SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTÉMY (ČASOVÉ ŘADY)

prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

UKB, A29 – RECETOX, dv.č.112
holcik@iba.muni.cz

II. ČASOVÉ ŘADY
(SIGNÁLY)
ZÁKLADNÍ POJMY
dokončení

MU
IBA

ZÁKLADNÍ KONCEPT

REÁLNÝ OBJEKT

PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH

HODNOTÍCÍ „VÝROK"

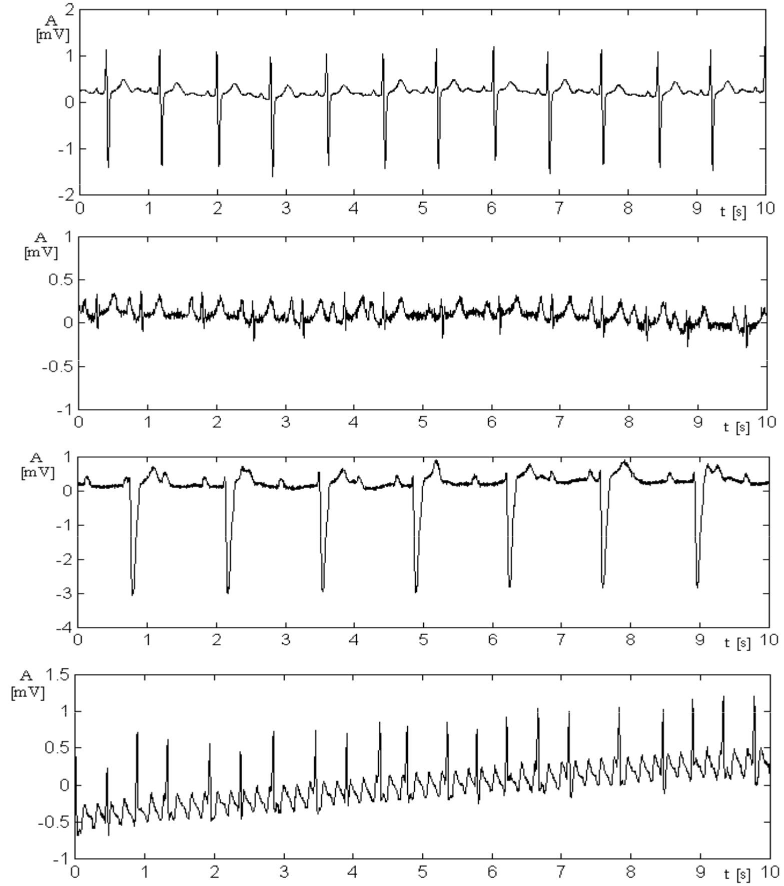
CÍLEM JE ODHALIT TEN PŘÍČINNÝ DETERMINISTICKÝ VZTAH NAVZDORY VŠEMU TOMU, CO NÁM TO ODHALENÍ KAZÍ

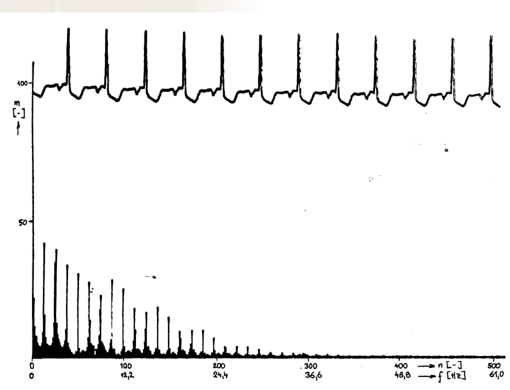
SKLADBA DAT

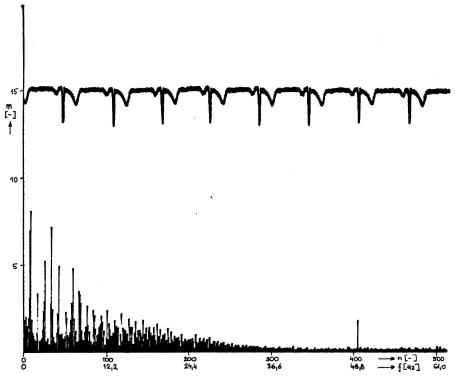
- ☑ matematický model deterministické složky(složek)
  - zkoumáme jak data odpovídají modelové představě

SKLADBA DAT

- matematický model deterministické složky(složek)
  - nelineární
  - lineární
    - časová (primární) oblast
    - frekvenční (sekundární) oblast
    - …

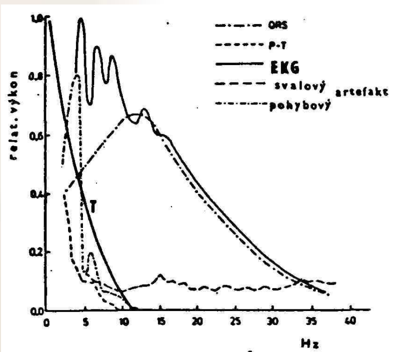


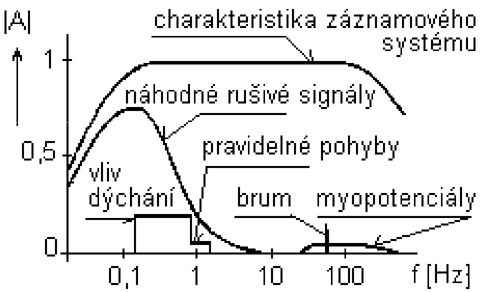


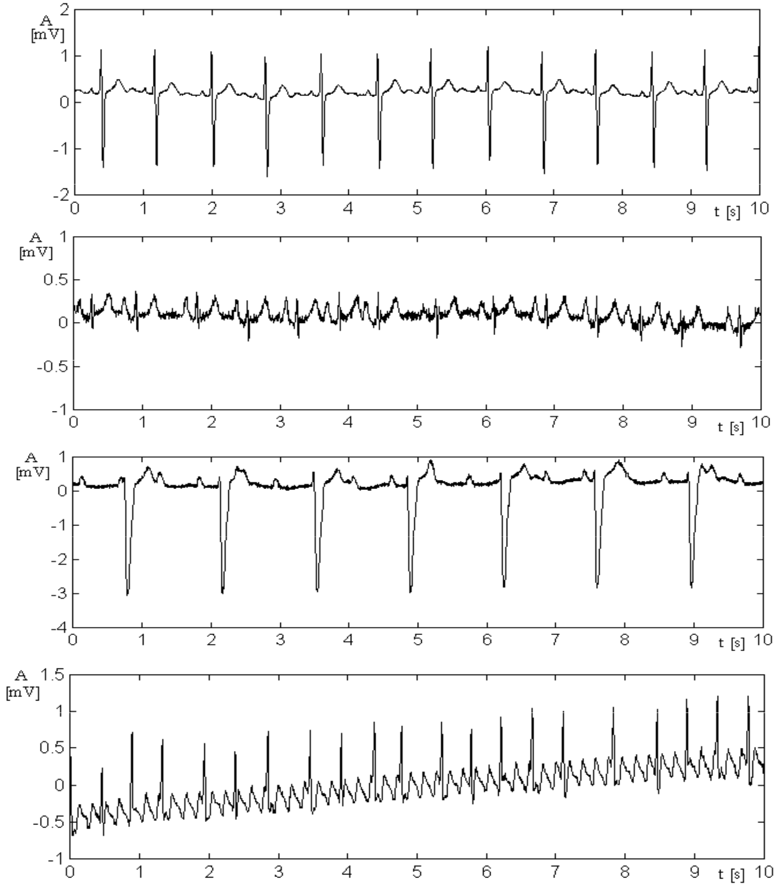


SKLADBA DAT

- ☑ matematický model deterministické složky(složek)
  - ❑ nelineární
  - ❑ lineární
    - ➢ časová (primární) oblast
    - ➢ frekvenční (sekundární) oblast
    - ➢ …







SKLADBA DAT

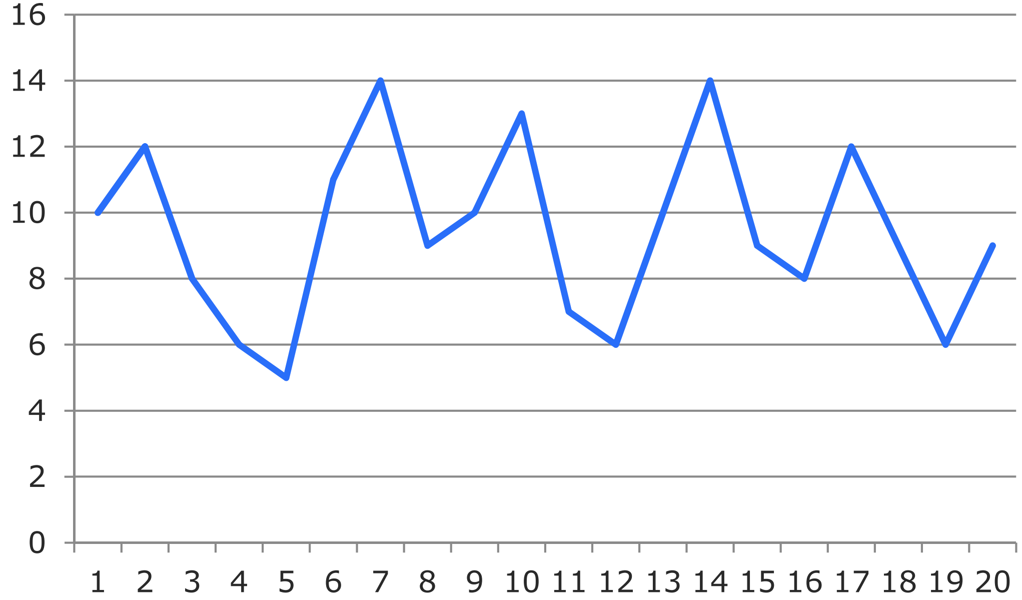
- model deterministické složky(složek);
  - nelineární
  - lineární
    - časová oblast
    - frekvenční oblast
    - …
- model nedeterministické složky
  - pravděpodobnostní
  - fuzzy
  - hrubý
  - …

