



SIGNÁLY A LINEÁRNÍ SYSTEMY



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz, UKB A29, dv.č.112



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

V. ČASOVÉ ŘADY

VZORKOVÁNÍ

DEFINICE

Vzorkování je postup výběru jednotlivých pozorování, na jehož základě získáváme informaci o vlastnostech sledované skutečnosti či jevu. Každé pozorování může obecně zahrnovat více vlastností (věk, diagnóza onemocnění, velikost napětí, ...), které mohou být použity k identifikaci daného jevu či jeho části.

Vzorkováním rozumíme postup výběru určité podmnožiny (vzorku) dané množiny (veličiny, populace, dat, materiálu) tak, aby vlastnosti vybraného vzorku (dostatečně) přesně reprezentovaly vlastnosti celé množiny (signálu, populace, dat, materiálu).

Vzorkování je postup selekce jednotlivých pozorování s cílem získat určitou znalost o dané populaci, zejména pro účely statistické inference.

PŘÍKLADY

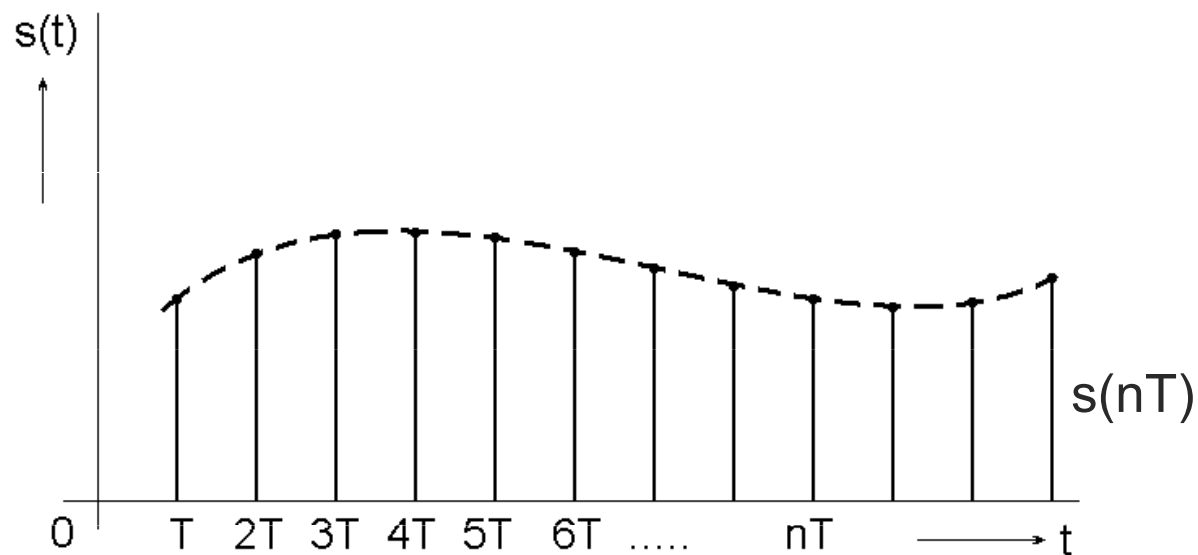
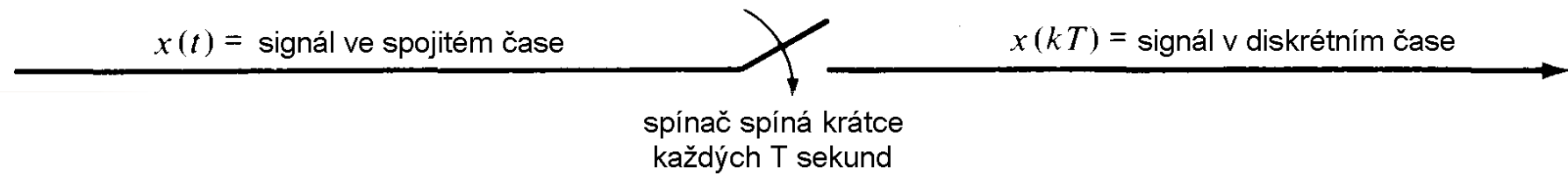
- ☑ volba frekvence a místa odběru pro hodnocení úrovně znečištění vodních toků;
- ☑ volba parametrů digitalizace obrazu pro jeho přenos či archivaci;
- ☑ volba tématu a množiny respondentů při průzkumu veřejného mínění;
- ☑ výběr výrobků při výstupní kontrole kvality výroby;
- ☑ výběr pacientů pro odhad vývoje daného onemocnění.

DEFINICE

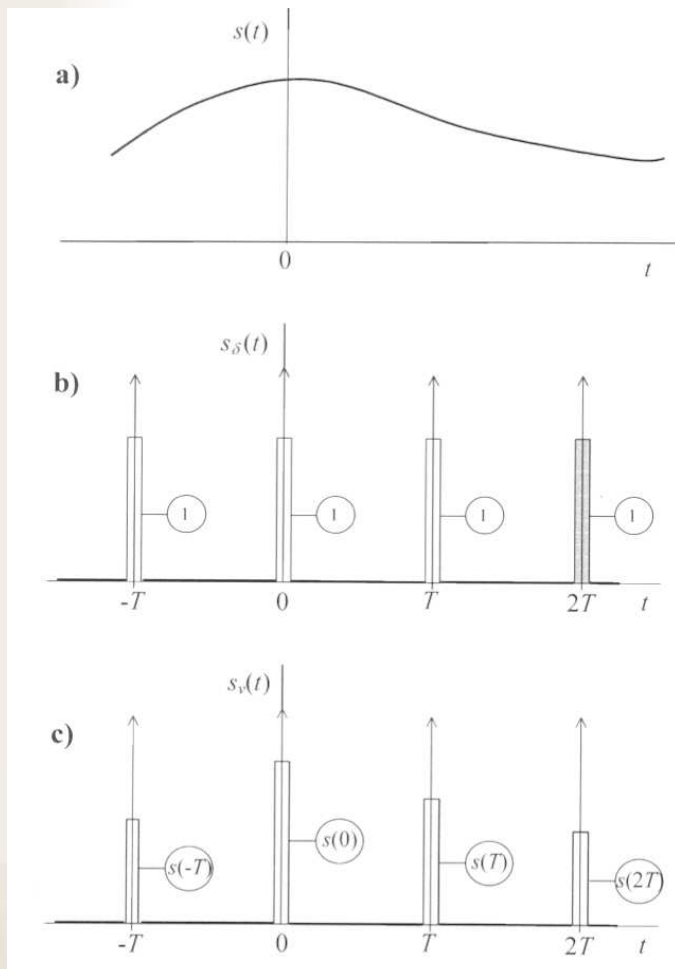
Vzorkováním dané veličiny (signálu) rozumíme činnost, při které z průběhu určité veličiny, která je definovaná na spojitém definičním oboru, vybíráme hodnoty pouze v určitých časových okamžicích, resp. pro určité hodnoty prostorových souřadnic.

Hodnoty časových či prostorových souřadnic mohou být rozmístěny v definičním prostoru obecně nerovnoměrně, z hlediska práce s daty je ale výhodnější, pokud jsou souřadnice vzorků rozmístěny rovnoměrně (a v tom případě lze i teoreticky dovodit pravidlo pro maximální vzdálenost mezi každými dvěma vzorky).

DISKRÉTNÍ SIGNÁL - VZORKOVÁNÍ



IDEÁLNÍ VZORKOVÁNÍ



Aby bylo možné zjednodušit analýzu vlivu vzorkování na vlastnosti vzorkované veličiny, je navzorkovaná verze původní spojité veličiny $s(t)$ vyjadřována ve tvaru $s(t) \cdot s_{\delta}(t)$, kde $s_{\delta}(t)$ je periodický sled jednotkových impulsů definovaný jako

$$s_{\delta}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$$

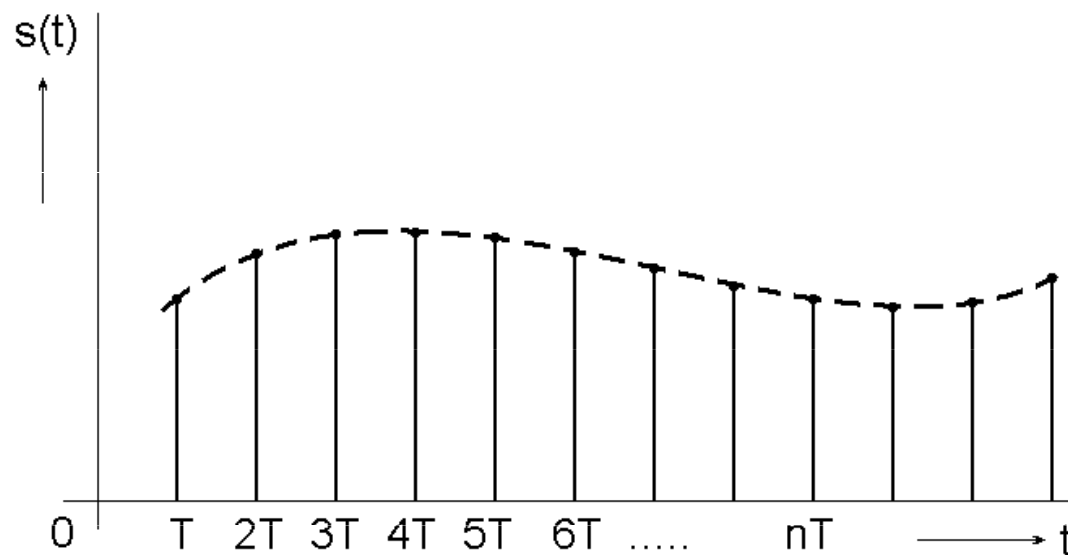
Z toho pro navzorkovanou veličinu platí

$$s_v(t) = s(t) \cdot s_{\delta}(t) = s(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} s(nT) \cdot \delta(t - nT)$$

