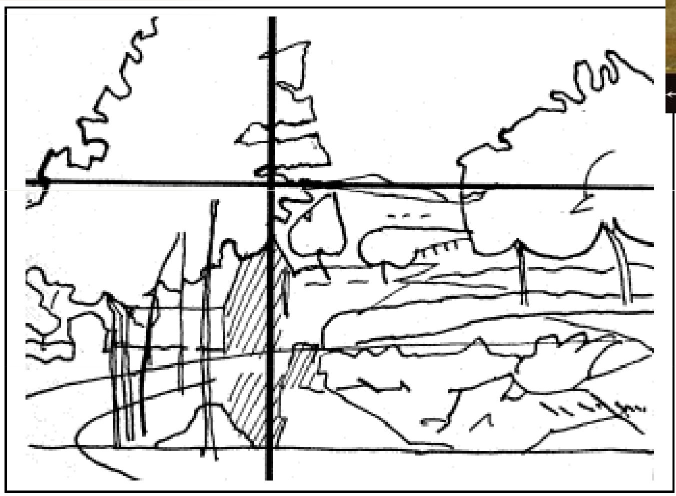


$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\ 033\ 988\ 749\ 894\ 848\ \ldots$$

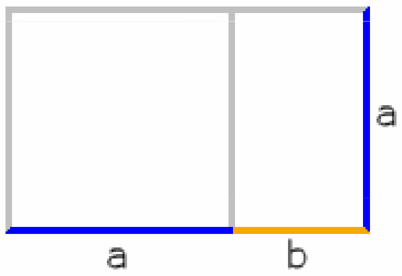






© Institut biostatistiky a analýz

ODBOČKA – ZLATÝ ŘEZ



$$\frac{b}{a} = \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{a}{b} = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618\,033\,988\,749\,894\,848\,\ldots$$

FIBONACCIOVA POSLOUPNOST

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
P_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233

poměr sousedních hodnot posloupnosti:

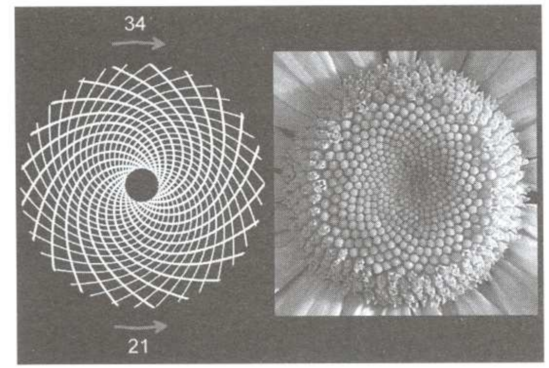
1/1 = 1,000 2/1 = 2,000 3/2 = 1,5 5/3 = 1,667 8/5 = 1,600
13/8 = 1,625 21/13 = 1,615 34/21 = 1,619 55/34 = 1,617

© Institut biostatistiky a analýz

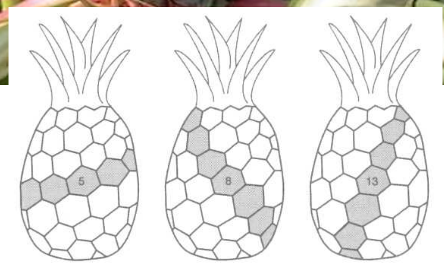
ODBOČKA – ZLATÝ ÚHEL

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\beta}{360°}$$


„Tournesol (4)“ Remi Jouan




„Pineapple1“MANOJTV en.wikipedia.org



počet korunních lístků	květina
3	iris,lilie
5	pryskyřník, orlíček, stračka, hvozdík, šípek
8	krásnoočko, stračka
13	cinerárie, aksamitník, přímětník
21	astra, čekanka
34	jitrocel, sedmikráska, kopretina
55	sedmikráska, slunečnice
89	sedmikráska, slunečnice
144	slunečnice

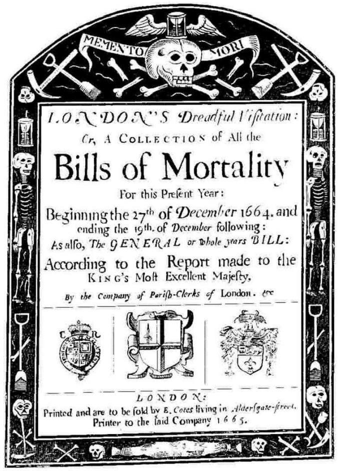
© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Sir **William Petty**
(1623–1687)
anglický ekonom, statistik a lékař,
profesor hudby, námořník a vynálezce

John Graunt
(1620–1674)
londýnský obchodník s galanterií

údaje o křtech a pohřbech v londýnské farnosti od roku 1592



Natural and Political Observations Made Upon the Bills of Mortality (1662)

celkem pět vydání až do roku 1676

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Caspar Neumann

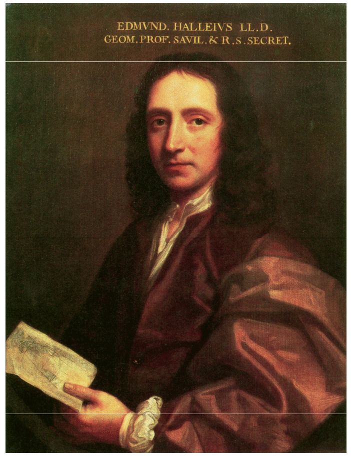
(1648 – 1715)

německý profesor a duchovní

shromáždil data o narození a úmrtí (včetně věku) ve Wroclavi v letech 1687-1691

"Reflexionen über Leben und Tod bey denen in Breslau Geborenen und Gestorbenen"

„An Estimate of the Degrees of the Mortality of Mankind, Drawn from Courious Tables of the Births and Funerals at the City of Breslaw, with an Attempt to Ascertain the Price of Annuities upon Lives" (1693)



Edmond Halley

(1656 – 1742)

anglický astronom, fyzik, geofyzik, matematik, meteorolog a demograf

na konci 17. století zkonstruoval první úmrtnostní tabulky na základě záznamů o úmrtích a porodech a odhadl předpokládané počty lidí v relativně uzavřené, stacionární populaci podle jednotlivých věkových skupin.