III. ČASOVÉ ŘADY

PŘÍKLAD TAK TROCHU NA VYSVĚTLENOU

ZADÁNÍ

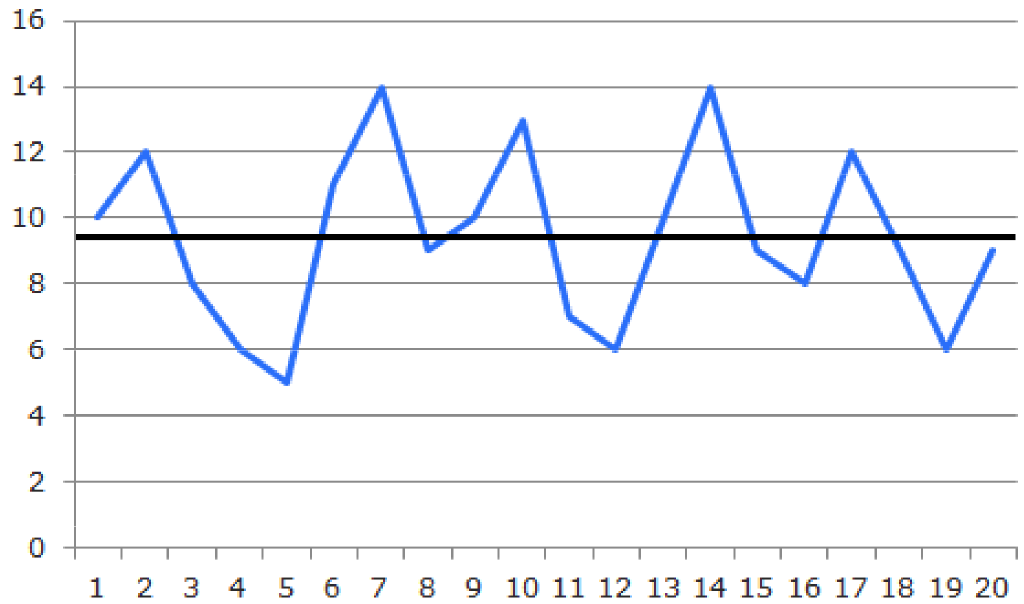
10 12 8 6 5 11 14 9 10 13 7 6 10 14 9 8 12 9 6 9



ZADÁNÍ

- průměrná hodnota:

$$\bar{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k) = \sum_{k=1}^{N}\frac{1}{N}\cdot x(k) = \sum_{k=1}^{N} a_n \cdot x(k)$$



ZADÁNÍ

- ☑ průměrná hodnota:

$$\overline{x} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x(k) = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{N} \cdot x(k) = \sum_{k=1}^{N} a_n \cdot x(k)$$

- ☑ klouzavý průměr:

pro M liché

$$\overline{x}(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=k-(m-1)\operatorname{div}2}^{k+(m-1)\operatorname{div}2} x(k) = \sum_{i=k-(m-1)\operatorname{div}2}^{k+(m-1)\operatorname{div}2} \frac{1}{m} \cdot x(k) = \sum_{i=k-(m-1)\operatorname{div}2}^{k+(m-1)\operatorname{div}2} a_m \cdot x(k)$$

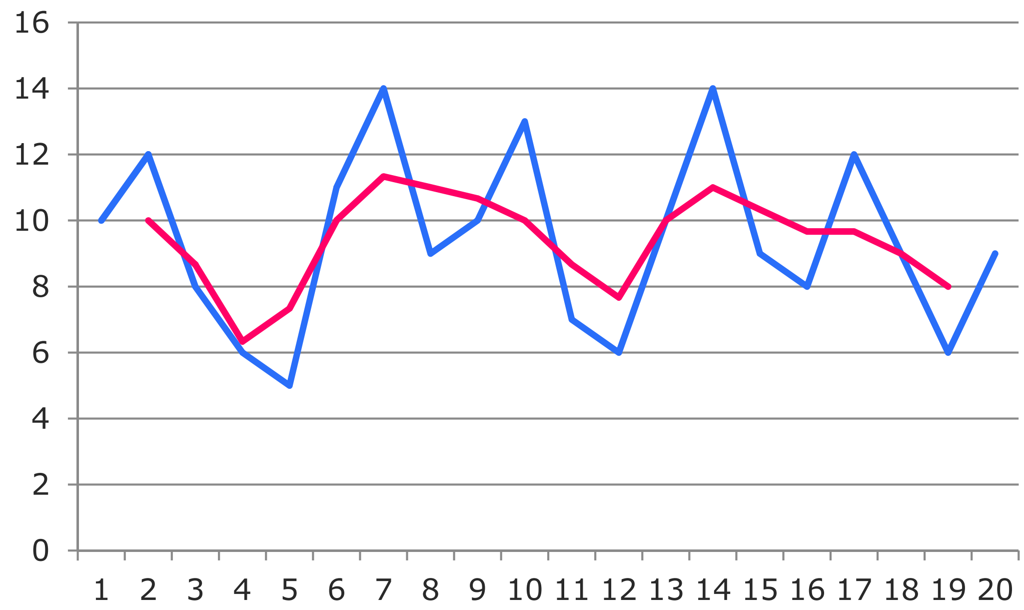
pro M sudé třeba

$$\overline{x}(k) = \frac{1}{m}\sum_{i=-m\operatorname{div}2+1}^{(m\operatorname{div}2)} x(k-i) = \sum_{i=-m\operatorname{div}2+1}^{(m\operatorname{div}2)} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=-m\operatorname{div}2+1}^{(m\operatorname{div}2)} a_i \cdot x(k-i)$$

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	
2	12	10,0
3	8	8,7
4	6	6,3
5	5	7,3
6	11	10,0
7	14	11,3
8	9	11,0
9	10	10,7
10	13	10,0
11	7	8,7
12	6	7,7
13	10	10,0
14	14	11,0
15	9	10,3
16	8	9,7
17	12	9,7
18	9	9,0
19	6	8,0
20	9	

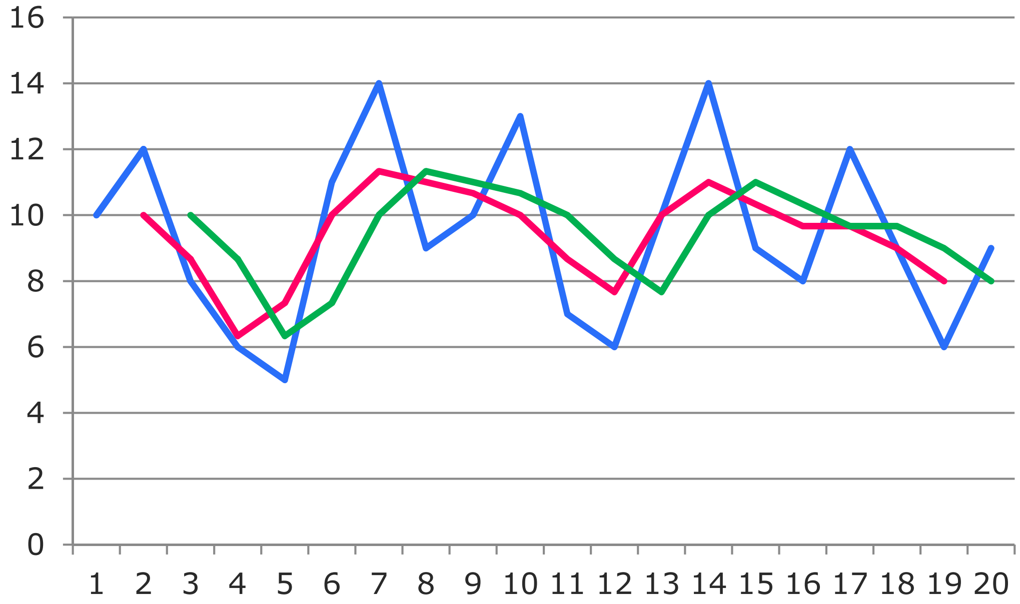


KLOUZAVÝ PRŮMĚR

m = 3

1	10	?	?
2	12	10,0	?
3	8	8,7	10,0
4	6	6,3	8,7
5	5	7,3	6,3
6	11	10,0	7,3
7	14	11,3	10,0
8	9	11,0	11,3
9	10	10,7	11,0
10	13	10,0	10,7
11	7	8,7	10,0
12	6	7,7	8,7
13	10	10,0	7,7
14	14	11,0	10,0
15	9	10,3	11,0
16	8	9,7	10,3
17	12	9,7	9,7
18	9	9,0	9,7
19	6	8,0	9,0
20	9	?	8,0

přechodný děj

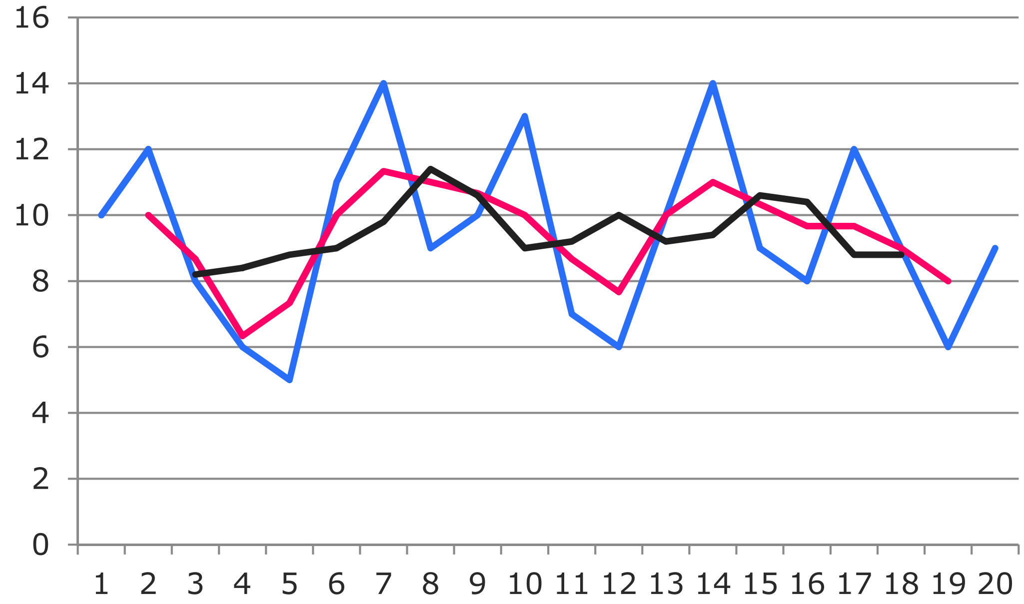


$$\bar{x}(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i)$$

KAUZALITA ≡
≡ PŘÍČINNOST

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

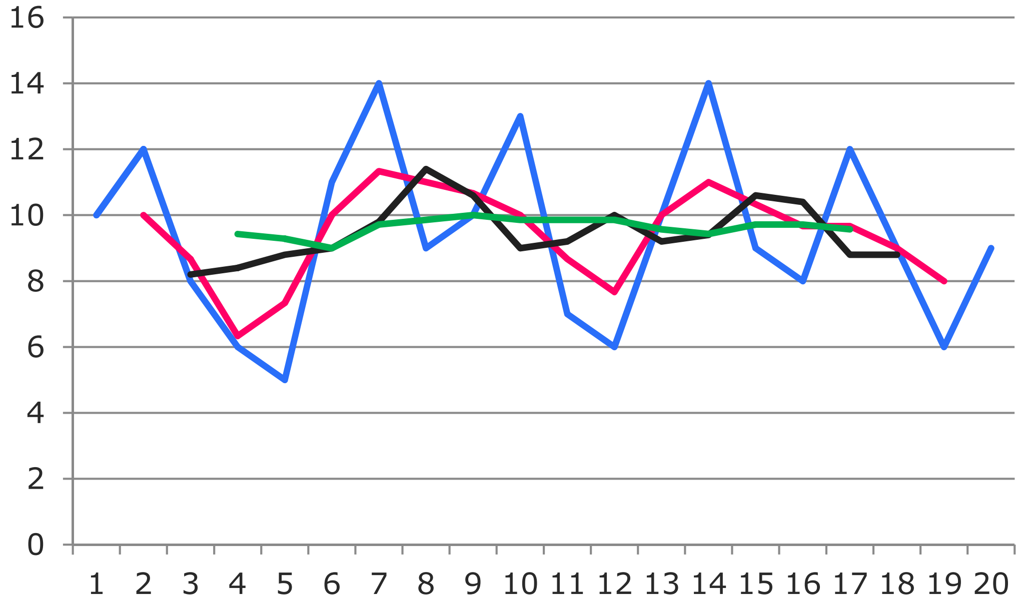
		m = 3	m = 5
1	10		
2	12	10,0	
3	8	8,7	8,2
4	6	6,3	8,4
5	5	7,3	8,8
6	11	10,0	9,0
7	14	11,3	9,8
8	9	11,0	11,4
9	10	10,7	10,6
10	13	10,0	9,0
11	7	8,7	9,2
12	6	7,7	10,0
13	10	10,0	9,2
14	14	11,0	9,4
15	9	10,3	10,6
16	8	9,7	10,4
17	12	9,7	8,8
18	9	9,0	8,8
19	6	8,0	
20	9		



a = (1/5, 1/5, 1/5, 1/5, 1/5)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