VZORKOVACÍ TEORÉM

$$s(t) \rightarrow s(T_1), s(T_2), s(T_3), \dots, s(T_n), \dots$$

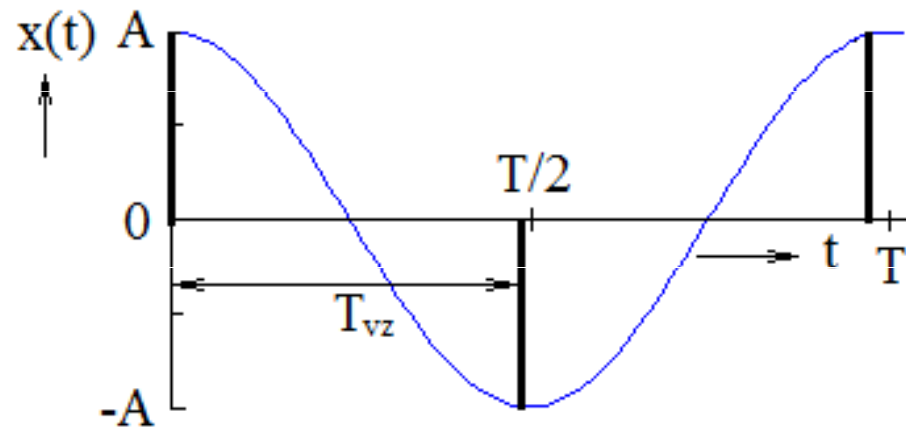
$$s(t) \rightarrow s(T), s(2T), s(3T), \dots, s(nT), \dots$$



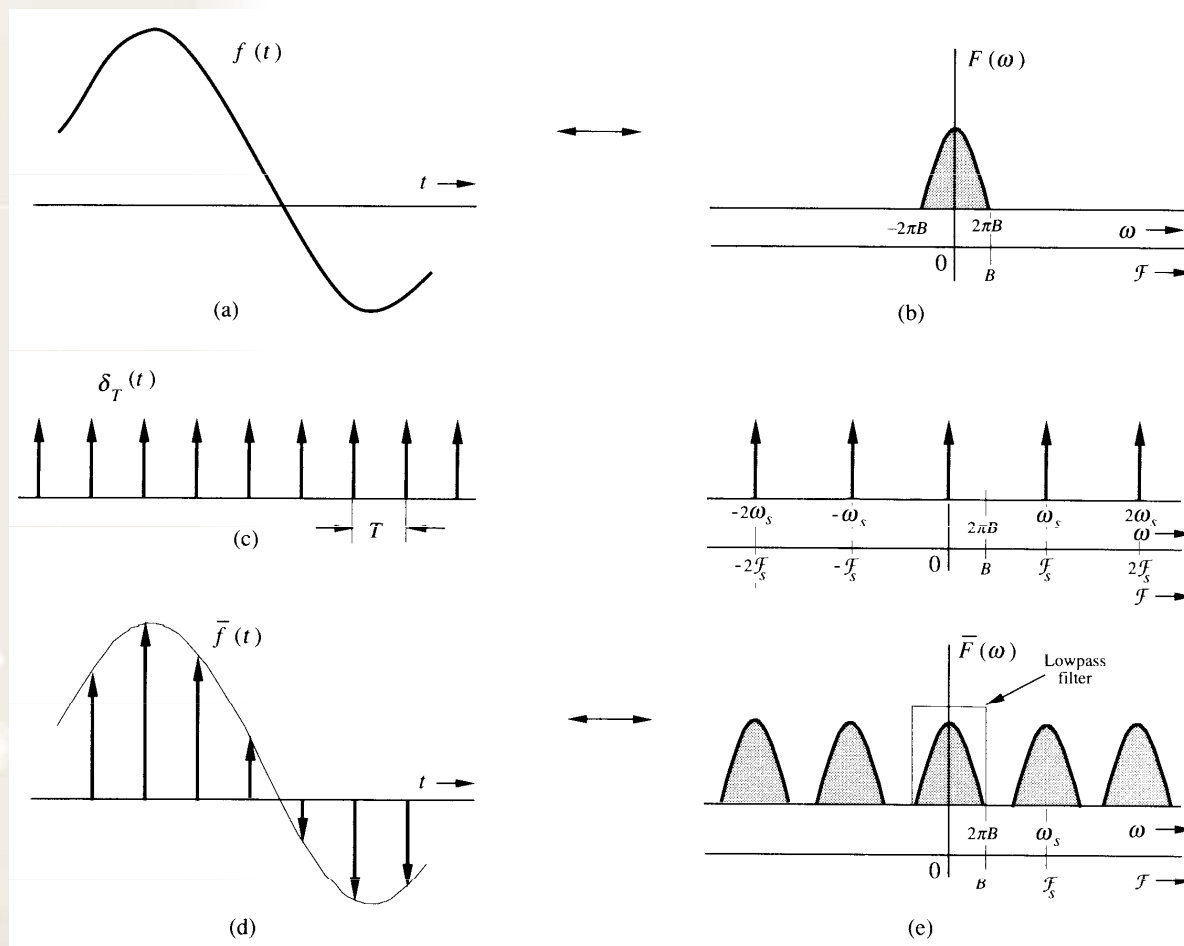
VZORKOVACÍ TEORÉM

intuitivní (?) zdůvodnění minimální vzorkovací frekvence

Reálné vzorkování



VZORKOVACÍ TEORÉM



Vzorkovací frekvence:

$$f_s > 2B = f_N,$$

kde B je maximální kmitočet ve vzorkované veličině

f_N –

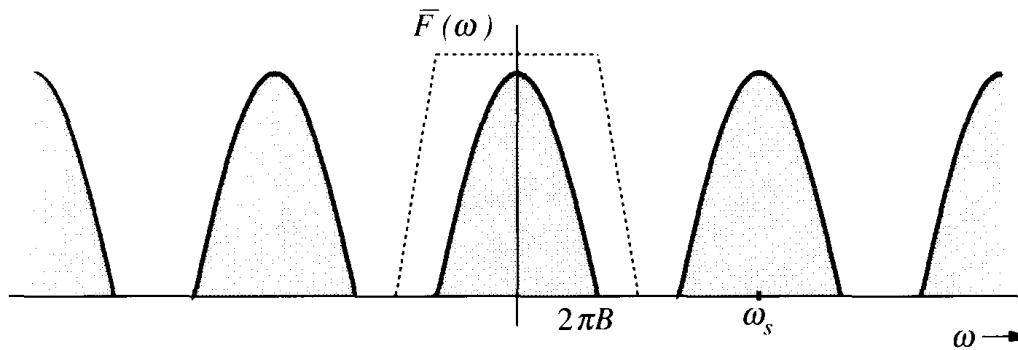
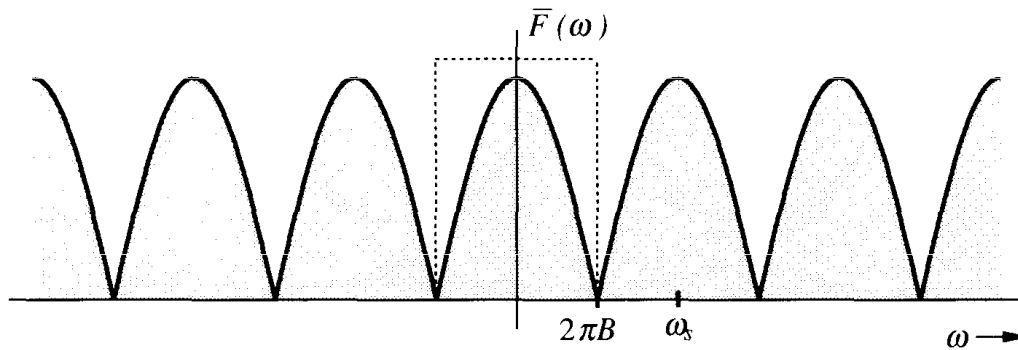
Nyquistův, (Shannonův, Kotelnikovův) kmitočet

$$T_N = 1/f_N = 1/2B$$

Nyquistův interval (perioda),
vzorkovací interval (perioda)