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

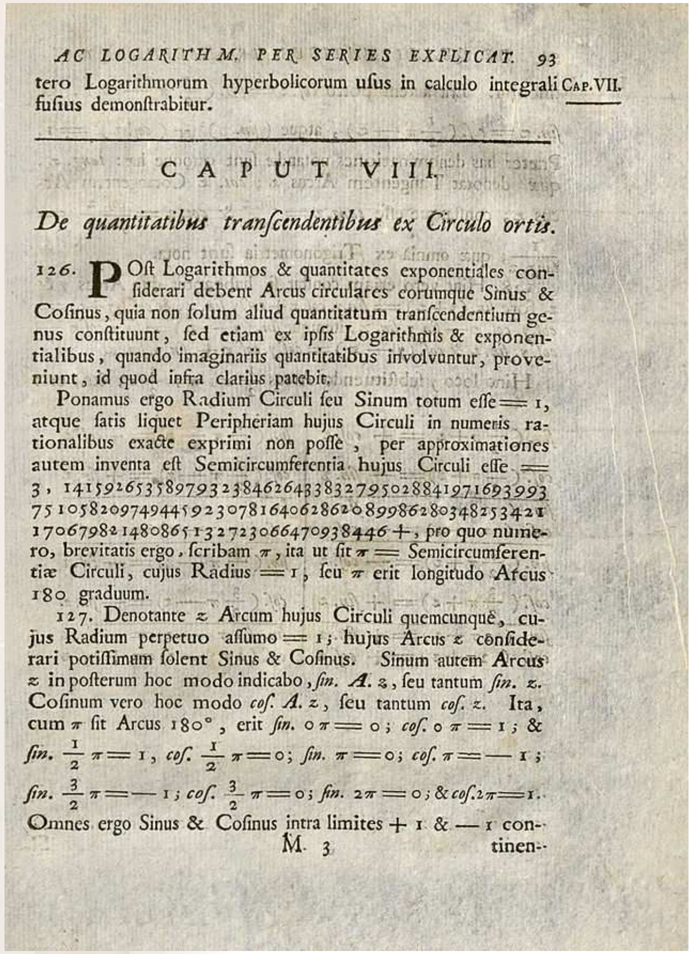
Leonhard Euler

(1707-1783)

švýcarský matematik (teorie čísel, algebra, nekonečné řady, elementární funkce, komplexní čísla, teorie grafů, diferenciální a integrální počet včetně rovnic, optimalizace, geometrie,…), fyzik (astronomie, pružnost, tekutiny, pevná tělesa,…), …

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler



AC LOGARITHM. PER SERIES EXPLICAT. 93

tero Logarithmorum hyperbolicorum ufus in calculo integrali fufius demonftrabitur. CAP. VII.

C A P U T V I I I.

De quantitatibus tranfcendentibus ex Circulo ortis.

126. POft Logarithmos & quantitates exponentiales confiderari debent Arcus circulares eorumque Sinus & Cofinus, quia non folum aliud quantitatum tranfcendentium genus conftituunt, fed etiam ex ipfis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli feu Sinum totum effe = 1, atque fatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poffe, per approximationes autem inventa eft Semicircumferentia hujus Circuli effe = 3, 1415926535897932384626433832795028841971693993 751058209749445923078164062862089986280348253421 170679821480865132723066470938446 +, pro quo numero, brevitatis ergo, fcribam π, ita ut fit π = Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius = 1, feu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo affumo = 1; hujus Arcus z confiderari potiffimum folent Sinus & Cofinus. Sinum autem Arcus z in pofterum hoc modo indicabo, *fin. A.* z, feu tantum *fin.* z. Cofinum vero hoc modo *cof. A.* z, feu tantum *cof.* z. Ita, cum π fit Arcus 180°, erit *fin.* $0\pi = 0$; *cof.* $0\pi = 1$; &

fin. $\frac{1}{2}\pi = 1$, *cof.* $\frac{1}{2}\pi = 0$; *fin.* $\pi = 0$; *cof.* $\pi = -1$;

fin. $\frac{3}{2}\pi = -1$; *cof.* $\frac{3}{2}\pi = 0$; *fin.* $2\pi = 0$; & *cof.* $2\pi = 1$.

Omnes ergo Sinus & Cofinus intra limites + 1 & − 1 continen-

M 3

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

v kapitole o exponenciálách a logaritmech měl šest příkladů – jeden s hudební aplikací, jeden finanční – splácení úročené půjčky, čtyři z populační dynamiky

$$P_{n+1} = (1+x).P_n,$$

kde n je celé číslo a růstový parametr x nabývá reálných kladných hodnot

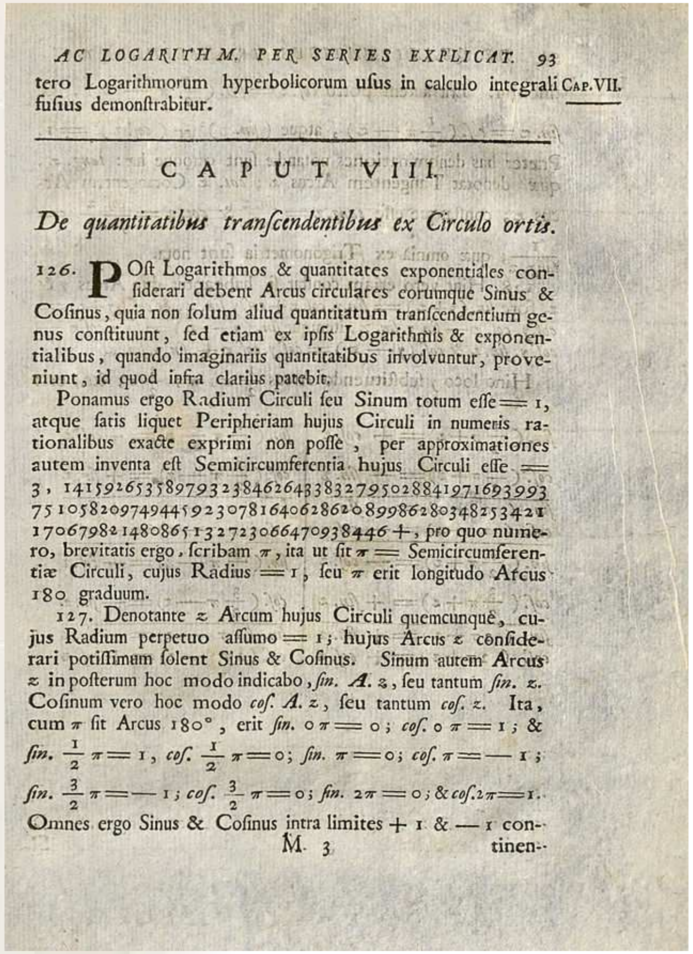
se zohledněním počáteční podmínky

$$P_n = (1+x)^n.P_0$$

(geometrický, resp. exponenciální růst)

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Leonhard Euler



AC LOGARITHM. PER SERIES EXPLICAT. 93

tero Logarithmorum hyperbolicorum uſus in calculo integrali fuſius demonſtrabitur. CAP. VII.

CAPUT VIII.

De quantitatibus tranſcendentibus ex Circulo ortis.

126. POſt Logarithmos & quantitates exponentiales conſiderari debent Arcus circulares eorumque Sinus & Coſinus, quia non ſolum aliud quantitatum tranſcendentium genus conſtituunt, ſed etiam ex ipſis Logarithmis & exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit.

Ponamus ergo Radium Circuli ſeu Sinum totum eſſe $= 1$, atque ſatis liquet Peripheriam hujus Circuli in numeris rationalibus exacte exprimi non poſſe, per approximationes autem inventa eſt Semicircumferentia hujus Circuli eſſe $= 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46+$, pro quo numero, brevitatis ergo, ſcribam π, ita ut ſit $\pi =$ Semicircumferentiæ Circuli, cujus Radius $= 1$, ſeu π erit longitudo Arcus 180 graduum.

127. Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo aſſumo $= 1$; hujus Arcus z conſiderari potiſſimum ſolent Sinus & Coſinus. Sinum autem Arcus z in poſterum hoc modo indicabo, *ſin. A. z*, ſeu tantum *ſin. z*. Coſinum vero hoc modo *coſ. A. z*, ſeu tantum *coſ. z*. Ita, cum π ſit Arcus 180°, erit $\sin. 0\pi = 0$; $\cos. 0\pi = 1$; & $\sin. \frac{1}{2}\pi = 1$, $\cos. \frac{1}{2}\pi = 0$; $\sin. \pi = 0$; $\cos. \pi = -1$; $\sin. \frac{3}{2}\pi = -1$; $\cos. \frac{3}{2}\pi = 0$; $\sin. 2\pi = 0$; & $\cos. 2\pi = 1$. Omnes ergo Sinus & Coſinus intra limites $+1$ & -1 con-

M 3 tinen-

Introductio in analysin infinitorum

(1748)

1. Pokud populace v určitém regionu poroste s rychlostí 1/30 a v určitém čase tam žije 100 000 obyvatel, jaká bude velikost populace za 100 let? (~ 2 654 874 osob)
2. Pokud se velikost populace po biblické Potopě redukovala na 6 osob a pokud předpokládáme, že za 200 let žilo na Zemi milión lidí, jaký byl roční přírůstek? (1/16 ~ 6,25 %)
3. Pokud by se každých sto let populace zdvojnásobila, jaký bude roční přírůstek? (1/144)
4. Pokud populace ročně poroste s rychlostí 1/100, za jak dlouho bude desetkrát tak velká?

JEDNODRUHOVÉ POPULACE

Modelování dynamiky jednodruhových populací je založeno na deterministickém způsobu chování populace, přičemž stav populace je charakterizován její velikostí.

Otázky, které mohou jednopopulační modely pomoci řešit jsou např.:

- ☑ jak dlouho potrvá, než populace dosáhne určité velikosti?
- ☑ jak veliká bude populace po určitém časovém intervalu, příp. po daném počtu generací?
- ☑ jak dlouho může populace přežít v nevhodných životních podmínkách?

© Institut biostatistiky a analýz

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Nechť x(t) označuje hodnotu populační hustoty v čase t. Potom stav populace v čase t+Δt je závislý na hodnotě x(t) v čase t modifikovaný procesy, které se v dané populaci odehrávají.

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d + \Delta x_m,$$

kde Δx_b znamená přírůstek za dobu Δt způsobený porodností, Δx_d úbytek způsobený úmrtností a Δx_m představuje změnu vyvolanou migrací. Protože Δx_m představuje jak nárůst, tak úbytek jedinců v populaci, zahrnuje se tento člen v jednodušších variantách modelu ke výrazům vyjadřujícím porodnost a úmrtnost. V takovém případě platí

$$x(t+\Delta t) = x(t) + \Delta x_b - \Delta x_d.$$

Je-li Δx_b počet jedinců, kteří se narodili za dobu Δt, pak platí

$$\Delta x_b = B(x,t).\ \Delta t$$

kde B(x,t) je *porodnost*, tj. počet jedinců, kteří se narodí za časovou jednotku. Podobně

$$\Delta x_d = D(x,t).\ \Delta t,$$

kde D(x,t) je *úmrtnost*, tj. počet jedinců, kteří za časovou jednotku zemřou.

© Institut biostatistiky a analýz

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Vztáhneme-li oba výše definované parametry ke stavu populace, získáváme relativní parametry,

tj. *relativní porodnost* $b(x,t) = B(x,t) / x(t)$

a *relativní úmrtnost* $d(x,t) = D(x,t) / x(t)$.

Pak

$$x(t+\Delta t) = x(t) + (b(x,t) - d(x,t)).x(t).\Delta t,$$

případně

$$\frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} = \gamma(x,t).x(t)$$

kde $\gamma(x,t) = b(x,t) - d(x,t)$ je obecná funkce vyjadřující základní dynamické charakteristiky daného populačního modelu.

V limitním případě, kdy $\Delta t \to 0$, můžeme psát

$$x'(t) = \gamma(x,t).x(t),$$

což je obecné deterministické vyjádření dynamiky stavu populace x(t) za předpokladu, že tento stav můžeme popsat spojitou funkcí.

POPULAČNÍ BIOLOGIE

JEDNODRUHOVÁ POPULACE

Stav populace x(t) můžeme popsat spojitou funkcí (z biologického hlediska), když:

- populace x(t) je natolik velká, že není třeba počítat s jednotlivci (*kvantovací podmínka*);
- generace v populaci x(t) se překrývají, resp. všechny jedinci v populaci jsou identičtí (neexistuje věkové rozlišení), tj. populace je homogenní z hlediska jedinců v produkčním věku (*vzorkovací podmínka*) - zatímco populace bakterií, příp. vyšších živočichů (obratlovců) tuto podmínku zpravidla splňují, u populací hmyzu nebo např. jednoletých rostlin nastávají problémy.

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

Thomas Robert Malthus

(1766 – 1834)

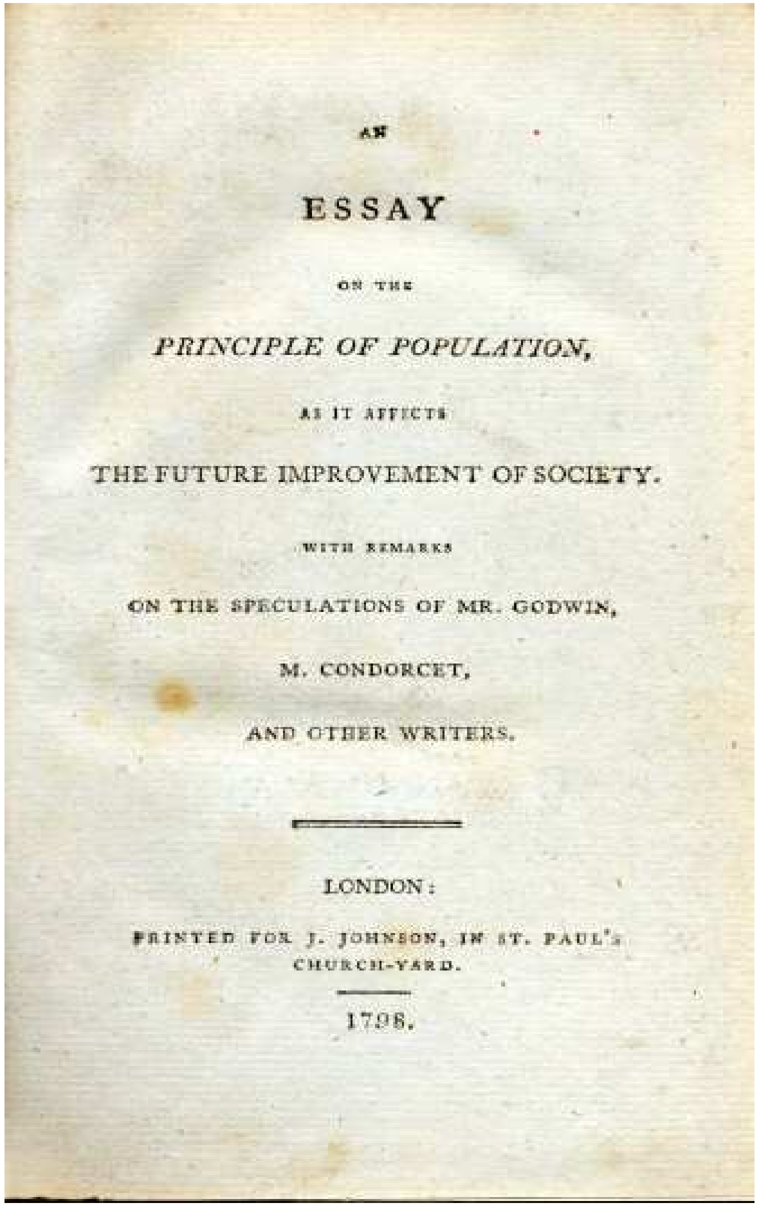
anglický duchovní a ekonom

Malthusova rovnice

$$x'(t) = r.x(t)$$

řešení:

$$x(t) = x_0.e^{rt}$$



AN

ESSAY

ON THE

PRINCIPLE OF POPULATION,

AS IT AFFECTS

THE FUTURE IMPROVEMENT OF SOCIETY.

WITH REMARKS

ON THE SPECULATIONS OF MR. GODWIN,

M. CONDORCET,

AND OTHER WRITERS.

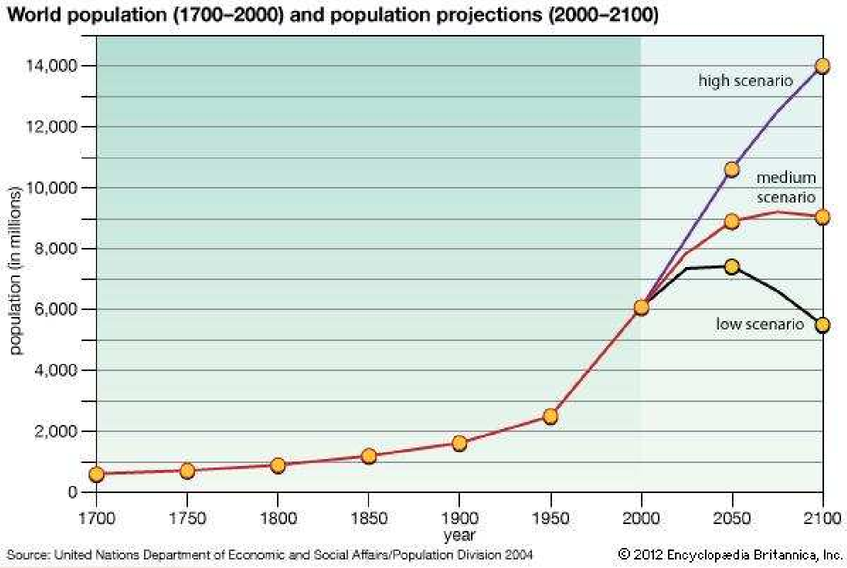
LONDON:

PRINTED FOR J. JOHNSON, IN ST. PAUL'S CHURCH-YARD.

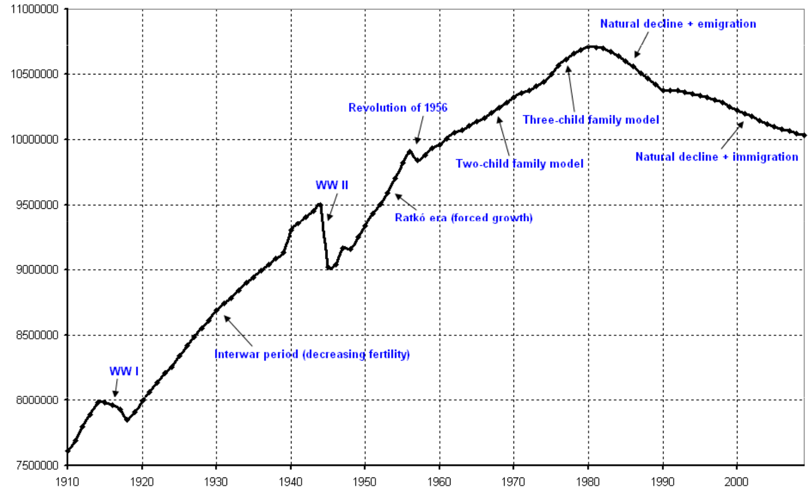
1798.

© Institut biostatistiky a analýz

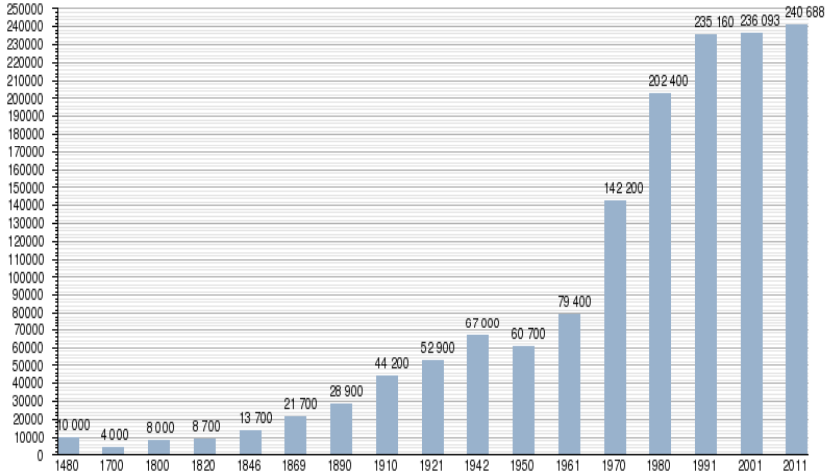
POPULAČNÍ BIOLOGIE



svět

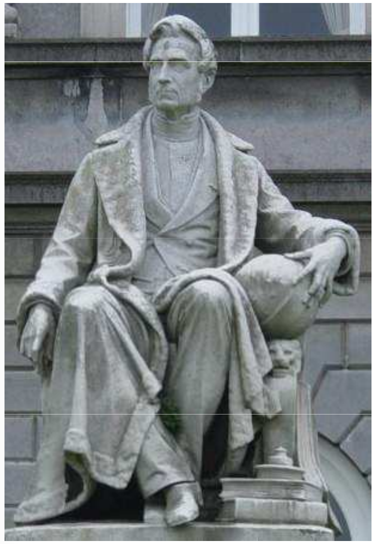


Maďarsko



Košice

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom, matematik, statistik, demograf, sociolog, kriminolog

„Sur l'homme et le développement de ses facultés" (1835)

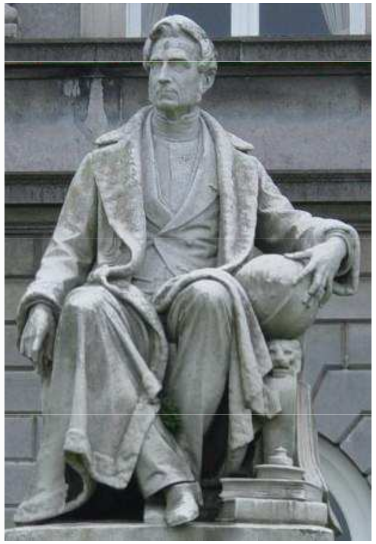
překážky růstu populace reprezentují „odpor", který je úměrný druhé mocnině rychlosti růstu populace