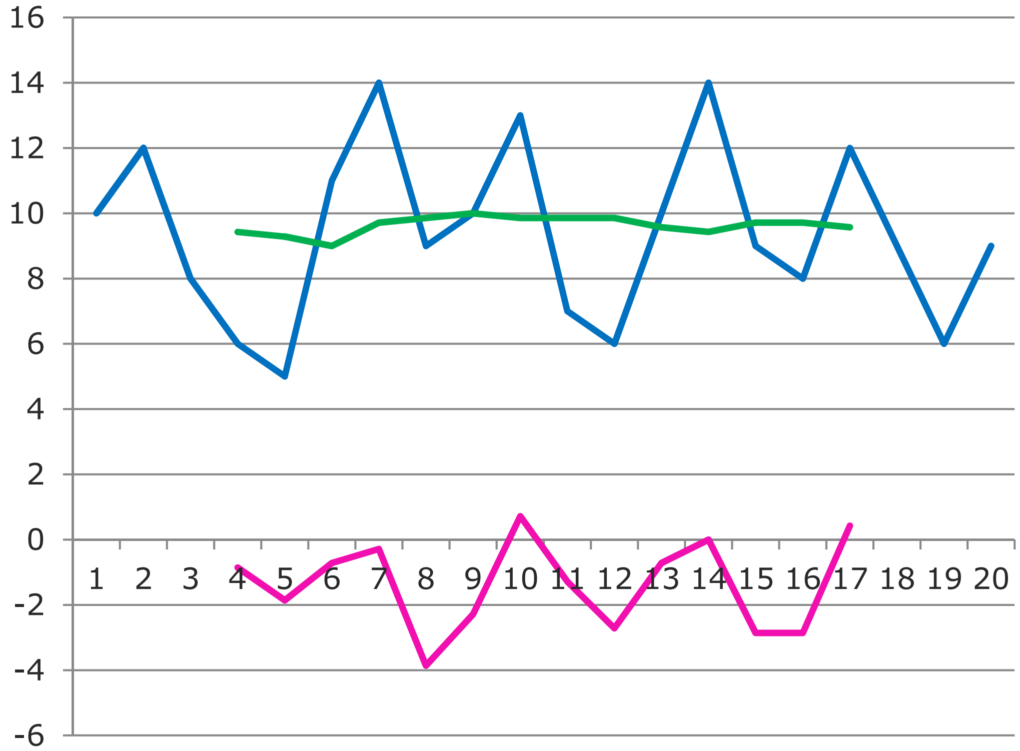
		m = 3	m = 5	m = 7
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7	8,2	
4	6	6,3	8,4	9,4
5	5	7,3	8,8	9,3
6	11	10,0	9,0	9,0
7	14	11,3	9,8	9,7
8	9	11,0	11,4	9,9
9	10	10,7	10,6	10,0
10	13	10,0	9,0	9,9
11	7	8,7	9,2	9,9
12	6	7,7	10,0	9,9
13	10	10,0	9,2	9,6
14	14	11,0	9,4	9,4
15	9	10,3	10,6	9,7
16	8	9,7	10,4	9,7
17	12	9,7	8,8	9,6
18	9	9,0	8,8	
19	6	8,0		
20	9			



a = (1/7, 1/7, 1/7, 1/7, 1/7 , 1/7, 1/7)

KLOUZAVÝ PRŮMĚR

		m = 3	m = 7	
1	10			
2	12	10,0		
3	8	8,7		
4	6	6,3	9,4	-0,9
5	5	7,3	9,3	-1,9
6	11	10,0	9,0	-0,7
7	14	11,3	9,7	-0,3
8	9	11,0	9,9	-3,9
9	10	10,7	10,0	-2,3
10	13	10,0	9,9	0,7
11	7	8,7	9,9	-1,3
12	6	7,7	9,9	-2,7
13	10	10,0	9,6	-0,7
14	14	11,0	9,4	0,0
15	9	10,3	9,7	-2,9
16	8	9,7	9,7	-2,9
17	12	9,7	9,6	0,4
18	9	9,0		
19	6	8,0		
20	9			



a = (1/7, -1/7, -1/7, 1/7, -1/7 , -1/7, 1/7)

ZPŮSOB VÝPOČTU

uvažujme třeba kauzální výpočet (tj. pouze ze zpožděných známých hodnot):

1.
$$\bar{x}(k) = y(k) = \sum_{i=0}^{m-1} \frac{1}{m} \cdot x(k-i) = \sum_{i=0}^{m-1} b_i \cdot x(k-i)$$

2.
$$\bar{x}(k) = y(k) = m \cdot y(k-1) + x(k) - x(k-m)$$

rekurze – používá staré hodnoty výstupních vzorků

$$y(k) = \sum_{j=1}^{n} b_j \cdot y(k-j) + \sum_{i=0}^{m} a_i x(k-i)$$

NOVÉ POJMY

- ☑ koeficienty odpovídající žádanému průběhu časové řady (model);
- ☑ přechodný děj (odezva na počáteční podmínky);
- ☑ kauzalita;
- ☑ rekurze.

IV. ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD

ZÁKLADNÍ POJMY

VELIČINY☼ MATEMATICKÉ MODELY

- ☑ abychom mohli úspěšně řešit praktické problémy (analýza, syntéza), potřebujeme reálné veličiny vyjádřit matematicky jejich (abstraktními) modely;
- ☑ model veličiny by měl splňovat dva základní požadavky:
  - ➔ výstižnost, přesnost;
  - ➔ jednoduchost, snadná manipulace;

KLASIFIKACE VELIČIN
(A JEJICH MATEMATICKÝCH MODELŮ)

A) spojité a diskrétní

B) reálné a komplexní

C) deterministické a nedeterministické (náhodné?)

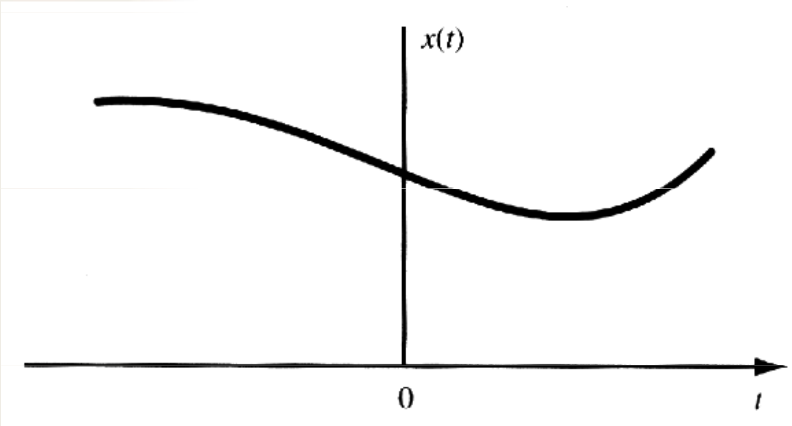
D) periodické a neperiodické

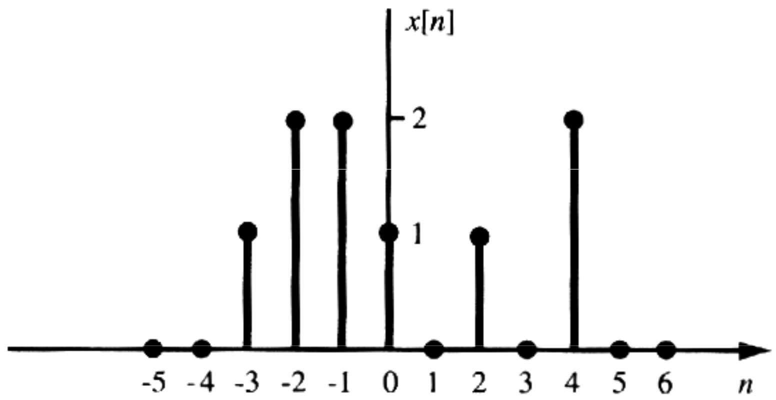
E) sudé a liché

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- **Spojitá veličina**(přesněji **veličina se spojitým časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je spojitá proměnná.
- **Diskrétní veličina** (přesněji **veličina s diskrétním časem**) je taková veličina $x(t)$, kde čas t je definován v diskrétních časových okamžicích. Diskrétní veličinu proto často zapisujeme jako **posloupnost** $\{x_n\}$, kde n je celé číslo, resp. x(nT).

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY





A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- ☑ kvalitativní:
  - ➔ nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ➔ ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - ➔ binární
- ☑ kvantitativní:
  - ➔ spojitá;
  - ➔ diskrétní;

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

- ☑ kvalitativní:
  - ➔ nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ➔ ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - ➔ binární
- ☑ kvantitativní:
  - ➔ spojitá
  - ➔ diskrétní

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

Pozn. Spojitá vs. nespojitá funkce. Zde se myslí ve smyslu hodnot funkce nikoliv času. V tomto smyslu nespojitá veličina (signál) v praxi neexistuje (vždy konečná délka přechodu). Příklad: obdélníkový signál

Typy dat (Biostatistika, str.12):

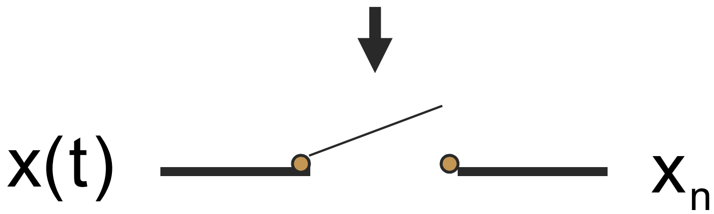
- ☑ kvalitativní:
  - ➔ nominální – kategorie nelze seřadit;
  - ➔ ordinální – kategorie je možné seřadit;
  - ➔ binární
- ☑ kvantitativní:
  - ➔ spojitá
  - ➔ diskrétní

Délka dat

budeme se zabývat posloupnostmi s desítkami vzorků

A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- U diskrétní veličiny není její hodnota mezi jednotlivými diskrétními časovými okamžiky definována.
- Diskrétní veličinu lze také získat **vzorkováním** spojité veličiny: $x(t_0)$, $x(t_1)$, $x(t_2)$, ..., $x(t_n)$, ... (též značení x_0, x_1, x_2, ..., x_n, ...). Hodnoty $x_i = x_i(t)$ se nazývají **vzorky**.