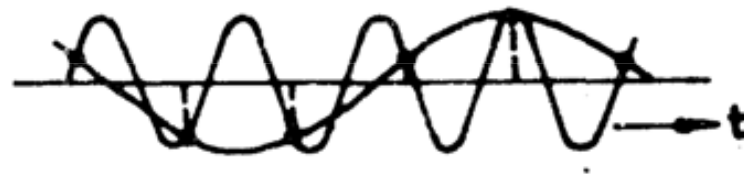
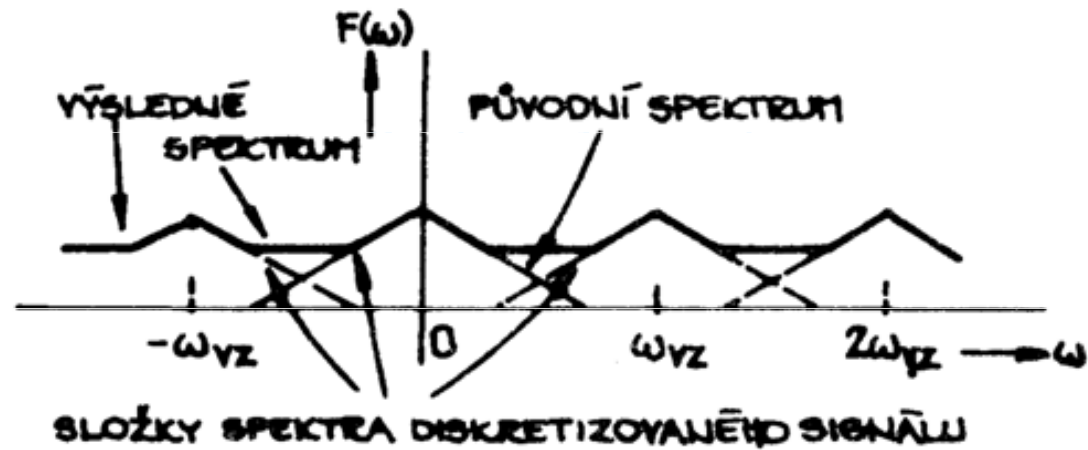
VZORKOVACÍ TEORÉM

Reálné vzo



$$f_{sr} = (4 \div 5) \cdot f_N$$

VZORKOVACÍ TEORÉM



překrývání spekter - aliasing

ZÁKLADNÍ TYPY MATEMATICKÝCH MODELŮ VELIČIN DISKRÉTNÍCH V ČASE

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI

Diskrétní posloupnost $x(nT_{vz})$ je periodická s periodou NT_{vz} , právě když platí

$$x[(n+k.N)T_{vz}] = x(nT_{vz}), \text{ pro } n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ve zkráceném tvaru argumentu

$$x[n+k.N] = x(n), \text{ pro } n, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

E) PERIODICKÉ A NEPERIODICKÉ VELIČINY

- Pro diskretní signál definujeme periodický signál s periodou N obdobně

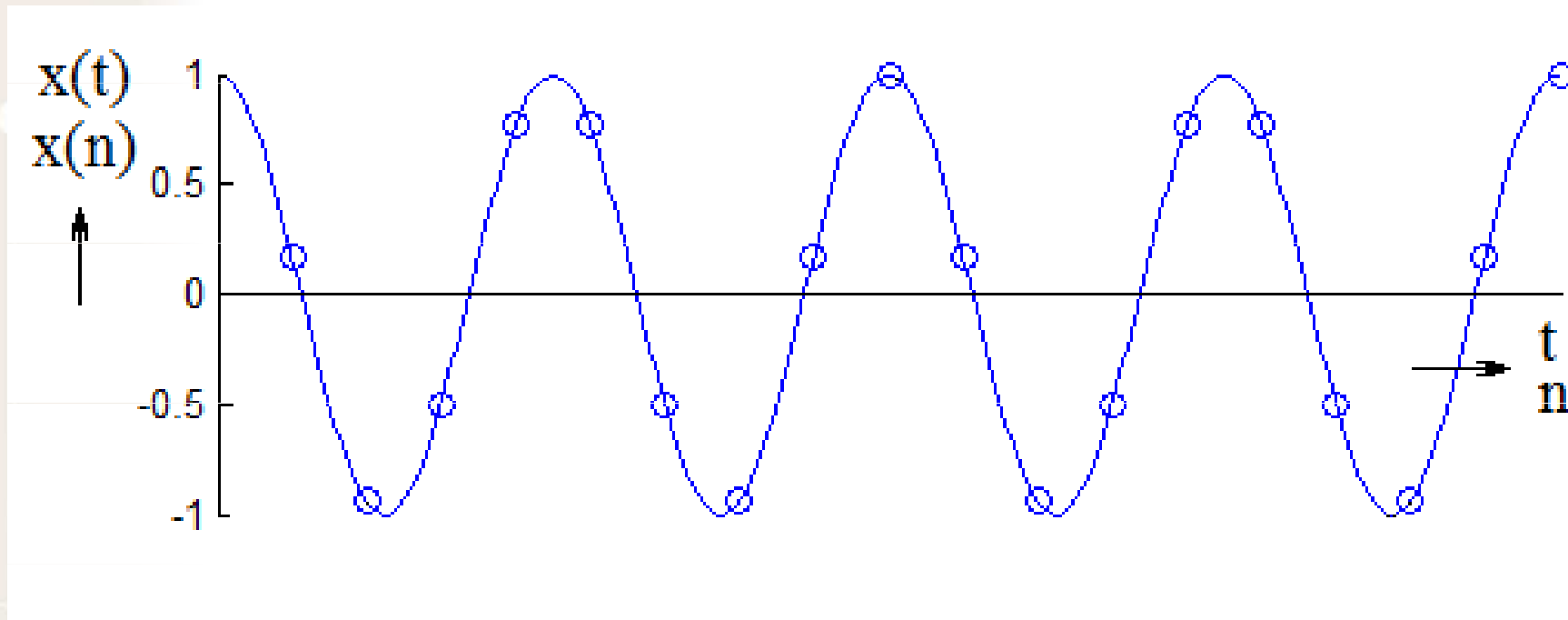
$$X_{n+N} = X_n \quad \text{a} \quad X_{n+kN} = X_n$$

Pozor!

- ☑ Diskretní signál získaný rovnoměrným vzorkováním periodického spojitého signálu **nemusí** být periodický.
- ☑ Součet dvou spojitých periodických signálů **nemusí** být periodický signál.
- ☑ Součet dvou diskretních periodických signálů **je vždy** periodický signál.

Pohov!

PERIODICKÉ POSLOUPNOSTI



HARMONICKÁ POSLOUPNOST

$$x(nT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi f nT_{vz} + \varphi_0) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi nT_{vz}}{NT_{vz}} + \varphi_0\right) = A \cdot \cos\left(\frac{2\pi n}{N} + \varphi_0\right),$$

když $T = NT_{vz}$ a tedy $f = 1/NT_{vz}$ nebo

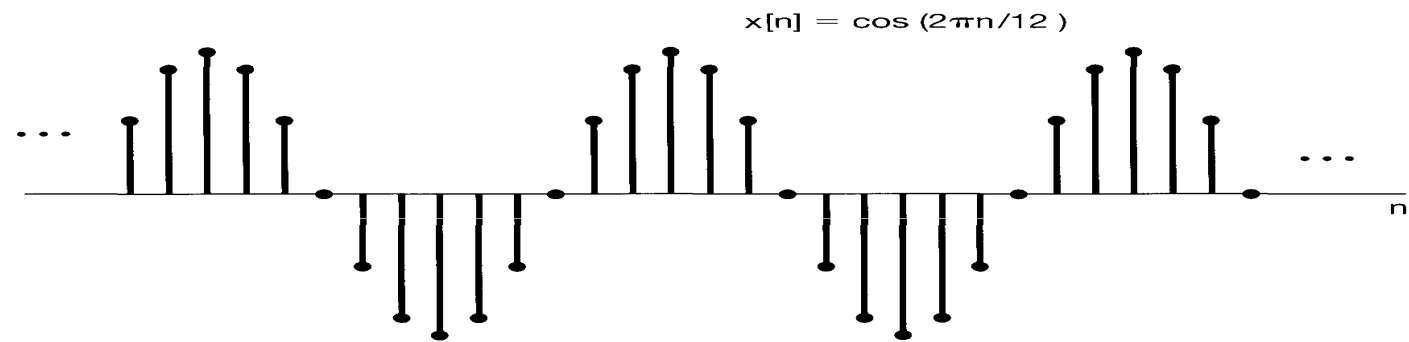
$$x(nT_{vz}) = A \cdot \exp\left(\frac{2\pi j n}{N} + \varphi_0\right).$$

Komplexní exponenciála samozřejmě rovněž reprezentuje periodickou veličinu, protože platí