Body Mass Index (1830 – 1850)

$$BMI = \frac{m[kg]}{v^2[m]}$$

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE



Adolphe Quetelet

(1796 – 1874)

belgický meteorolog, astronom, matematik, statistik, demograf, sociolog, kriminolog

„Sur l'homme et le développement de ses facultés" (1835)

překážky růstu populace reprezentují „odpor", který je úměrný druhé mocnině rychlosti růstu populace

Pierre-Francois Verhulst

(1804 – 1849)

belgický matematik

"Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement". ***Correspondance mathématique et physique*** **10,(1838):113–121.**

$$\frac{dN}{dt} = rN\left(1 - \frac{N}{K}\right)$$

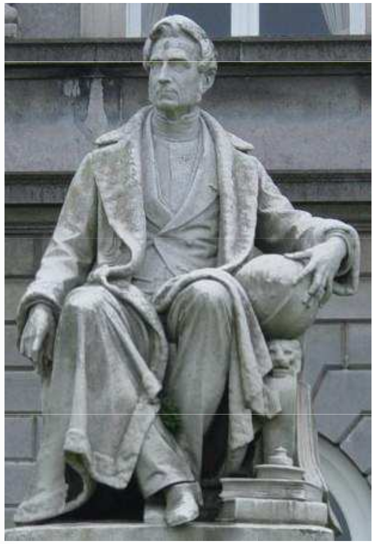
řešení:

$$N(t) = \frac{K}{1 + CKe^{-rt}}$$

kde $C = 1/N_0 - 1/K$

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

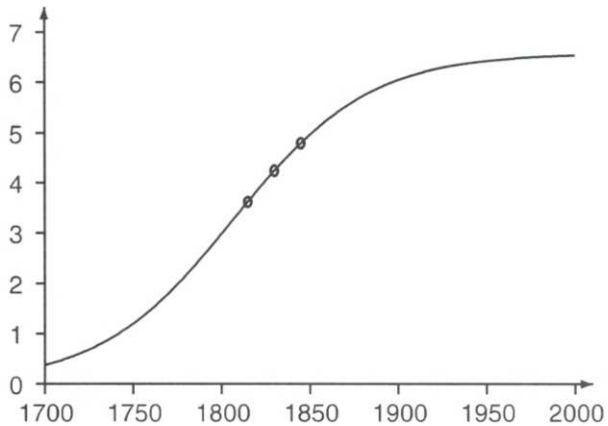


Adolphe Quetelet
(1796 – 1874)
belgický meteorolog, astronom, matematik, statistik, demograf, sociolog, kriminolog

„Sur l'homme et le développement de ses facultés“ (1835)

překážky růstu populace reprezentují „odpor“, který je úměrný druhé mocnině rychlosti růstu populace

Pierre-Francois Verhulst
(1804 – 1849)



počet obyvatel Belgie 2013:

$11{,}2 . 10^6$

POPULAČNÍ BIOLOGIE

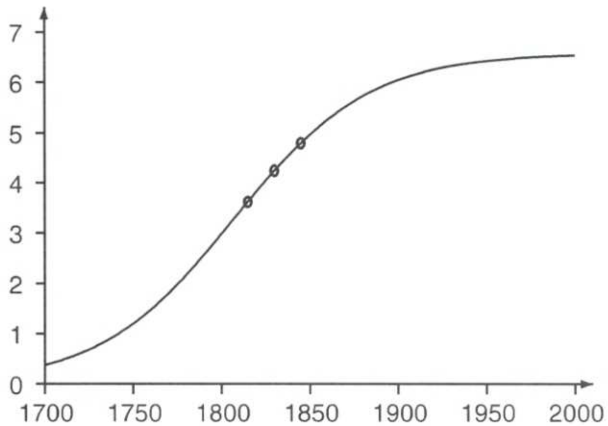
Pierre-Francois Verhulst
(1804 – 1849)

rovnice byla znovu publikována v roce 1920 Raymondem Pearlem and Lowellem Reedem

⇓

Pearlova – Verhulstova rovnice ☺

logistická rovnice



počet obyvatel Belgie 2013:

$11{,}2.10^6$

© Institut biostatistiky a analýz

INTERAKCE DVOU POPULACÍ

mutualismus	+	+	obě populace mají ze společného soužití prospěch (symbióza)
dravec-kořist	+	-	jedna populace prospívá, druhá chřadne (parazit x hostitel, býložravec x rostlina, zaměstnavatel x zaměstnanec, aj.)
konkurence	-	-	obě populace vzájemným kontaktem trpí
komensalismus	+	0	jeden druh se živí zbytky potravy druhého, neškodné příživnictví
amensalismus	-	0	
neutralismus	0	0	oba zúčastněné druhy se nepodílí na vzájemné látkové výměně

© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL DRAVEC – KOŘIST
MODEL LOTKY – VOLTERRY

© Institut biostatistiky a analýz

MODEL DRAVEC – KOŘIST
MODEL LOTKY – VOLTERRY

Alfred James Lotka
(1880 – 1949)
americký matematik, statistik, fyzikální chemik
snažil se uplatnit fyzikální přístupy a modely v živých vědách

Vito Volterra
(1860 – 1940)
italský matematik a fyzik
"Signor Scienza Italiana"

© Institut biostatistiky a analýz

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Předpokládejme, že Δx_n je počet kořistí, které se narodily v časovém intervalu $\langle t, \Delta t\rangle$. Dále předpokládejme, že tato hodnota je úměrná počtu kořistí x(t) v čase t, délce časového intervalu Δt a relativní porodnosti k_1 kořistí. To znamená, že přírůstek do populace kořisti bude respektovat Malthusův model populační dynamiky

$$\Delta x_n = k_1.x(t).\Delta t.$$

Dále, nechť počet kořistí Δx_m ulovených y(t) dravci během časového intervalu $\langle t, \Delta t\rangle$ je úměrný počtu vzájemných setkání jedinců obou druhů a délce časového intervalu Δt

$$\Delta x_m = k_2.x(t).y(t).\Delta t ,$$

kde konstanta k_2 vyjadřuje pravděpodobnost, že setkání dravce s kořistí skončí zahubením kořisti. Tato konstanta může také vyjádřit spotřebu či potřebu dravců.

Celkovou změnu stavu populace kořistí za dobu Δt lze tedy určit rozdílem

$$\Delta x_n - \Delta x_m = k_1.x(t).\Delta t.- k_2.x(t).y(t).\Delta t. = [k_1.x(t) - k_2.x(t).y(t)].\Delta t.$$

© Institut biostatistiky a analýz

MODEL LOTKY – VOLTERRY

Nyní předpokládejme, že počet narozených dravců Δy_n během doby Δt je úměrný počtu vzájemných setkání dravců a kořistí a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_n = k_2.k_3.x(t).y(t).\Delta t\ ,$$

kde k_3 je konstanta vyjadřující účinnost přeměny biomasy kořisti na biomasu dravce.