A) SPOJITÉ A DISKRÉTNÍ VELIČINY

- Diskrétní veličinu můžeme zapsat
  - funkčním předpisem, např.

$$x_n = \begin{cases} 2^n & \text{pro} \quad n \geq 0 \\ 0 & \text{pro} \quad n < 0 \end{cases}$$

  - explicitně seznamem hodnot, např.

$$x_n = \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, \ldots\}, n = 0,1,2,\ldots$$

(zde se implicitně předpokládá, že prvky jsou číslovány od nuly a pro záporné indexy n jsou hodnoty nulové)

B) REÁLNÉ A KOMPLEXNÍ VELIČINY

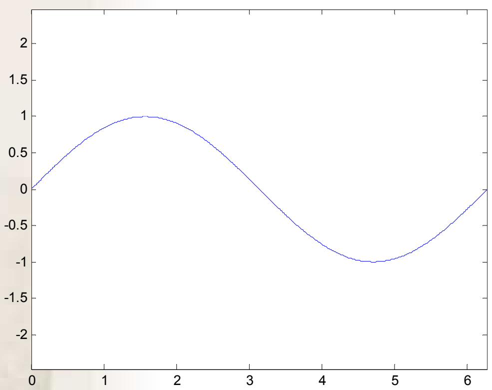
- ☑ **Reálná veličina (model)** je taková, která nabývá reálných hodnot. (V praxi skutečně měřitelný.)
- ☑ **Komplexní veličina (model)** je taková, která nabývá komplexních hodnot. (Hypotetická, v praxi neměřitelná.)

$$x(t) = x_1(t) + jx_2(t)$$

Čas *t* je spojitý nebo diskrétní.

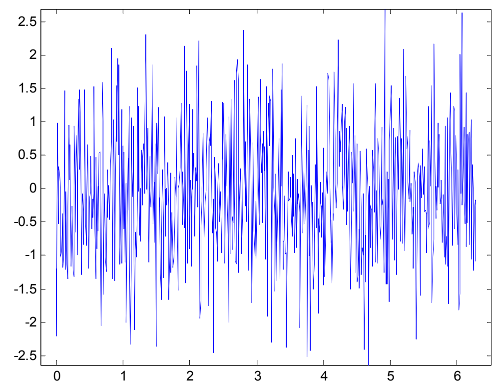
C) DETERMINISTICKÉ A NEDETERMINISTICKÉ (NÁHODNÉ) VELIČINY

- **Deterministická veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou v daném čase jednoznačně určeny. Taková veličina může být popsán analytickou funkcí času *t*.
- **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné. Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum, definované rozložení, momenty.



$$x(t) = \sin t$$

$$N(0,1)$$



C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

- **Náhodná (stochastická) veličina** je taková, jejíž hodnoty jsou náhodné. Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

C) DETERMINISTICKÉ A NÁHODNÉ VELIČINY

Náhodná (stochastická) veličina je taková veličina, jejíž hodnoty jsou náhodné. Takové veličiny popisujeme statistickými prostředky. Např. bílý/barevný šum.

Náhodný proces

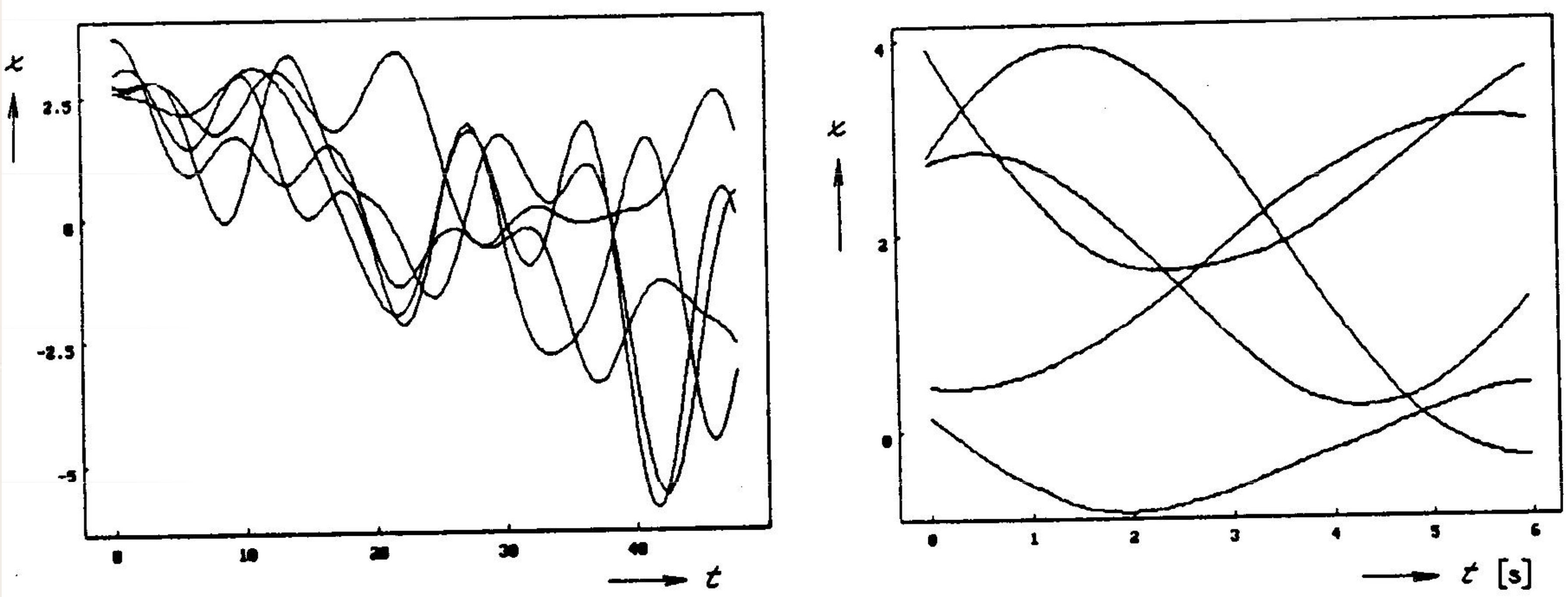
Systém $\{\xi_i\}$ náhodných veličin ξ_i, definovaných pro všechna $t \in R$ se nazývá náhodný proces (*random process*) a označuje se $\xi(t)$. Nezávislá veličina t je zpravidla čas.

- stacionarita;
- ergodicita

STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

zhruba:

☑ **stacionární náhodný proces** (*stationary random process*) je proces se stálým chováním



STACIONARITA NÁHODNÉHO PROCESU

přesněji:

- ☑ **stacionární náhodný proces** je takový proces, jehož libovolné statistické charakteristiky nejsou závislé na poloze počátku časové osy (nezávisí na absolutních hodnotách času, jen na délkách časových intervalů mezi okamžiky t_1 a t_2)

Z praktického hlediska často vnímáme pojem stacionarity v tzv. širším slova smyslu, kdy stačí, aby se s nezávisle proměnnou neměnily pouze statistické momenty 1. a 2. řádu, střední hodnota, rozptyl a autokorelační, resp. autokovarianční funkce.

ERGODICITA NÁHODNÉHO PROCESU

Ergodický náhodný proces (*ergodic random process*) se vyznačuje tím, že všechny jeho realizace mají stejné statistické vlastnosti (stejné chování) – to umožňuje odhadovat parametry náhodného procesu z jediné libovolné realizace.

Zpravidla požadujeme (je to z hlediska analýzy pohodlnější), aby byl analyzovaný proces jak stacionární, tak i ergodický, ale obecně ergodický proces nemusí být nezbytně i stacionární a samozřejmě i naopak.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Spojitá veličina $x(t)$ je **periodická s periodou** T, jestliže existuje hodnota T taková, že pro všechna t platí

$$x(t+T) = x(t)$$

- Nejmenší kladná hodnota T, pro kterou platí uvedený vztah se nazývá základní perioda.
- Obecně lze psát

$$x(t+kT) = x(t),$$

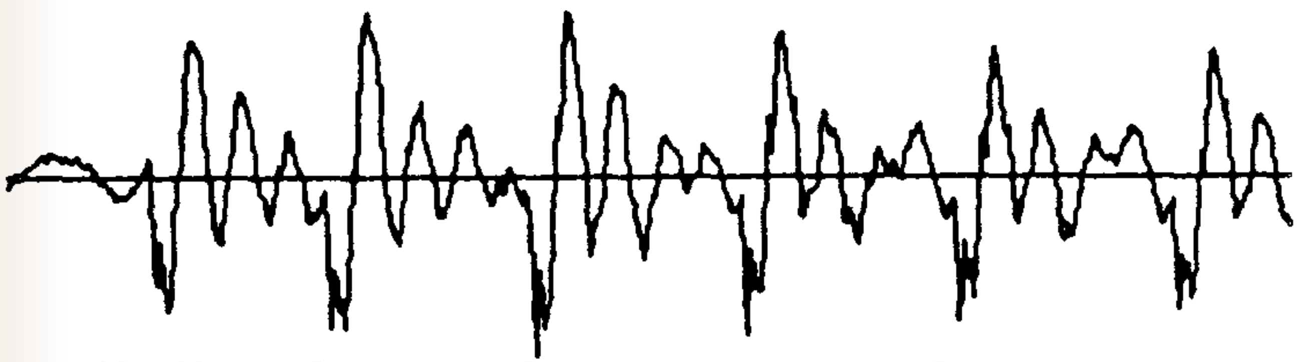
kde k je celé číslo.

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

Pozor!

- Pro konstantní signál není definována základní perioda. Konstantní signál je periodický pro každou hodnotu T.
- Spojitý signál, který není periodický se nazývá **neperiodický** nebo **aperiodický**.
- Reálné biosignály nejsou zcela periodické – hovoříme o **repetičních signálech**.

Pohov!



řečový signál – samohláska „e“

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Pro diskrétní signál definujeme periodický signál s periodou N obdobně

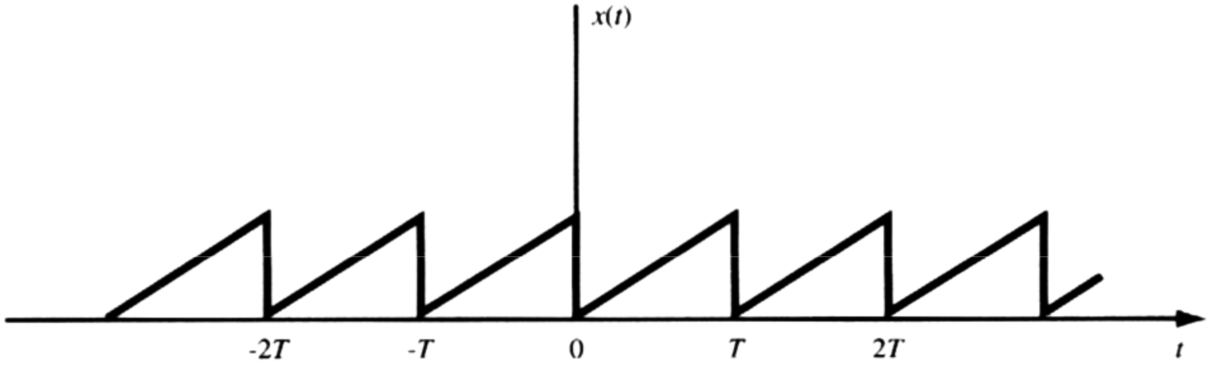
$$x_{n+N} = x_n \qquad \text{a} \qquad x_{n+kN} = x_n$$

Pozor!