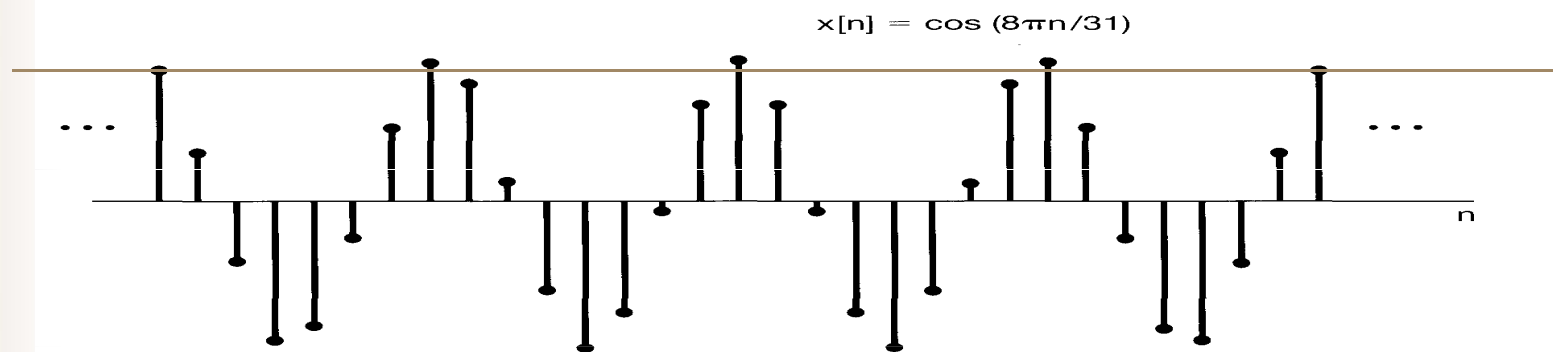
$$x[(k+N)T_{vz}] = \exp\frac{j2\pi(k+N)}{N} = \exp\frac{j2\pi k}{N} \cdot \exp(j2\pi),$$

kdy $\exp(2\pi j) = \cos(2\pi) + j \cdot \sin(2\pi) = 1 + j0 = 1$

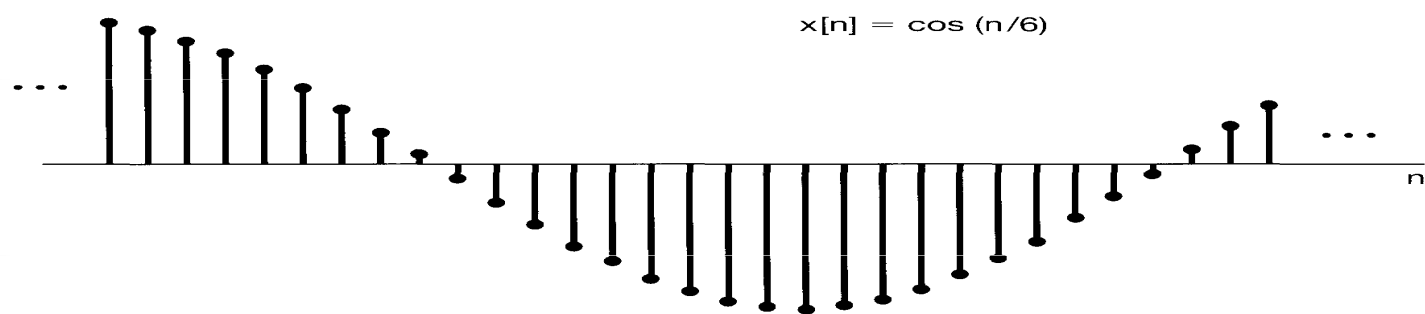
HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ



(a)

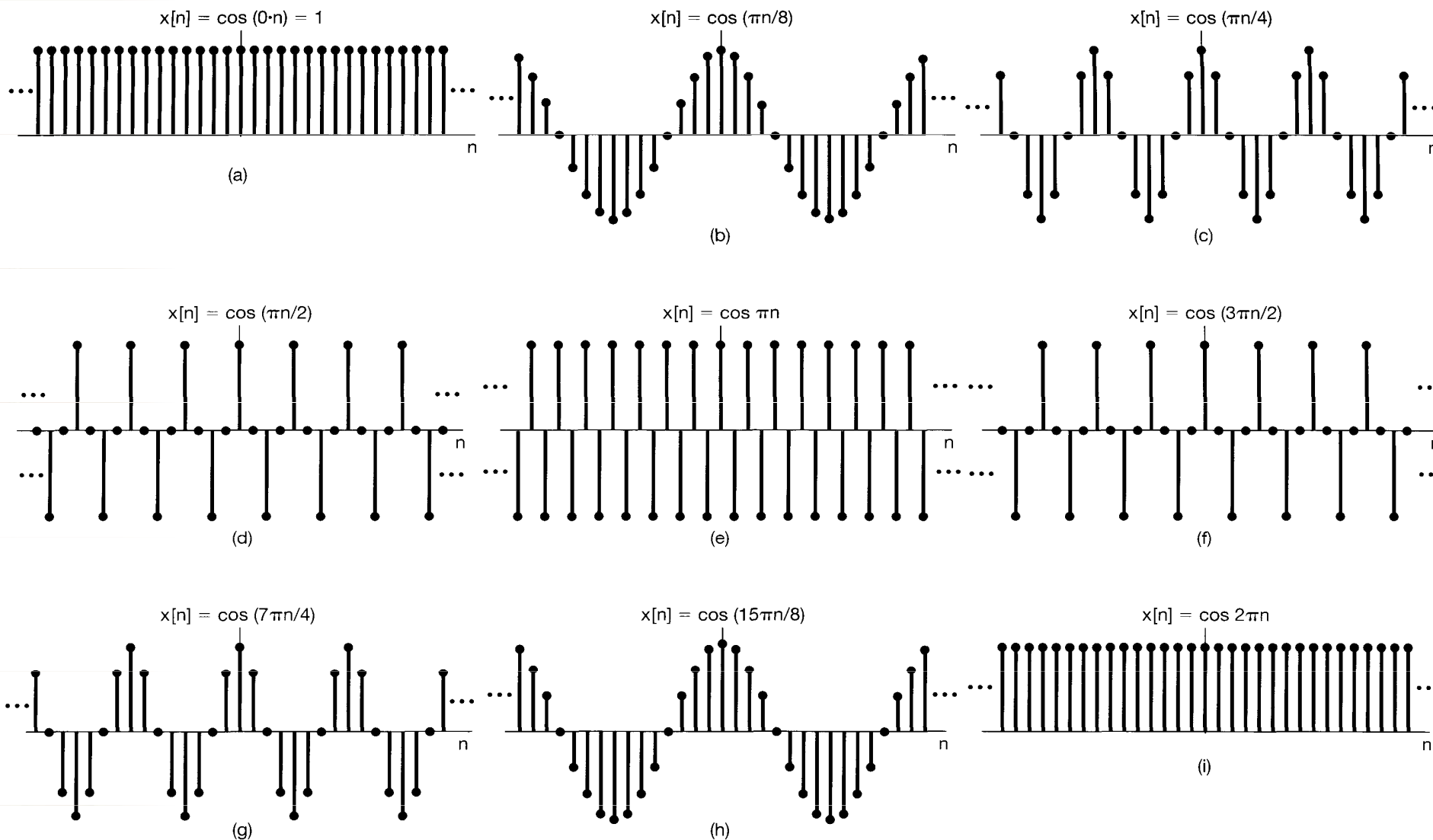


(b)



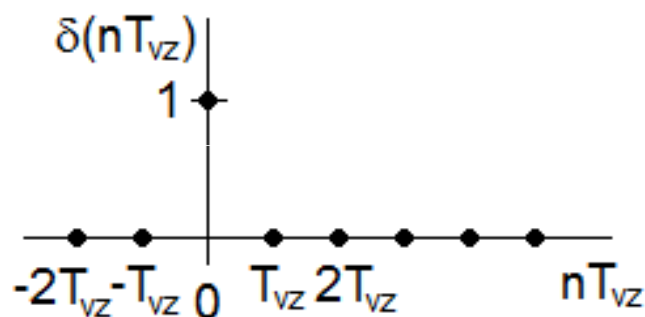
(c)

HARMONICKÁ FUNKCE A VZORKOVÁNÍ



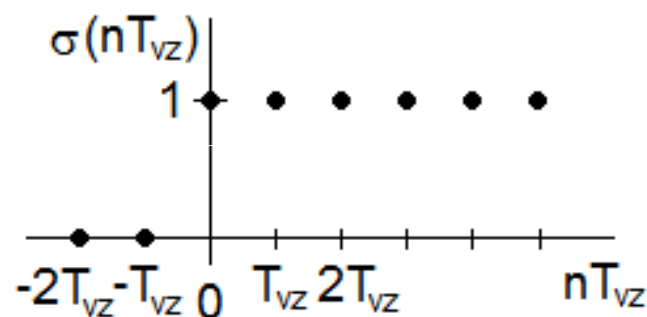
JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

- ☑ diskrétní jednotkový impulz (Kronekerovo delta)



$$\delta(nT_{vz}) = \delta(n) = \begin{cases} 1, & n = 0; \\ 0, & n \neq 0. \end{cases}$$

- ☑ diskrétní jednotkový skok



$$\sigma(nT_{vz}) = \sigma(n) = \begin{cases} 0, & n < 0; \\ 1, & n \geq 0. \end{cases}$$

JEDNORÁZOVÉ POSLOUPNOSTI

Podobně jako pro spojitou nezávisle proměnou platí i pro diskrétní, že

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz}) = f(0),$$

resp.