Konečně, nechť úbytek v populaci dravců Δy_m je opět dán Malthusovým modelem populační dynamiky, tj. je úměrný stavu populace dravců y(t) v čase t a délce časového intervalu Δt

$$\Delta y_m = k_4.y(t).\Delta t,$$

kde konstanta úměrnosti k_4 reprezentuje relativní úmrtnost dravců.

Za těchto předpokladů, je celková změna v populaci dravců dána vztahem

$$\Delta y_n - \Delta y_m = [k_2.k_3.x(t).y(t) - k_4.y(t)].\Delta t.,$$

a v limitním případu pro $\Delta t \rightarrow 0$ můžeme psát soustavu

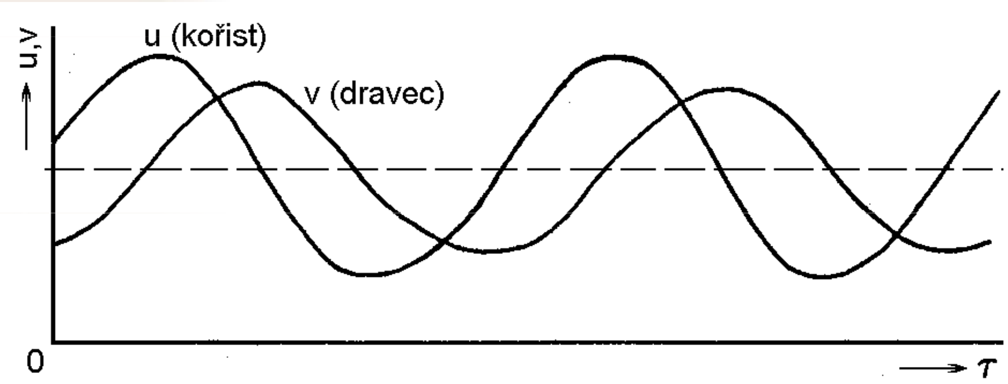
$$x'(t) = k_1.x(t) - k_2.x(t).y(t)$$

$$y'(t) = k_2.k_3.x(t).y(t) - k_4.y(t)$$

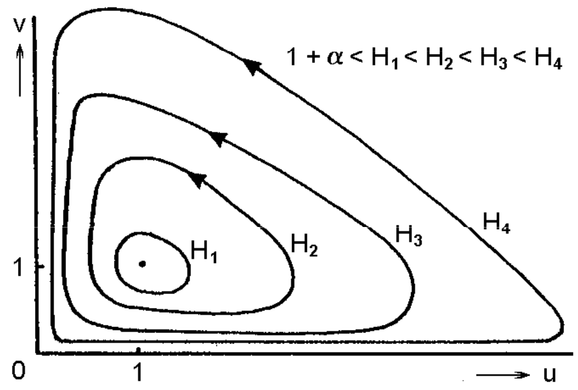
© Institut biostatistiky a analýz

POPULAČNÍ BIOLOGIE

MODEL LOTKY – VOLTERRY



Typické časové průběhy normalizovaných veličin modelu Lotky - Volterry

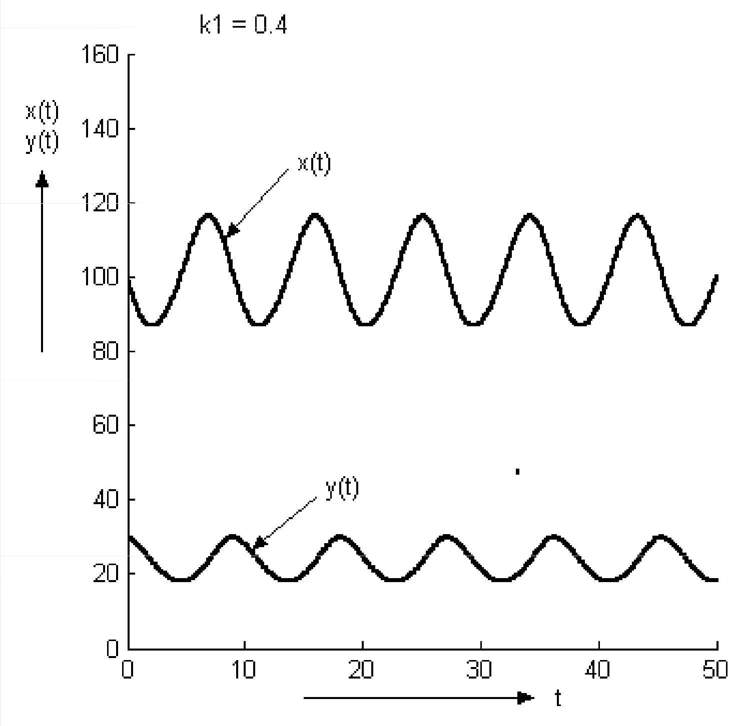


Stavové trajektorie normalizovaného modelu Lotky - Volterry

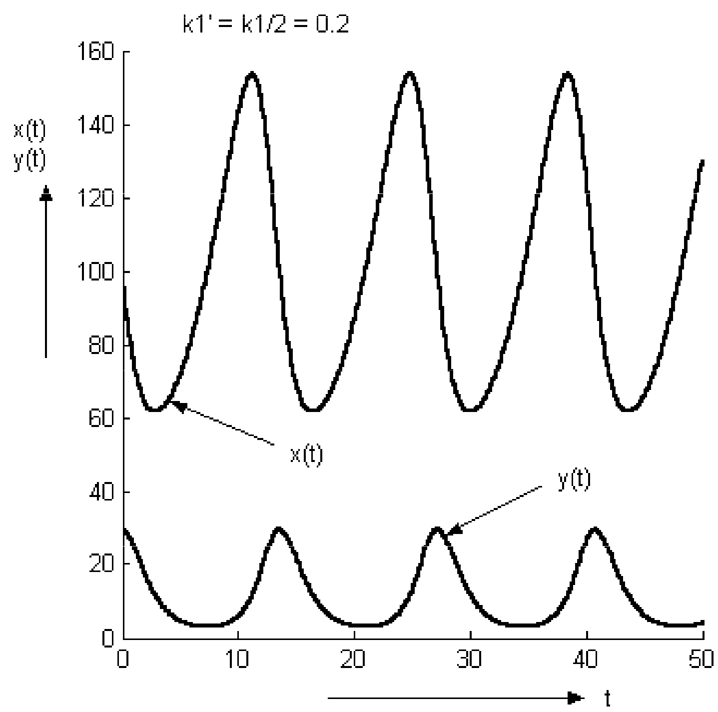
MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

vliv omezení porodnosti kořisti na celkový stav populace dravec x kořist



výsledky simulace s původními hodnotami parametrů



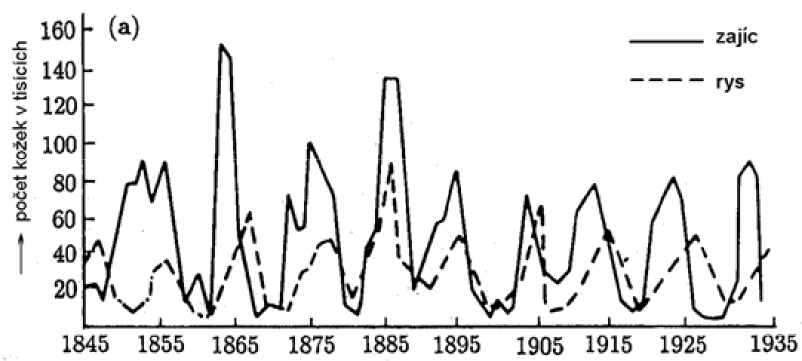
výsledky simulace s poloviční hodnotou parametru k_1 oproti hodnotě původní