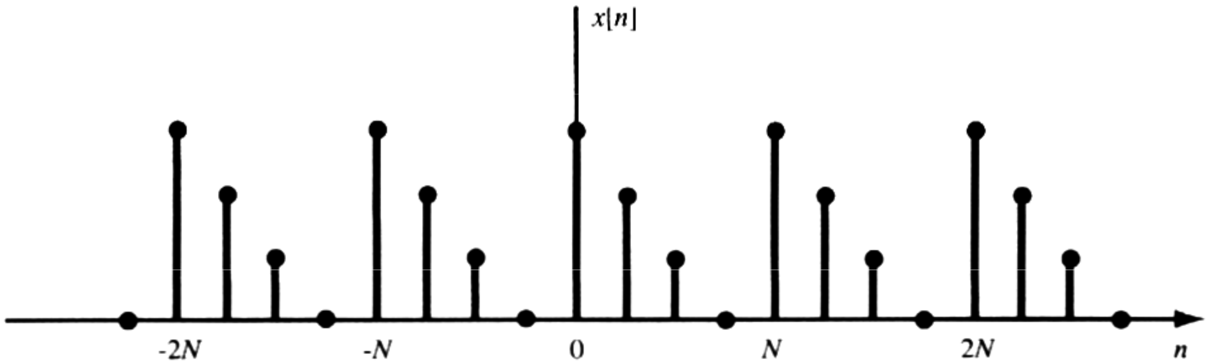
- ☑ Diskrétní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskrétních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

Pohov!

D) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY



(a)



(b)

E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY

- **Sudá veličina** je taková, pro níž platí

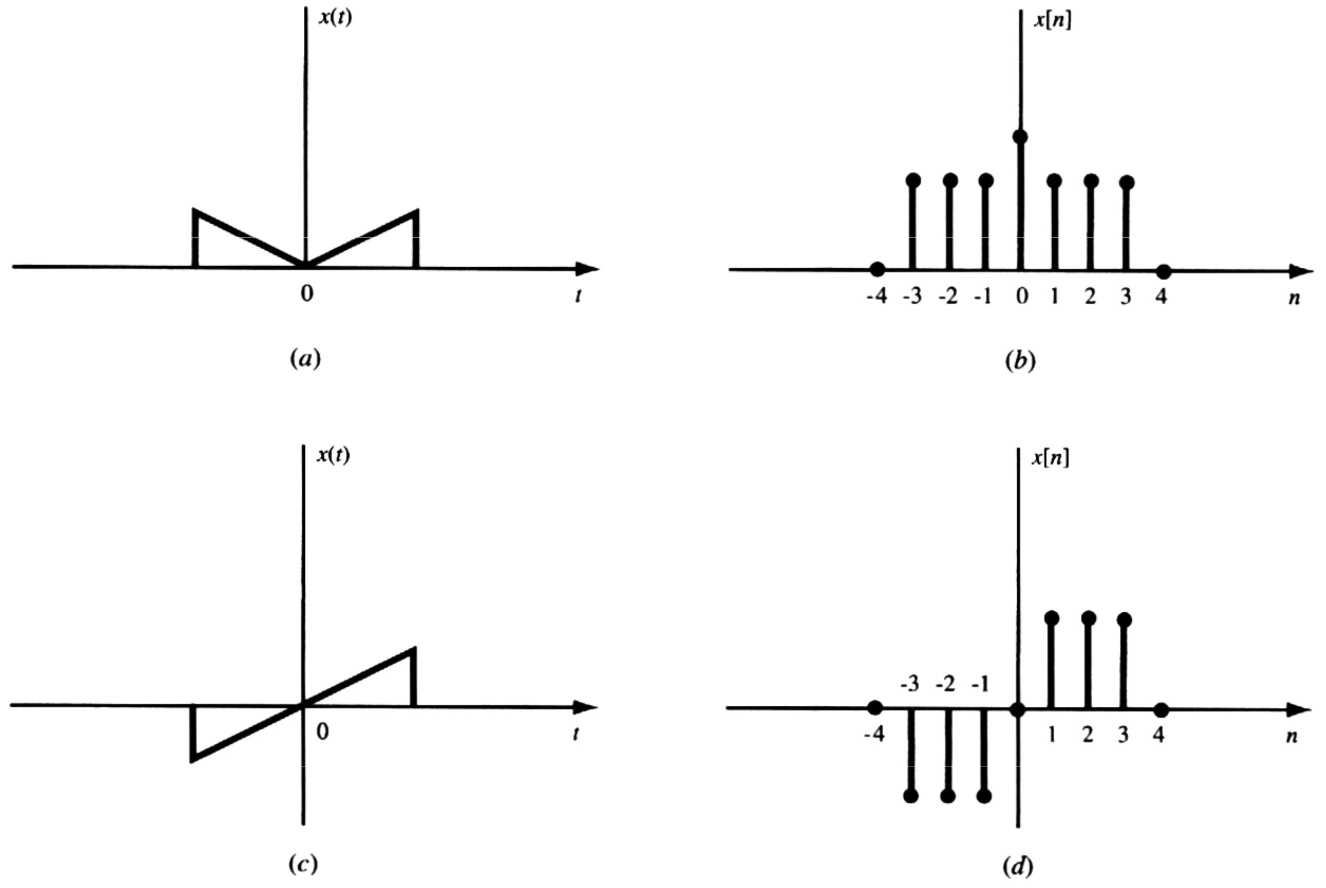
$$x(-t) = x(t), \quad x_{-n} = x_n$$

- **Lichá veličina** je taková, pro níž platí

$$x(-t) = -x(t), \quad x_{-n} = -x_n$$

- Součin sudé a liché veličiny je lichá veličina.
- Součin dvou sudých nebo dvou lichých veličin je sudá veličina.

E) SUDÉ A LICHÉ VELIČINY



V. VELIČINY SPOJITÉ V ČASE A JEJICH MODELY (FUNKCE)

MU

IBA

HARMONICKÁ FUNKCE

HARMONICKÁ FUNKCE

☑ **harmonická funkce** je dána vztahem

$$x(t) = A.\cos(\omega t + \varphi_0),$$

kde

$A>0$ je amplituda harmonické funkce

$\omega > 0$ je úhlový kmitočet h.f.

φ_0 je počáteční fáze, tj. fáze v čase $t=0$

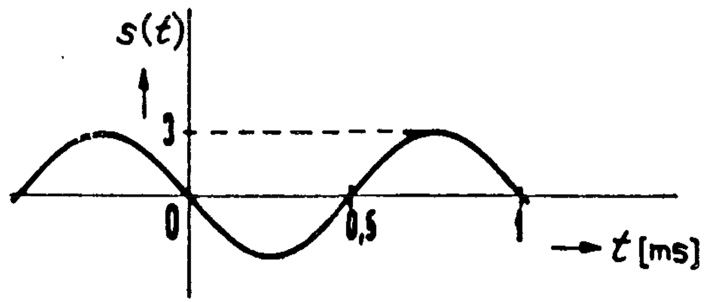
$\omega t + \varphi_0$ je fáze harmonické funkce