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(nT_{vz}) \cdot \delta(nT_{vz} - mT_{vz}) = f(mT_{vz}).$$

A také

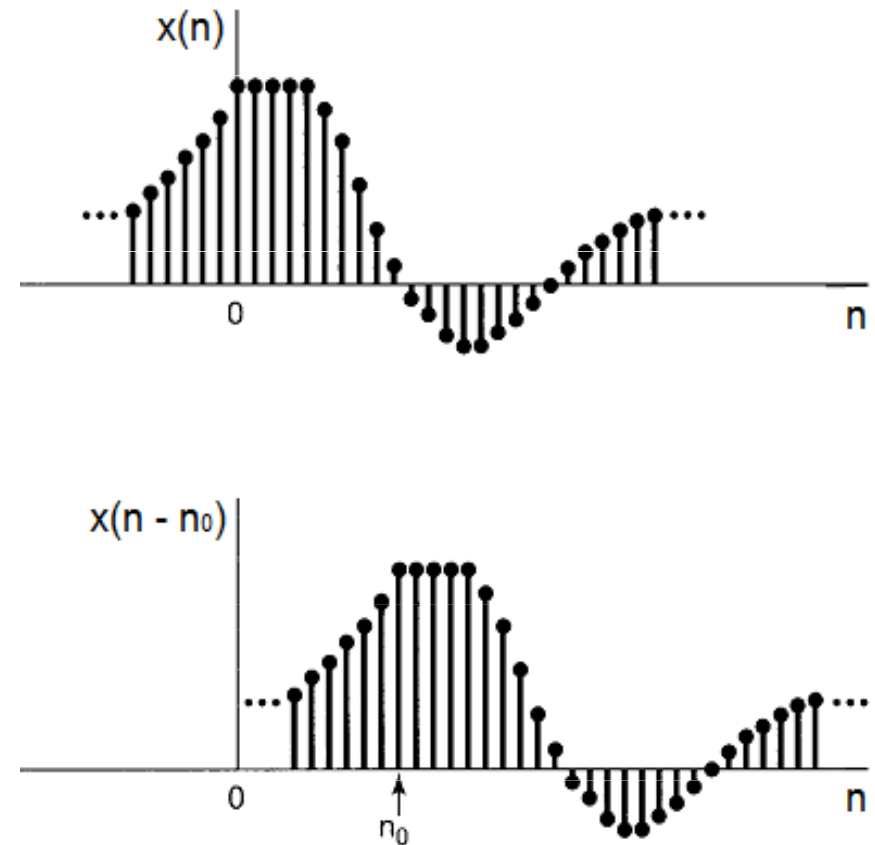
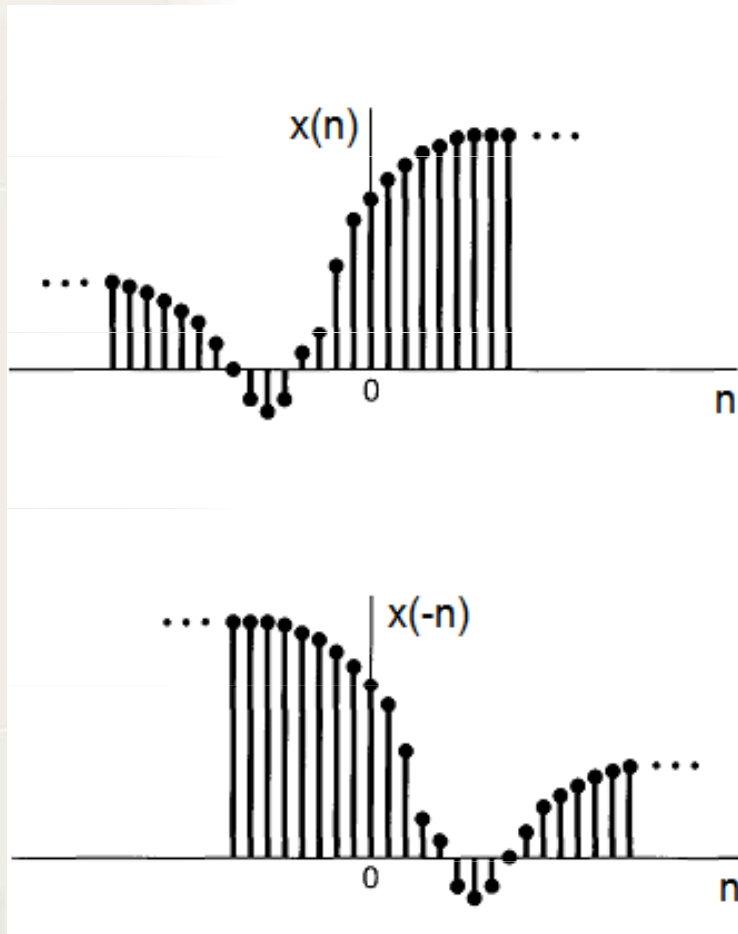
$$\sum_{n=-\infty}^m \delta(nT_{vz}) = \sigma(mT_{vz})$$

a

$$\delta(nT_{vz}) = \sigma(nT_{vz}) - \sigma[(n-1)T_{vz}].$$

ZÁKLADNÍ OPERACE S MATEMATICKÝMI

JE TO TŘEBA?



DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

☑ spojité funkce

$$x_1(t) * x_2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(\tau) \cdot x_2(t - \tau) \cdot d\tau$$

☑ diskrétní posloupnosti

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(m) \cdot x_2(n - m).$$

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_1(n - m) \cdot x_2(m).$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$$x_1(m) \quad \boxed{x_{10}} \boxed{x_{11}} \boxed{x_{12}} \boxed{x_{13}} \boxed{x_{14}} \boxed{x_{15}}$$

$$x_2(m) \quad \boxed{x_{20}} \boxed{x_{21}} \boxed{x_{22}}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1(m) \quad \boxed{x_{10}} \boxed{x_{11}} \boxed{x_{12}} \boxed{x_{13}} \boxed{x_{14}} \boxed{x_{15}} \\
 \quad \quad \quad \Sigma \quad \times \\
 x_2(-m) \quad \boxed{x_{22}} \boxed{x_{21}} \boxed{x_{20}} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1(m) \quad \boxed{x_{10}} \boxed{x_{11}} \boxed{x_{12}} \boxed{x_{13}} \boxed{x_{14}} \boxed{x_{15}} \\
 \quad \quad \quad \Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \\
 x_2(2-m) \quad \boxed{x_{22}} \boxed{x_{21}} \boxed{x_{20}} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

- ☑ pro kauzální posloupnosti, tj. takové pro které platí $x(n) = 0$ pro $n < 0$ se konvoluční vztah mění na

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^n x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

- ☑ V reálných podmínkách při zpracování reálných dat samozřejmě nejsou posloupnosti $x_1(n)$ a $x_2(n)$ nekonečné, nýbrž mají konečnou délku. Předpokládejme obecně N_1 vzorků v případě posloupnosti $x_1(n)$ a N_2 vzorků v případě posloupnosti $x_2(n)$. Dále položme $x_1(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_1-1 \rangle$ a analogicky $x_2(n) = 0$ pro $n \notin \langle 0, N_2-1 \rangle$.

$$x(n) = x_1(n) * x_2(n) = \sum_{m=0}^{\min(N_1-1, N_2-1)} x_1(m) \cdot x_2(n-m).$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$$x_1(m) \quad \boxed{x_{10}} \boxed{x_{11}} \boxed{x_{12}} \boxed{x_{13}} \boxed{x_{14}} \boxed{x_{15}}$$

$$x_2(m) \quad \boxed{x_{20}} \boxed{x_{21}} \boxed{x_{22}}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1(m) \quad \boxed{x_{10}} \boxed{x_{11}} \boxed{x_{12}} \boxed{x_{13}} \boxed{x_{14}} \boxed{x_{15}} \\
 \qquad \qquad \qquad \Sigma \quad \times \\
 x_2(-m) \quad \boxed{x_{22}} \boxed{x_{21}} \boxed{x_{20}} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

$$\begin{array}{r}
 x_1(m) \quad \boxed{x_{10}} \boxed{x_{11}} \boxed{x_{12}} \boxed{x_{13}} \boxed{x_{14}} \boxed{x_{15}} \\
 \qquad \qquad \qquad \Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \\
 x_2(2-m) \quad \boxed{x_{22}} \boxed{x_{21}} \boxed{x_{20}} \quad \Rightarrow
 \end{array}$$

DISKRÉTNÍ KRUHOVÁ KONVOLUCE

SCHÉMA VÝPOČETNÍHO ALGORITMU

$$x_1(m) \quad \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}}$$

$$x_2(m) \quad \boxed{x_{20} \quad x_{21} \quad x_{22} \quad x_{23} \quad x_{24} \quad x_{25}}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ \Sigma \\ x_2(-m) \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}} \\ \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \\ \boxed{x_{20} \quad x_{25} \quad x_{24} \quad x_{23} \quad x_{22} \quad x_{21}} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1(m) \\ \Sigma \\ x_2(2-m) \end{array} \quad \begin{array}{l} \boxed{x_{10} \quad x_{11} \quad x_{12} \quad x_{13} \quad x_{14} \quad x_{15}} \\ \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \\ \boxed{x_{22} \quad x_{21} \quad x_{20} \quad x_{25} \quad x_{24} \quad x_{23}} \end{array}$$