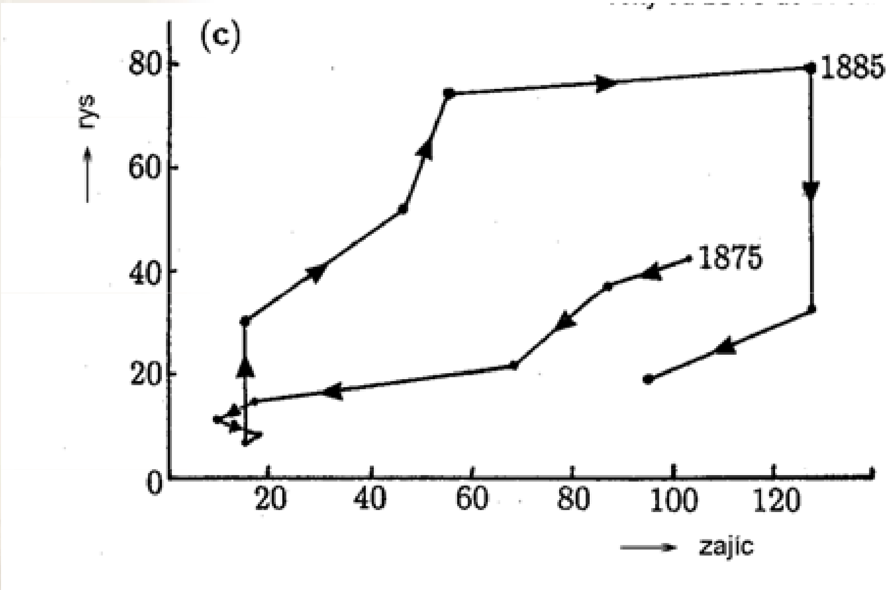
© Institut biostatistiky a analýz

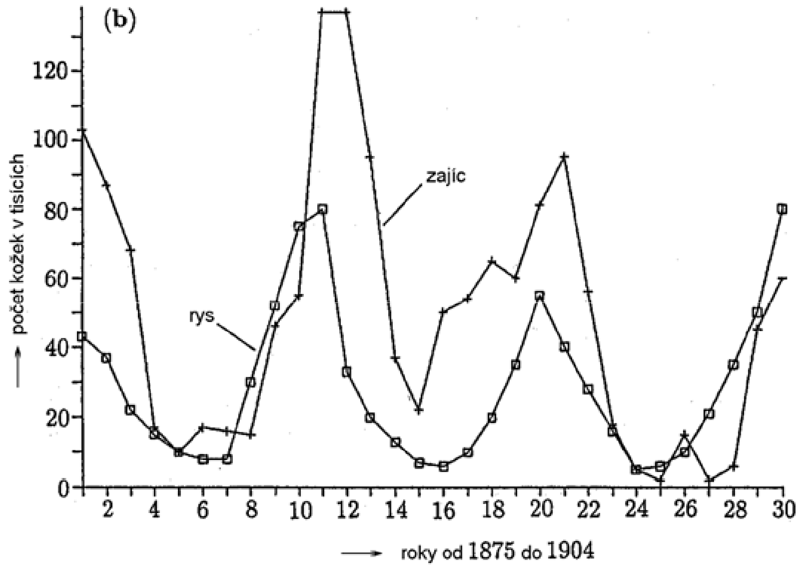
MODEL LOTKY – VOLTERRY

PŘÍKLADY ZE ŽIVOTA

výklad dynamiky populace rysů a zajíců v Hudson Bay v letech 1845 - 1930







© Institut biostatistiky a analýz

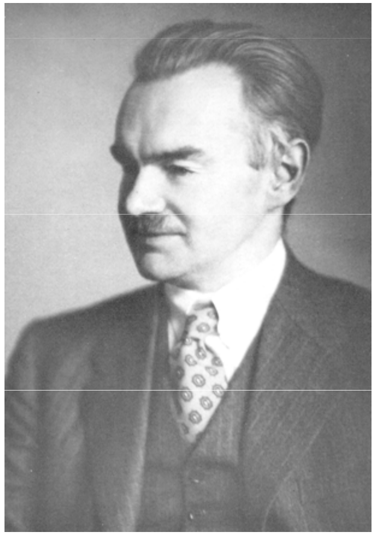
EPIDEMIOLOGIE

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB

KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)

Anderson Gray McKendrick
(1876 –1943)

skotský lékař, fyziolog a epidemiolog
jeden z prvních, kteří zaváděli matematické metody do epidemiologie



William Ogilvy Kermack
(1898 – 1970)

skotský matematik a statistik

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB

KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)

$$\boxed{S(t)} \xrightarrow{r} \boxed{I(t)} \xrightarrow{a} \boxed{R(t)}$$

- nárůst infikovaných jedinců je úměrný počtu ohrožených a infikovaných jedinců, tj. ~ $r.S(t).I(t)$, kde $r > 0$ je konstantou úměrnosti. Ohrožených osob stejnou rychlostí ubývá.
- rychlost s jakou ubývá infikovaných jedinců (vyléčením, úmrtím) je úměrná počtu infikovaných osob, tj. ~ $a.I(t)$.
- inkubační doba je zanedbatelná;
- populace je natolik velká, že vyvolané změny lze považovat za spojité.

$$
\begin{aligned}
S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0\ ; \\
I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0\ ; \\
R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0,
\end{aligned}
$$

© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB

KERMACKŮV – McKENDRICKŮV MODEL (1927)

$$\boxed{S(t)} \xrightarrow{r} \boxed{I(t)} \xrightarrow{a} \boxed{R(t)}$$

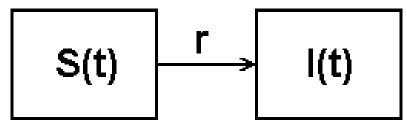
základní otázkou jakékoliv epidemiologické situace je, zda se bude pro dané parametry modelu (společnosti) a počáteční výchozí podmínky nákaza šířit a jak;

- ❖ jak vážná bude epidemie, tj. jaké maximální hodnoty nabude stav skupiny infikovaných;
- ❖ jak se bude vyvíjet stav kategorie R, zejména, je-li choroba smrtelná, apod.