Perioda harmonické funkce je dána vztahem

$$T = 2\pi/\omega$$

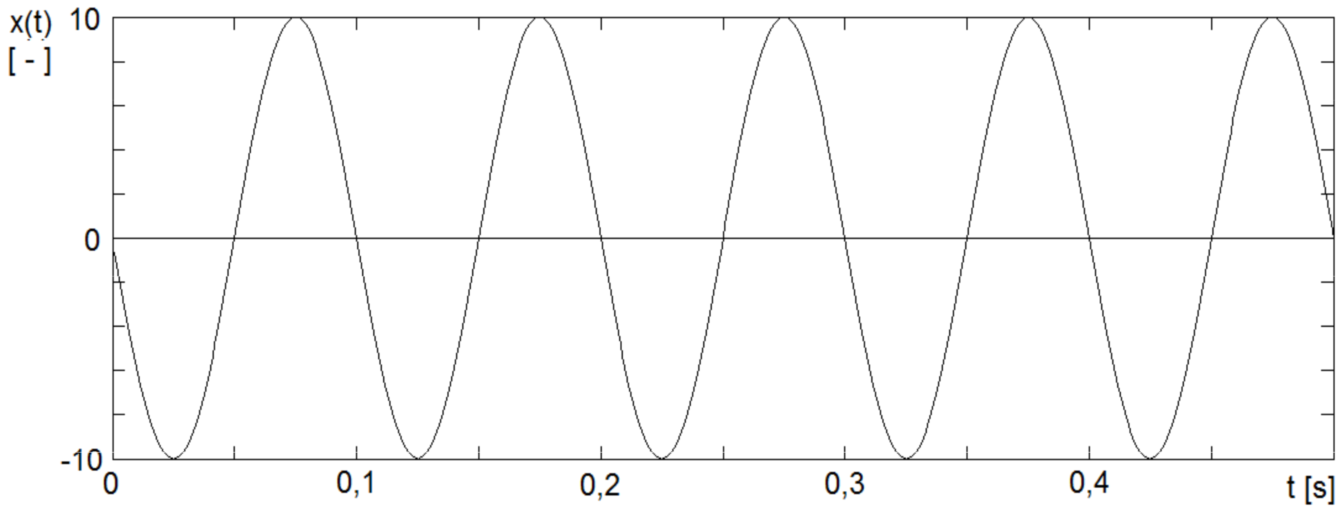
kmitočet h.f. je definován

$$f = 1/T = \omega/2\pi$$



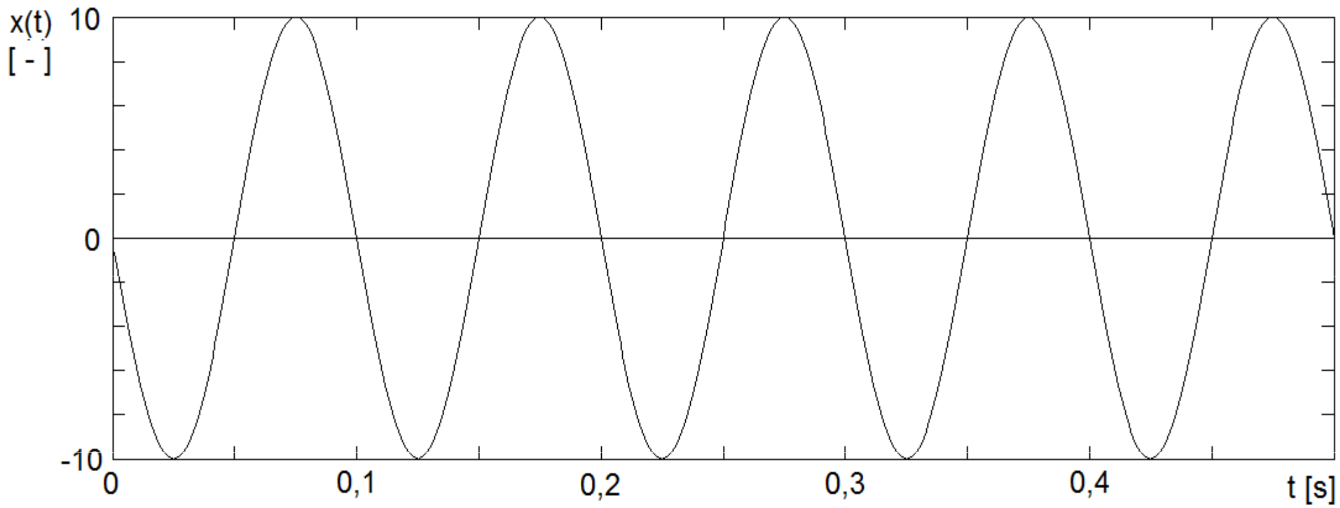
HARMONICKÁ FUNKCE

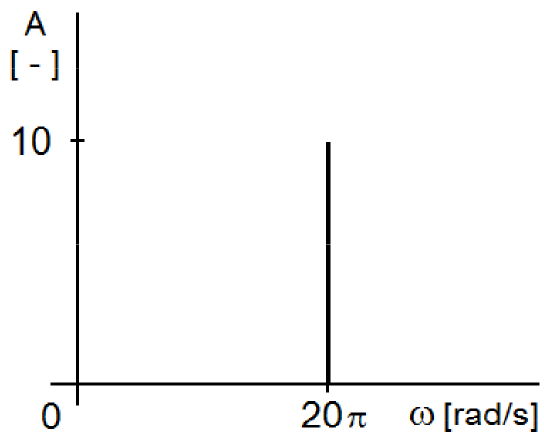
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

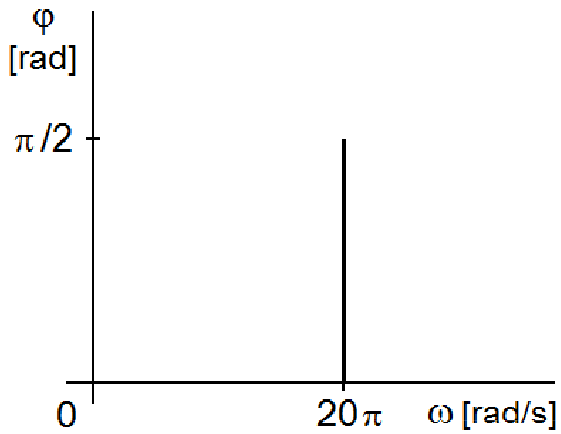


HARMONICKÁ FUNKCE

$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$







HARMONICKÁ FUNKCE

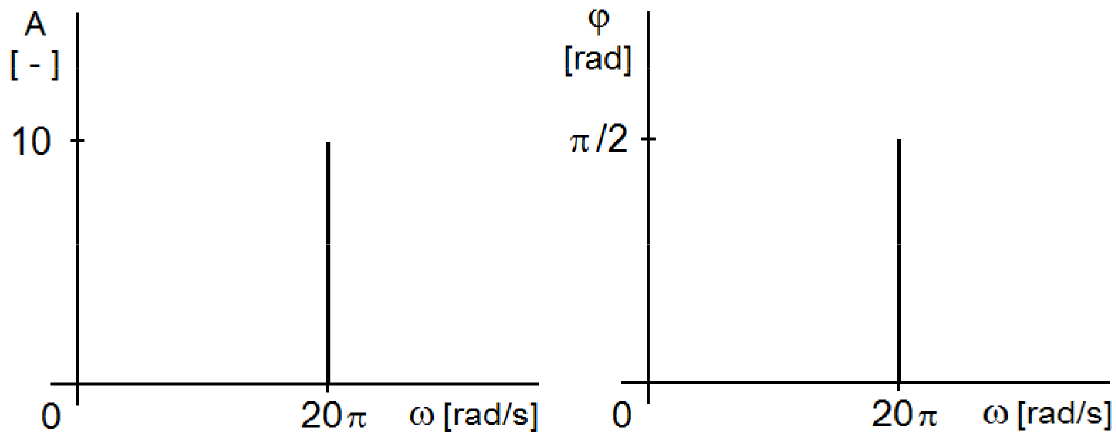
$$x(t) = 10.\cos(2\pi.10t + \pi/2).$$

- ☑ tříparametrický harmonický signál lze graficky vyjádřit pomocí dvou bodů v rovinách

amplituda x (úhlový) kmitočet a

počáteční fáze x (úhlový) kmitočet:

$$A = A(\omega) \quad \text{a} \quad \varphi_0 = \varphi_0(\omega);$$



spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

!!! FREKVENČNÍ SPEKTRUM !!!

Frekvenční spektrum signálu je vyjádření rozložení amplitud a počátečních fází jednotlivých harmonických složek, ze kterých se signál skládá, v závislosti na frekvenci.

! ZAPAMATOVAT! ! NA VĚKY !

HARMONICKÝ SIGNÁL

☑ další definice

$$x(t) = \mathit{Re}\{\dot{x}(t)\} = \mathit{Re}\{A.\exp[j(\omega t + \varphi_0)]\}$$

(vyplývá z Eulerových vztahů)

HARMONICKÝ SIGNÁL

kupodivu lze použít i vztah

$$x(t) = \mathcal{R}e\{A.\exp[j(-\omega t - \varphi_0)]\} = \mathcal{R}e\{\dot{x}^*(t)\}$$

pozor !!! pozor

- záporný kmitočet - ale funguje to

HARMONICKÝ SIGNÁL

Protože platí

$$x(t) = Re\{\dot{x}(t)\} = Re\{\dot{x}^*(t)\} \text{ a } Im\{\dot{x}(t)\} = -Im\{\dot{x}^*(t)\}$$

je i

$$x(t) = ½.\{\dot{x}(t) + \dot{x}^*(t)\}$$

$$x(t) = ½.\{A.\exp(j\varphi_0).\exp(j\omega t)\} +$$
$$+ ½.\{A\exp(-j\varphi_0).\exp(-j\omega t)\}$$

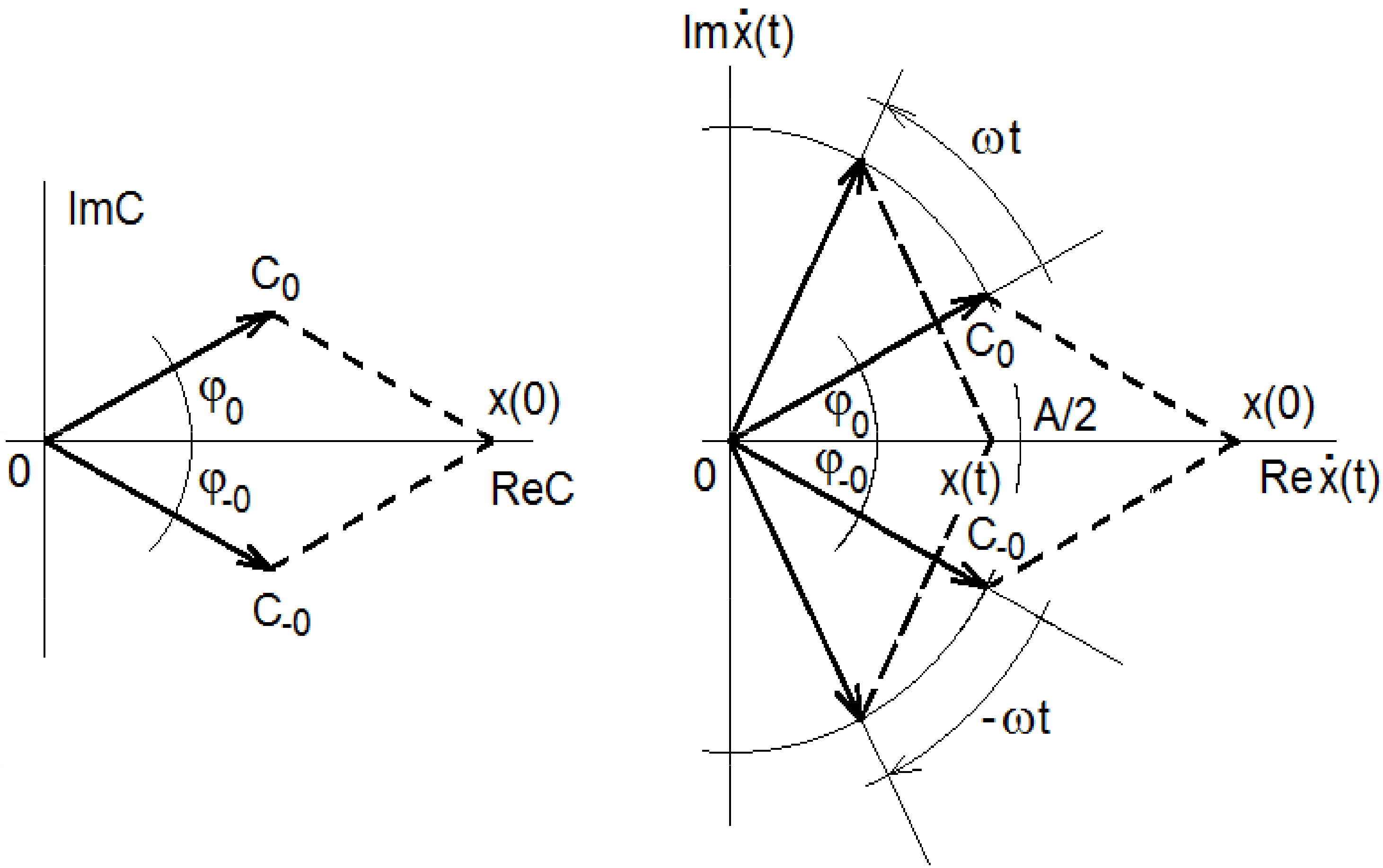
Označíme-li

$$\dot{C}_1 = ½.A.\exp(j\varphi_0) \quad \text{a} \quad \dot{C}_{-1} = ½.A\exp(-j\varphi_0)$$