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

PŘÍKLAD

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1 = \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\}$ a $x_2 = \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\begin{aligned} & \{x_{10}, x_{11}, \dots, x_{13}\} * \{x_{20}, x_{21}, x_{22}\} = \\ & = (x_{10} \cdot x_{20})(x_{10} \cdot x_{21})(x_{10} \cdot x_{22}) \\ & \quad (x_{11} \cdot x_{20})(x_{11} \cdot x_{21})(x_{11} \cdot x_{22}) \\ & \quad \quad (x_{12} \cdot x_{20})(x_{12} \cdot x_{21})(x_{12} \cdot x_{22}) \\ & \quad \quad \quad (x_{13} \cdot x_{20})(x_{13} \cdot x_{21})(x_{13} \cdot x_{22}) \end{aligned}$$

součet dílčích součinů v jednotlivých sloupcích

DISKRÉTNÍ KONVOLUCE

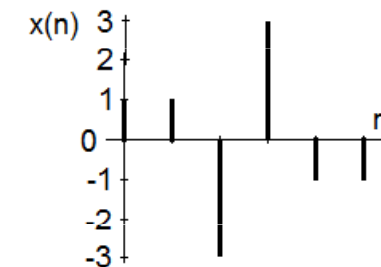
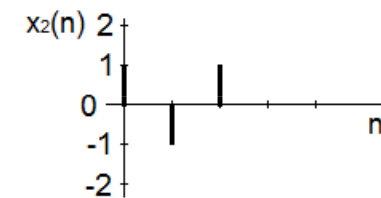
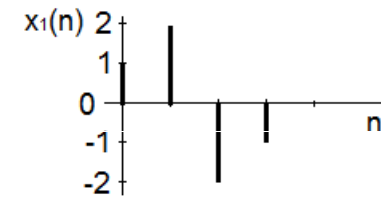
PŘÍKLAD

Vypočtěte konvoluci posloupností $x_1(n) = \{1, 2, -2, -1\}$ a $x_2(n) = \{1, -1, 1\}$.

Řešení:

Pro výpočet se také občas uvádí následující výpočetní schéma:

$$\begin{array}{r} \{1, 2, -2, -1\} * \{1, -1, 1\} = \\ = \begin{array}{ccccccc} 1 & -1 & 1 & & & & \\ & 2 & -2 & 2 & & & \\ & & -2 & 2 & -2 & & \\ & & & -1 & 1 & -1 & \\ \hline 1 & 1 & -3 & 3 & -1 & -1 & \end{array} \end{array}$$



DISKRÉTNÍ KORELACE

pro spojitý případ obecně platí

$$R_{x_1, x_2}(t_1, t_2) = E[x_1(t_1) \cdot x_2(t_2)]$$

za předpokladu stacionarity a ergodicity pro funkce s definičním oborem $t \in (-\infty, \infty)$

$$R_{x_1, x_2}(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x_1(t) \cdot x_2(t + \tau) dt$$

a abychom se vyhnuli limitním komplikacím i v podstatě nulovým hodnotám takto určené korelační funkce využívá se pouze integrální částí vztahu

$$R'_{x_1, x_2}(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) dt.$$

DISKRÉTNÍ KORELACE

na konečném intervalu

$$R_{12}(\tau) = \frac{1}{T} \int_T x_1(t)x_2(t + \tau)dt.$$

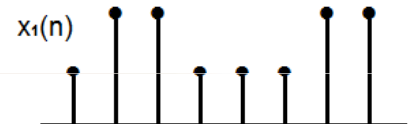
pro diskrétní posloupnost

$$R_{x_1x_2}(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x_1(nT_{vz})x_2(nT_{vz} + mT_{vz}).$$

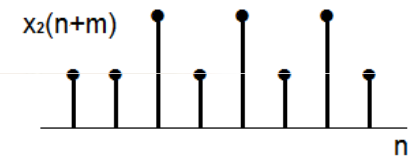
DISKRÉTNÍ KORELACE

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$



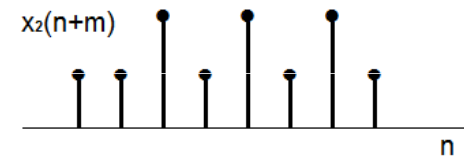
a)

$N = 8; \quad m = 1; \quad N - |m| = 7$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



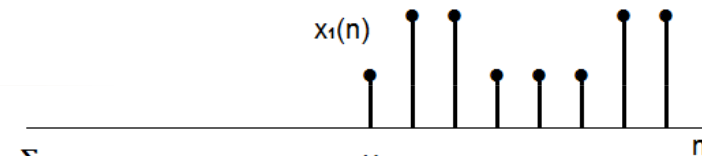
$\Sigma \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad x \quad n$



b)

$N = 8; \quad m = N-1; \quad N - |m| = 1$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



$\Sigma \quad x \quad n$



c)

$${}^1R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

$${}^2R_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1.$$

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s konstantní vahou

$${}^1\mathbb{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

každá hodnota korelační sumy se považuje za hodnotu autokorelační funkce se stejnou vahou, která se rovná převrácené hodnotě celkového počtu vzorků vstupních posloupností $x_1(n)$ a $x_2(n)$, N je délka posloupnosti. Střední hodnota tohoto odhadu je (bez důkazu)

$$E[{}^1\mathbb{R}_{x_1x_2}] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N-|m|} E[x_1(n)x_2(n+m)] = \frac{N-|m|}{N} R_{x_1x_2}(m),$$

kde $R_{x_1x_2}(m)$ je skutečná hodnota korelační funkce. To znamená, že střední hodnota odhadu se nerovná správné hodnotě, ale blíží se jí, když $N \rightarrow \infty$ a $|m| \ll N$. Platí tedy, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} E({}^1\mathbb{R}_{x_1x_2}) = R_{x_1x_2}(m),$$

odhad je asymptoticky nevychýlený.

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s konstantní vahou

$$\hat{R}_{x_1x_2}(m) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0, 1, \dots, N-1,$$

Odhad rozptylu pro posloupnosti reálných čísel je přibližně

$$\text{var}[\hat{R}_{x_1x_2}] \approx \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [R_{x_1x_2}(n)]^2 + R_{x_1x_2}(n-m)R_{x_1x_2}(n+m).$$

Protože odhad rozptylu konverguje pro $N \rightarrow \infty$ k nule, je odhad korelační funkce konzistentním odhadem $R_{x_1x_2}(m)$. Z praktického hlediska to všechno znamená, že se snižujícím se počtem součinů v korelační sumě se relativně zvyšuje váha, kterou je hodnota součtu násobena a tedy i v případě periodických posloupností není průběh jejich korelační funkce periodický, nýbrž se její kmity tlumí.

DISKRÉTNÍ KORELACE

odhad s proměnnou vahou

$${}^2\mathbb{R}_{x_1x_2}^{\square}(m) = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=0}^{N-|m|-1} x_1(n)x_2(n+m); \quad m = 0,1,\dots,N-1.$$

střední hodnota tohoto odhadu je

$$E[{}^2\mathbb{R}_{x_1x_2}^{\square}(m)] = \frac{1}{N-|m|} \sum_{n=1}^{N-|m|} E[x_1(n)x_2(n+m)] = R_{x_1x_2}(m),$$

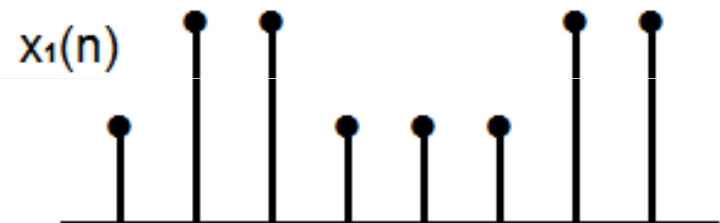
což znamená, že je rovna, pro libovolné N a m , skutečné hodnotě korelační funkce. Rozptyl tohoto odhadu

$$\text{var}[{}^2\mathbb{R}_{x_1x_2}^{\square}] \approx \frac{N}{(N-|m|)^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[|R_{x_1x_2}(n)|^2 + R_{x_1x_2}(n-m)R_{x_1x_2}(n+m) \right]$$

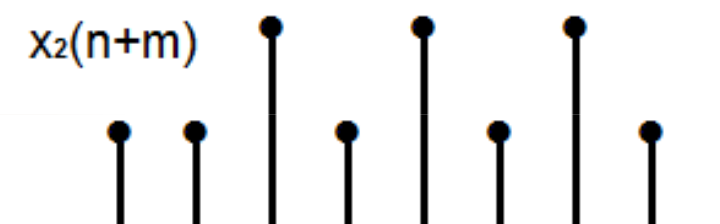
KRUHOVÁ DISKRÉTNÍ KORELACE

$N = 8; \quad m = 0; \quad N - |m| = 8$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$