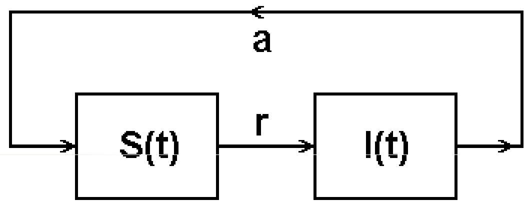
$$\begin{aligned} S'(t) &= -r.S(t).I(t), & S(0) &= S_0 > 0\ ; \\ I'(t) &= r.S(t).I(t) - a.I(t), & I(0) &= I_0 > 0\ ; \\ R'(t) &= a.I(t), & R(0) &= R_0 = 0, \end{aligned}$$

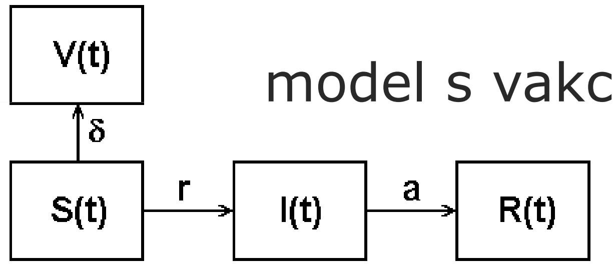
© Institut biostatistiky a analýz

MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB
DALŠÍ VARIANTY



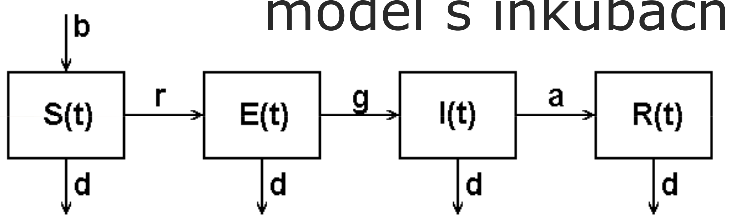
model bez získané rezistence



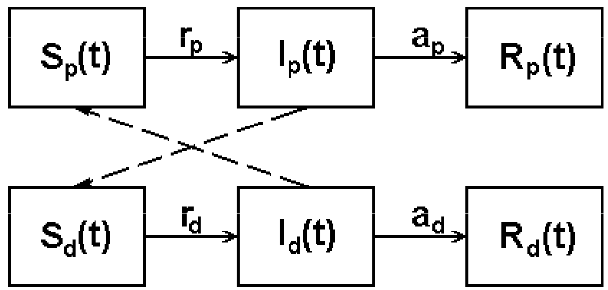


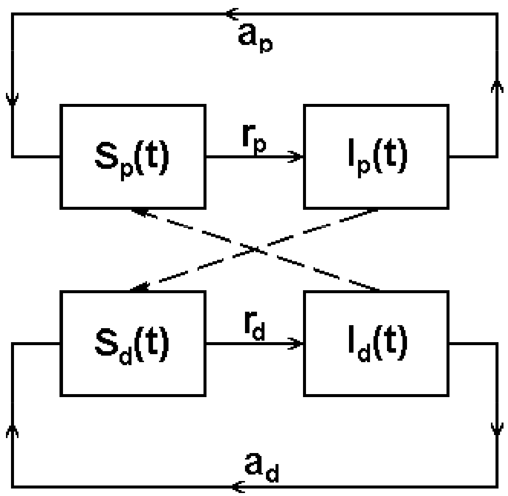
model s vakcinací

model s inkubační dobou



modely venerických chorob



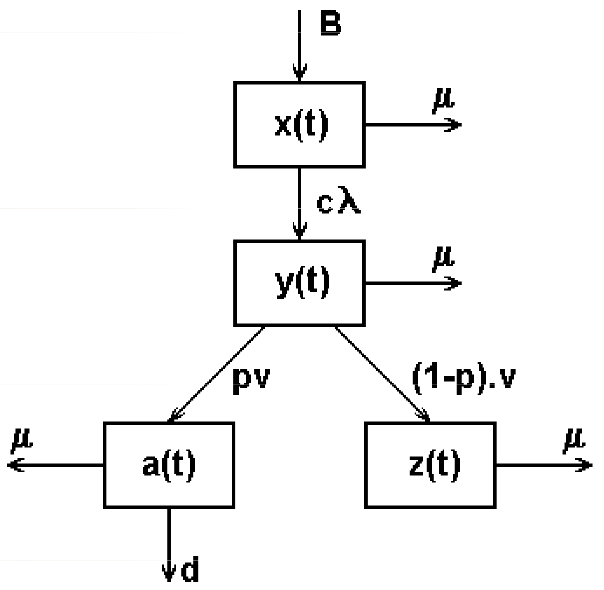


© Institut biostatistiky a analýz

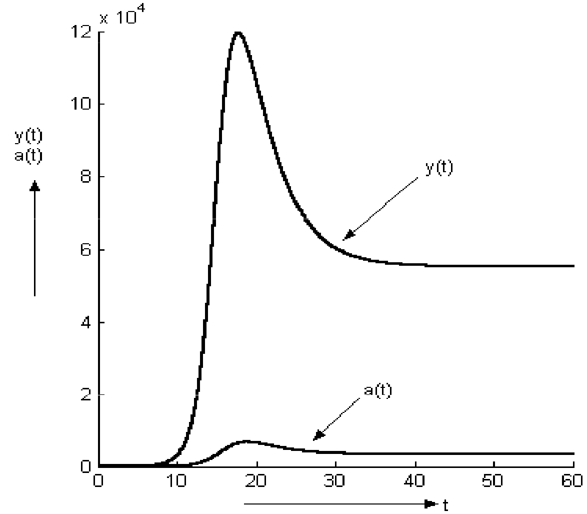
EPIDEMIOLOGIE

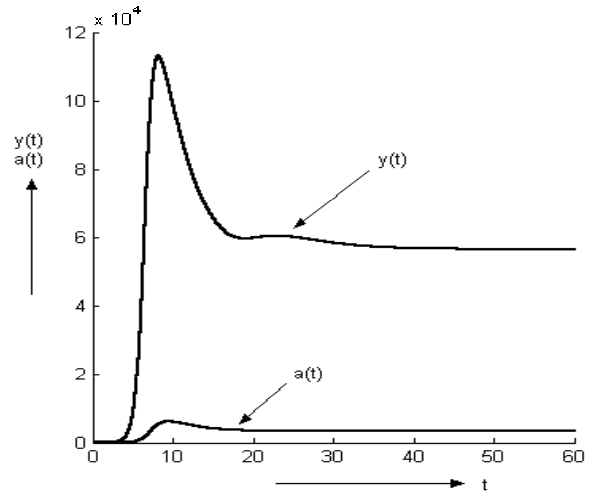
MATEMATICKÉ MODELY ŠÍŘENÍ INFEKČNÍCH CHOROB
DALŠÍ VARIANTY

MODEL AIDS



x(t), y(t), a(t) a z(t) udávají počet zdravých, infikovaných, nemocných AIDS a séropozitivních, ale neinfekčních osob





dvojnásobný počet sexuálních partnerů

© Institut biostatistiky a analýz

ZA DVA TÝDNY NA SHLEDANOU

(V TOMTO SEMESTRU NAPOSLED)

© Institut biostatistiky a analýz