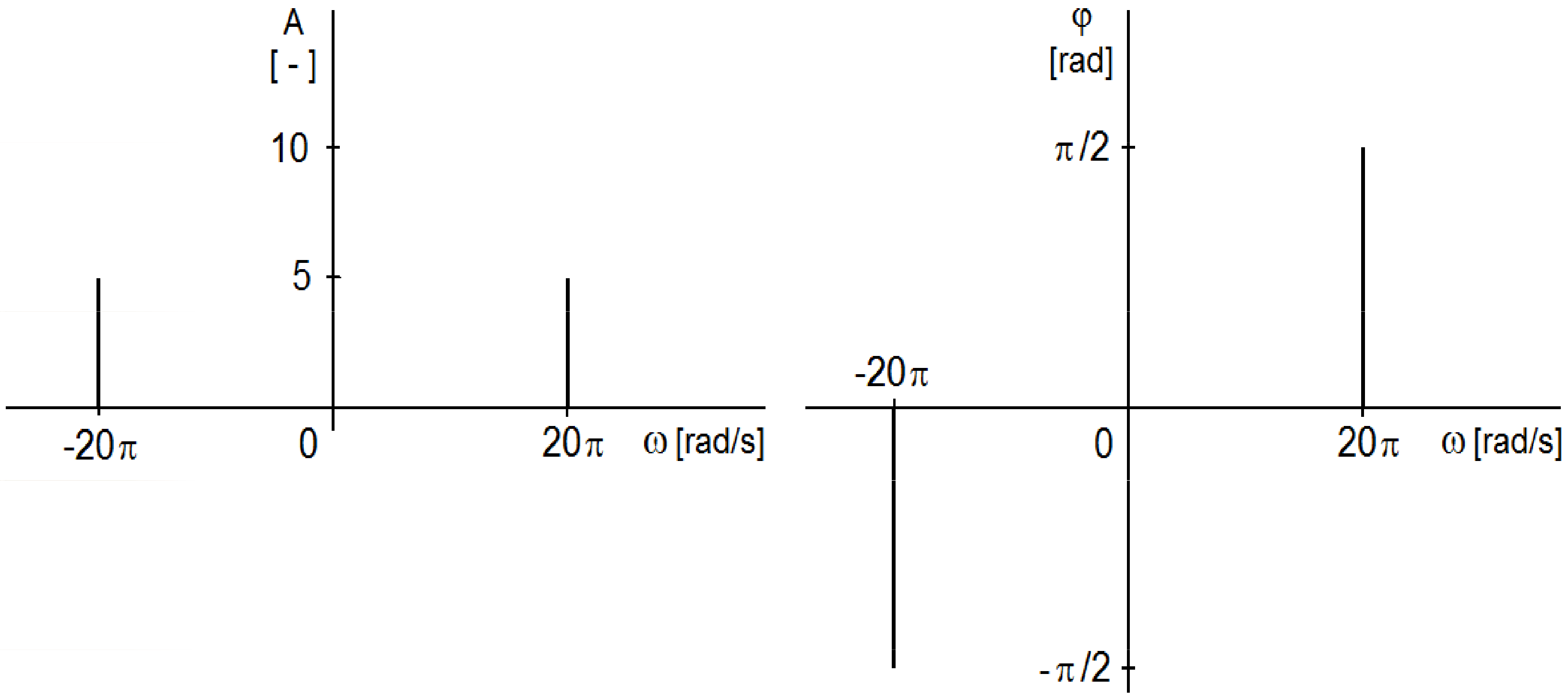
je

$$x(t) = \dot{C}_1.\exp(j\omega t) + \dot{C}_{-1}.\exp[j(-\omega)t]$$

HARMONICKÝ SIGNÁL



HARMONICKÝ SIGNÁL

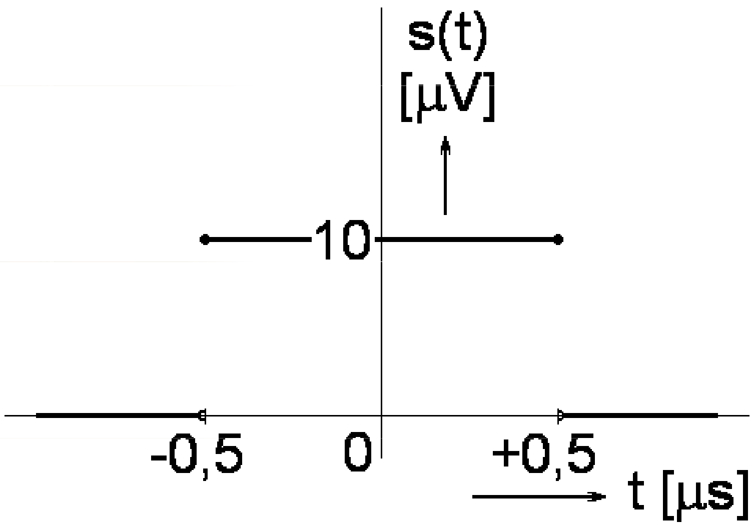


spektrum amplitud **spektrum** počátečních fází

- [x] http://www.mysearch.org.uk/website1/html/222.Function.html
- [x] http://www.acs.psu.edu/drussell/Demos/complex/complex.html
- [x] http://en.wikipedia.org/wiki/Harmonic
- [x] http://www.khanacademy.org/science/physics/oscillatory-motion/harmonic-motion/v/introduction-to-harmonic-motion
- [x] http://www.youtube.com/watch?v=eeYRkW8V7Vg

NEPERIODICKÉ FUNKCE

☑ jednorázový deterministický signál



$s(t) = 10.10^{-6}$ V pro $t \in \langle -0{,}5\ \mu s;\ 0{,}5\ \mu s \rangle$

$s(t) = 0$ V pro $t \in (0{,}5\ \mu s;\ \infty \rangle$

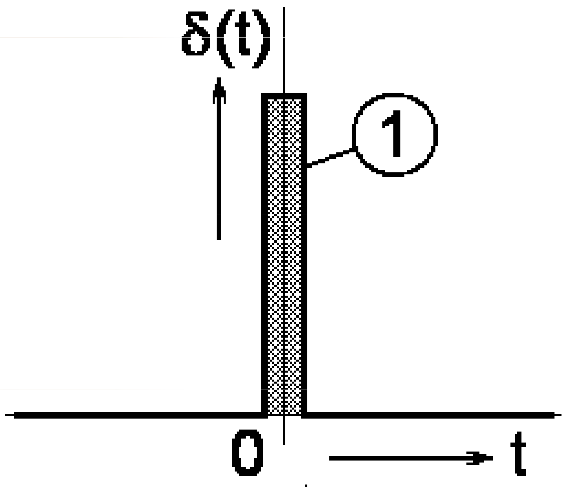
$s(t) = 0$ V pro $t \in \langle -\infty;\ -0{,}5\ \mu s\ )$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- jednotkový impuls (Diracův impuls) - $\delta(t)$

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$



zjednodušeně:

jednotkový impuls $\delta(t)$ je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky $\Rightarrow$ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t \neq 0; \\ \infty, & \text{pro } t = 0. \end{cases} \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)dt = 1.$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

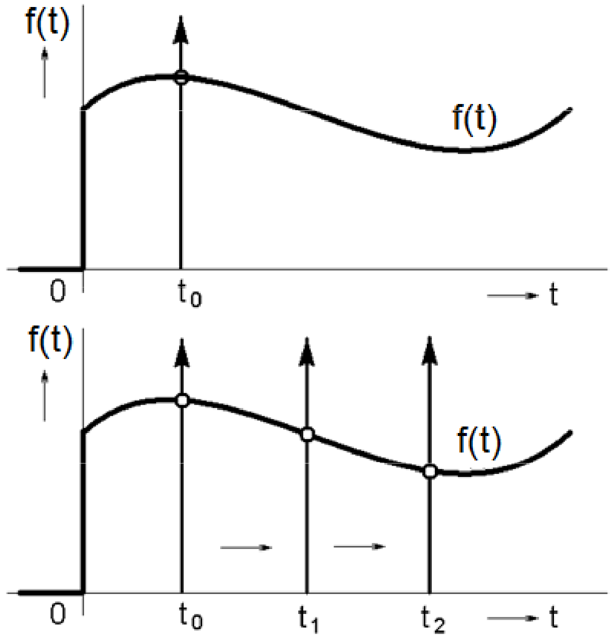
- jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t-t_0)dt = x(t_0)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t_0)\delta(t-t_0)dt =$$

$$= f(t_0).\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-t_0)dt = f(t_0).$$



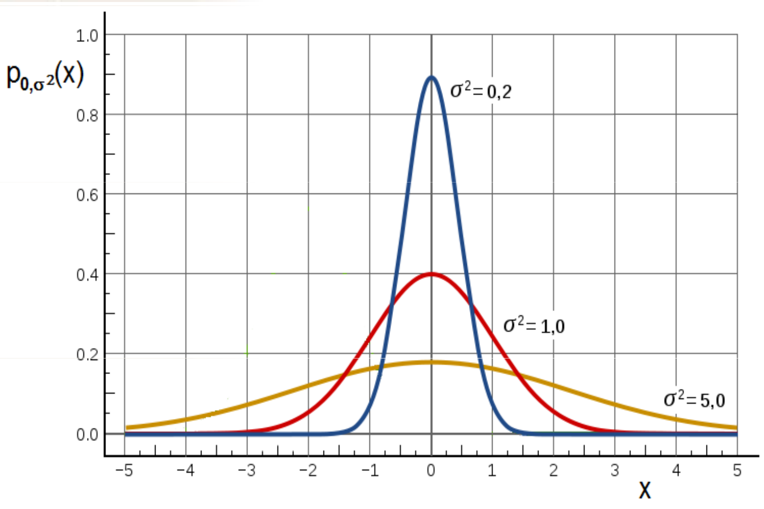
JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

☑ jednotkový impuls (Diracův impuls) - δ(t)

splňuje vztah

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t).\delta(t - t_0)dt = x(t_0)$$

zjednodušeně:



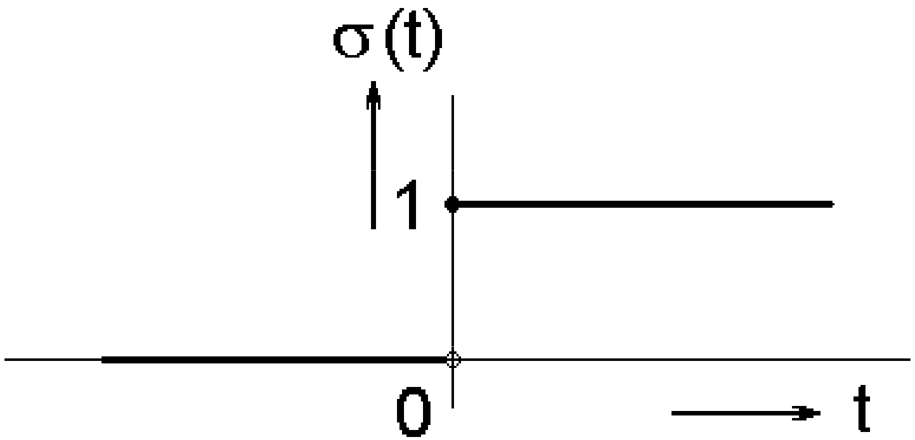
jednotkový impuls δ(t) je velice úzký (limitně s nulovou šířkou) a velice (limitně nekonečně) vysoký obdélníkový impulz, jehož výška je rovna převrácené hodnotě šířky ⇒ mohutnost je jednotková

$$\delta(t) = \lim_{\sigma \to 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} e^{-t^2/\sigma^2}$$

JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- jednotkový skok (Heavisidova funkce)

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & \text{pro } t < 0; \\ 1, & \text{pro } t \geq 0. \end{cases}$$



JEDNORÁZOVÉ FUNKCE

- ☑ pro obě uvedené jednorázové funkce platí:

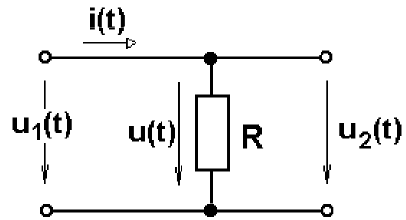
$$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \sigma(t)$$

$$\frac{d\sigma(t)}{dt} = \delta(t).$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

jsou odvozeny z primární představy signálu, reprezentovaného elektrickými veličinami, elektrickým napětím, příp. proudem. Na základě fyzikálních zákonitostí platí, že okamžitý výkon p(t) v čase t na reálném odporu R je roven součinu okamžitého napětí na odporu a proudu, jím protékajícím, tedy

$$p(t) = u(t).i(t)$$



Podle Ohmova zákona je

$$u(t) = R.i(t)$$

a po dosazení můžeme psát, že

$$p(t) = R.i(t).i(t) = R.i^2(t) = u(t).u(t)/R = u^2(t)/R.$$

Když je R = 1 Ω, se vztah zjednoduší na

$$p_{R=1}(t) = i^2(t) = u^2(t)$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

celková práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za čas T na jednotkovém odporu je

$$A = \int_T p(t)dt = \int_T i^2(t)dt = \int_T u^2(t)dt.$$

Na základě této rozvahy definujeme obecně energii spojitého signálu x(t) vztahem

$$E_s = \int_T x^2(t)dt$$

a pro diskrétní signál $x(nT_{vz})$

$$E_d = \sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

JEŠTĚ DVA DŮLEŽITÉ POJMY ENERGIE &VÝKON SIGNÁLU

Výkon je práce (energie) vykonaná (spotřebovaná) za časovou jednotku, tj.

$$P = \frac{E}{T}$$

a z toho $P_s = \frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt$ a $P_d = \frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$

Nebo v normalizovaném diskrétním tvaru

$$P_{dn} = \frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

Pokud se energie kumuluje v nekonečně dlouhém časovém intervalu, pak se vztahy modifikují do tvaru

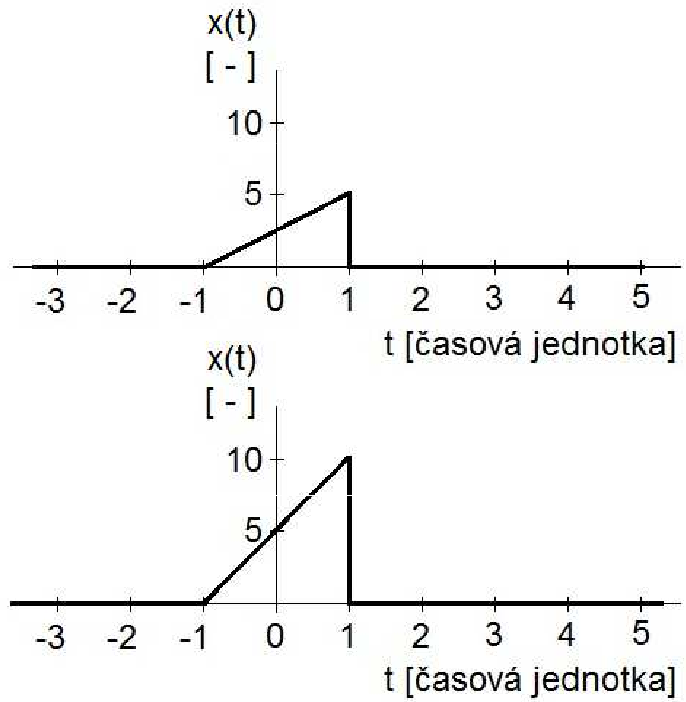
$$P_{s\infty} = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_T x^2(t)dt \quad \text{a} \quad P_{d\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{NT_{vz}}\sum_n^N x^2(nT_{vz})$$

příp.

$$P_{dn\infty} = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_n^N x^2(n)$$

☑ násobení konstantou

$$x(t) \sim A.x(t),$$



A=2

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

- ☑ **změna časového měřítka**

$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ změna časového měřítka

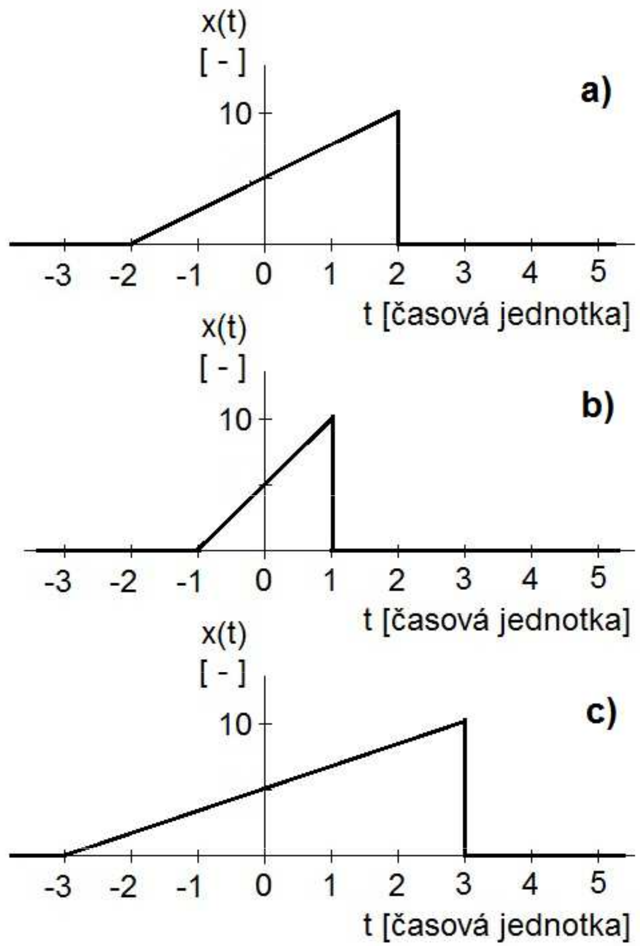
$$x(t) \sim x(mt),$$

kde m je kladné reálné číslo

$m > 1$ – časová komprese;

$m < 1$ – časová expanze

$m = 1$ – nic se neděje



a) originál; b) k=2; c) k=2/3

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

- **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – ?

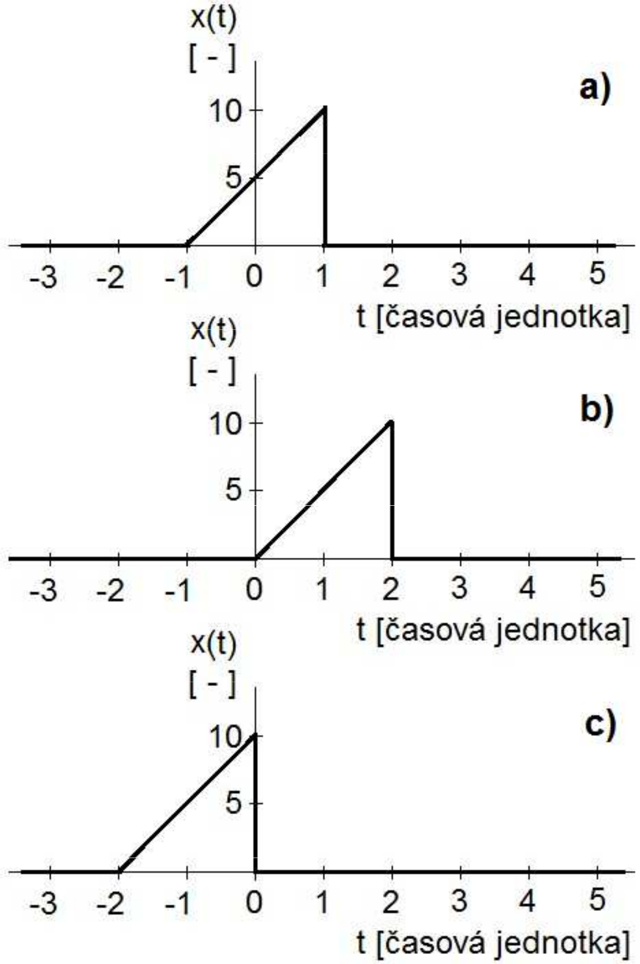
ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ **posunutí v čase**

$$x(t) \sim x(t+\tau),$$

τ je reálné, od nuly různé číslo;

$\tau > 0$ – zpoždění

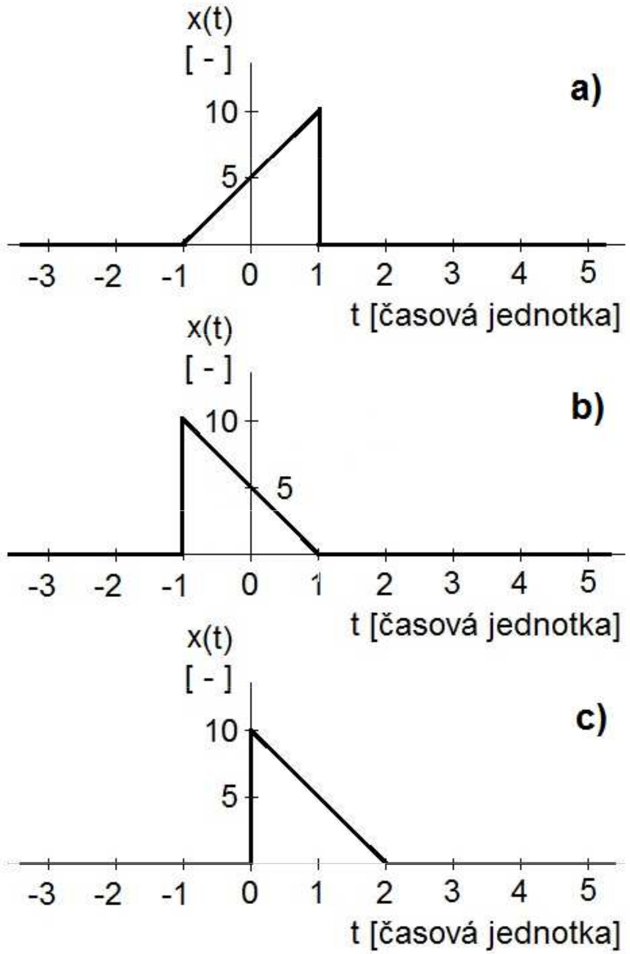


a) originál x(t); b) funkce x(t-1); c) funkce x(t+1);

ZÁKLADNÍ OPERACE SE SIGNÁLY
OPERACE S JEDNOU FUNKCÍ

☑ **obrácení (inverze) časové osy**

$$x(t) \sim x(-t) \,,$$



a) originál x(t); b) funkce x(-t); c) funkce x(-t+1)

SHRNUTÍ

- ☑ jaké typy veličin známe (dle vlastností)?
- ☑ stacionarita, ergodicita;
- ☑ definice základních modelů veličin (jednotkový skok, impuls, harmonický signál);
- ☑ různé formy vyjádření harmonické funkce;
- ☑ co je frekvenční spektrum?
- ☑ základní operace s funkcemi.

ZA TÝDEN NASHLEDANOU