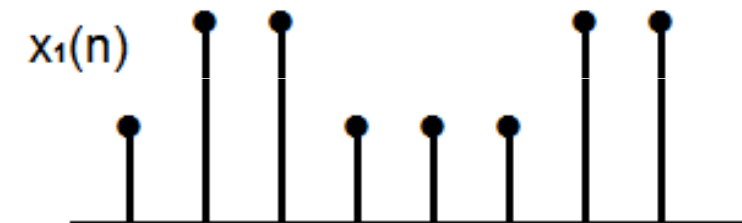
$\Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad n$



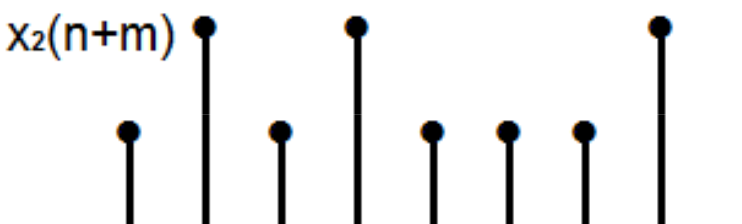
a)

$N = 8; \quad m = 3; \quad N - |m| = 5$

$n = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad \dots \quad N-1$

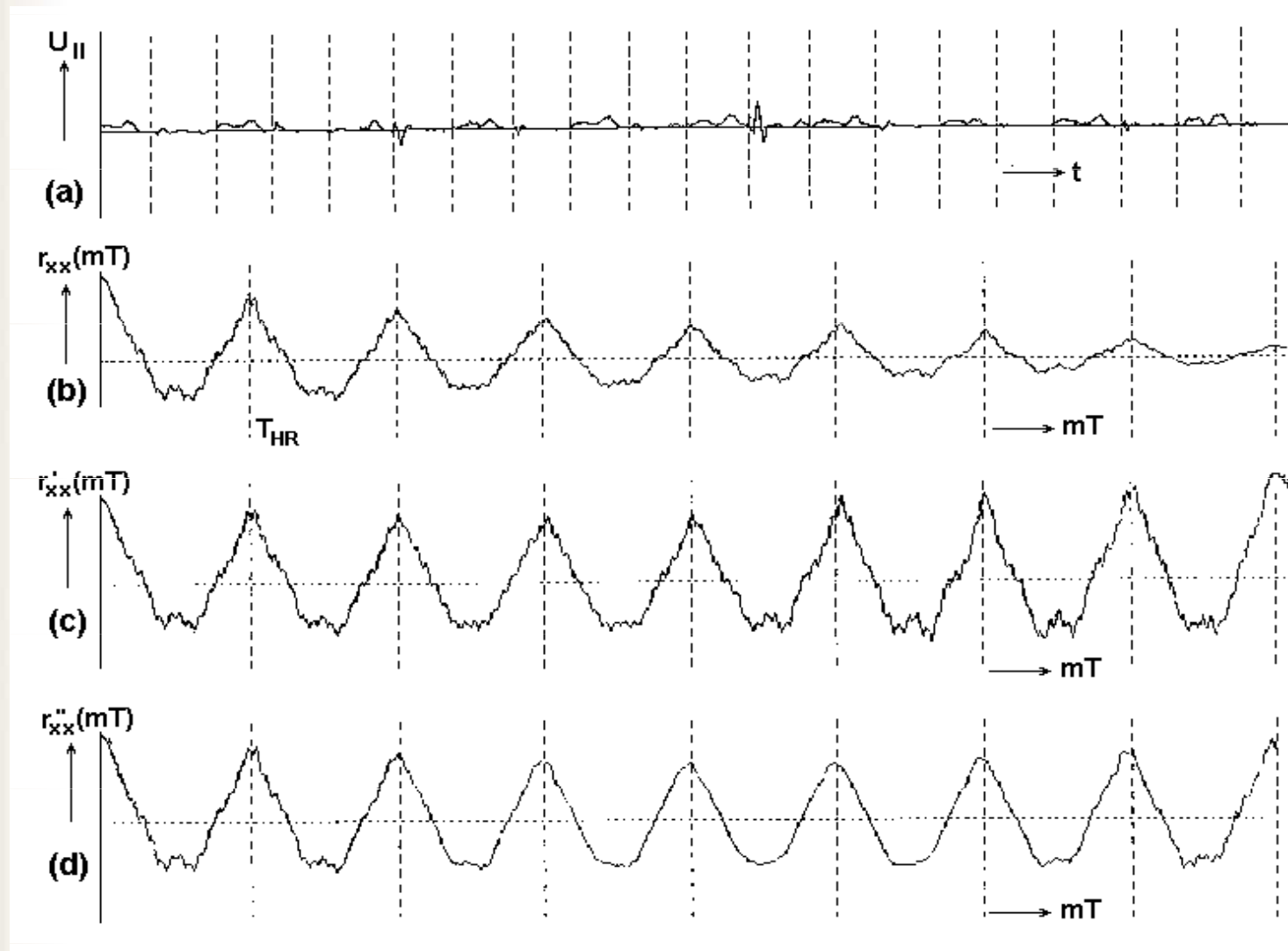


$\Sigma \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad \times \quad n$



b)

DISKRÉTNÍ KORELACE PŘÍKLAD ZE ŽIVOTA



ROZKLAD DISKRÉTNÍCH POSLOUPNOSTÍ NA DÍLČÍ HARMONICKÉ SLOŽKY

HARMONICKÁ ANALÝZA DISKRÉTNÍCH POSLOUPNOSTÍ

- ☑ diskrétní Fourierova řada
- ☑ Fourierova transformace s diskrétním časem
- ☑ diskrétní Fourierova transformace
- ☑ rychlá Fourierova transformace

ROZKLAD DISKRÉTNÍHO PERIODICKÉHO SIGNÁLU

☑ spojitý signál – opakování

Fourierova řada (v komplexním tvaru)

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\Omega t} \quad \Omega = 2\pi / T$$

kde c_n jsou komplexní **Fourierovy koeficienty**

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) \cdot e^{-jn\Omega t} dt$$

Ω – úhlový kmitočet základní harmonické složky (**základní harmonická**);

FOURIEROVA ŘADA PRO DISKRÉTNÍ SIGNÁLY

- ☑ necht' $x(kT_{vz})$ je periodický signál s periodou NT_{vz} ; pak $x(kT_{vz})$ lze rozložit pomocí komplexní exponenciální Fourierovy řady

$$x(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp\left(\frac{j2\pi nk}{N}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} x(kT_{vz}) \cdot \exp\left(-\frac{j2\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

FOURIEROVA ŘADA

DŮKAZ

- ☑ změňme index sumace ve vztahu pro výpočet koeficientu c_n

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \exp(-2j\pi mn / N)$$

$$\begin{aligned} x(kT_{vz}) &= \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp(2j\pi nk / N) = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1}{N} \left(\sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \exp(-2j\pi mn / N) \right) \cdot \exp(2j\pi nk / N) = \\ &= \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m) / N], \end{aligned}$$

FOURIEROVA ŘADA

DŮKAZ

potom

$$\text{pro } k = m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m)/N] = N$$

$$\text{pro } k \neq m \text{ je } \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m)/N] = \frac{1 - \exp[2j\pi N(k - m)/N]}{1 - \exp[2j\pi(k - m)/N]} = 0$$

(součet N členů geometrické posloupnosti $s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}$)

$$\boxed{x(kT_{vz})} = \frac{1}{N} \sum_{m=0}^{N-1} x(mT_{vz}) \cdot \sum_{n=0}^{N-1} \exp[2j\pi n(k - m)/N] =$$
$$= \frac{1}{N} x(kT_{vz}) \cdot N = \boxed{x(kT_{vz})} \quad \text{c.b.d.}$$

FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD

$x(kT_{vz}) = A \cdot \cos(2\pi k/N)$ je periodická funkce s periodou N

$$A \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2} \cdot \left[\exp \frac{2j\pi k}{N} + \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right) \right]$$

Nyní, protože

$$\exp \frac{2j\pi k(N-1)}{N} = \exp \frac{2j\pi kN}{N} \cdot \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right) = \exp \left(-\frac{2j\pi k}{N} \right);$$

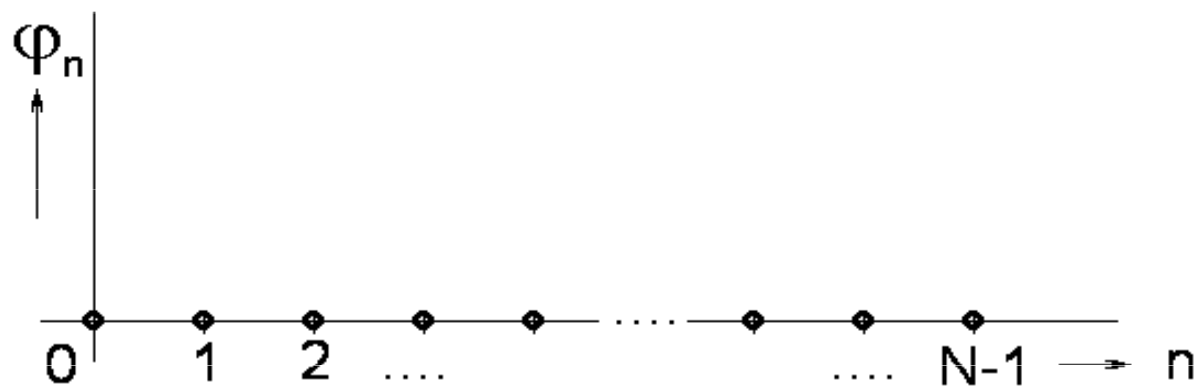
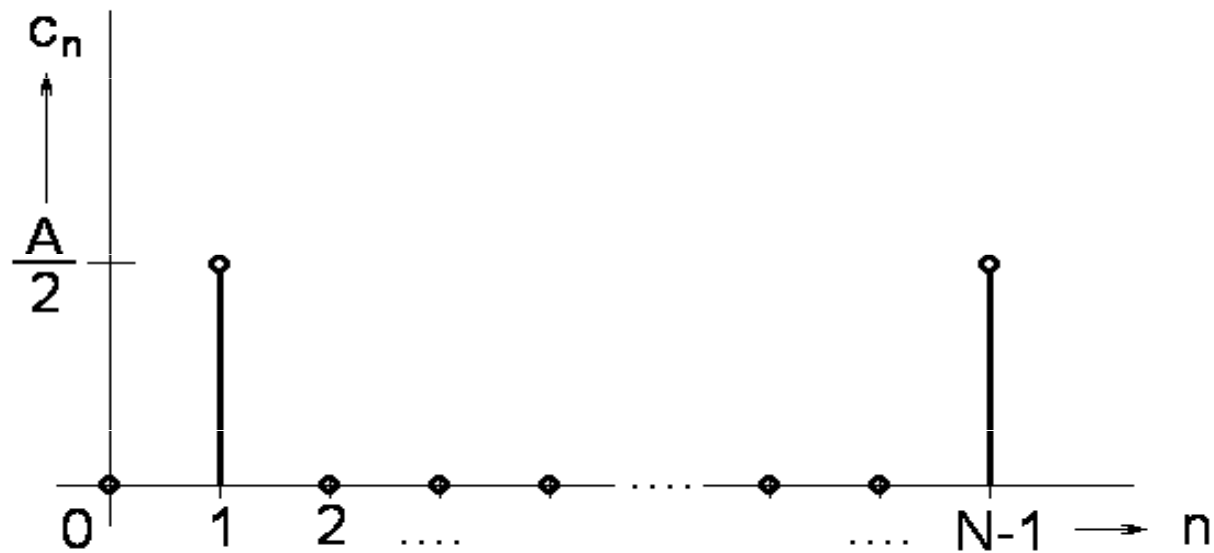
proto

$$A \cdot \cos \frac{2\pi k}{N} = \frac{A}{2} \cdot \left[\exp \frac{2j\pi k}{N} + \exp \left(\frac{2j\pi(N-1)k}{N} \right) \right]$$

$$a_1 = \frac{A}{2}, \quad a_{N-1} = \frac{A}{2}, \quad a_n = 0 \text{ pro všechna jiná } n$$

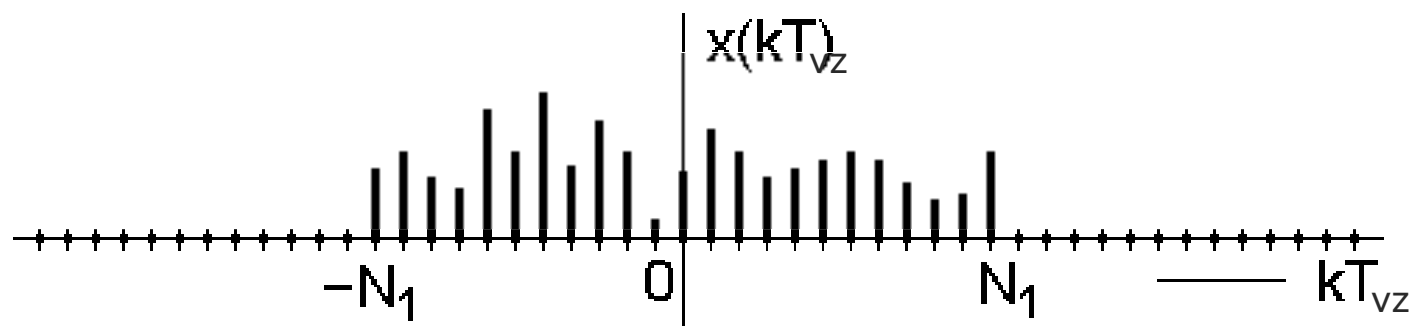
FOURIEROVA ŘADA

PŘÍKLAD



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

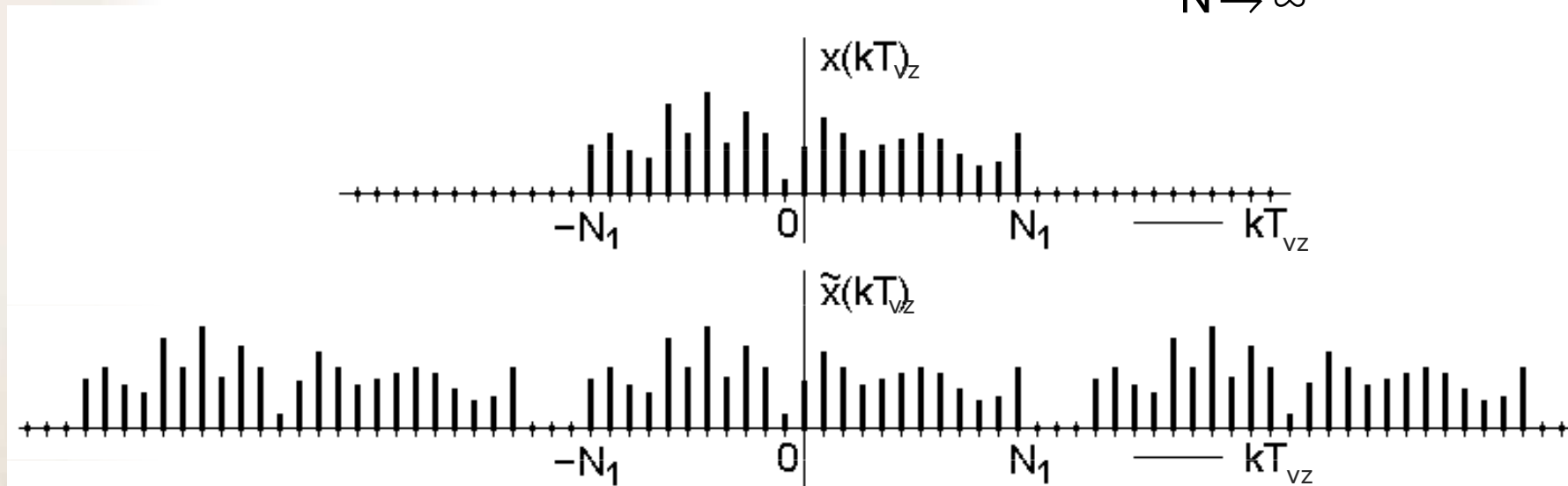
- ☑ necht' $x(kT_{vz})$ je časově omezený signál s diskretním časem s $x(kT_{vz})=0$ pro všechna celá $k > N_1$ a $k < -N_1$, kde N_1 je celočíselná konstanta.



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

dále, nechť pro kladné sudé celé číslo $N > 2N_1$ označíme $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ periodický signál s periodou NT , který je $x(kT_{vz})$ pro $k = -N/2, -(N/2)+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, (N/2)-1$.

z definice $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ máme $x(kT_{vz}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \tilde{x}_N(kT_{vz})$



FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- ☑ protože $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ je periodická funkce s periodou NT_{vz} , má Fourierovu řadu

$$\tilde{x}_N(kT_{vz}) = \sum_{n=0}^{N-1} c_n \cdot \exp\left(\frac{2j\pi nk}{N}\right)$$

kde

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2}^{(N/2)-1} \tilde{x}_N(kT_{vz}) \cdot \exp\left(-\frac{2j\pi kn}{N}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

FOURIEROVA TRANSFORMACE S DISKRÉTNÍM ČASEM - DTFT

- ☑ Z definice $\tilde{x}_N(kT_{vz})$ vyplývá, že lze poslední uvedenou rovnici přepsat do tvaru

$$c_n = \frac{1}{N} \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp\left(-\frac{2j\pi knT_{vz}}{NT_{vz}}\right), \quad n = 0, 1, \dots, N-1,$$

a potom

$$X(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT_{vz}) \cdot \exp(-jk\omega T_{vz}), \quad \omega = 2\pi n / NT_{vz}$$

kde ω je pro $N \rightarrow \infty$ spojitá (nediskrétní) veličina.

DISKRÉTNÍ FOURIEROVA TRANSFORMACE - DFT

- ☑ aby bylo možné počítat s frekvenčním spektrem na počítači, je třeba spektrální funkci diskretizovat;
- ☑ předpokládejme, že diskrétní veličina $x(nT_{vz})=0$ pro $n < 0$ a $n \geq N-1$, pak DFT je definována vztahem

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega nT} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk \frac{2\pi}{NT_{vz}} nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N}$$

ZPĚTNÁ DISKRÉTNÍ FT – DFT⁻¹

$$x(nT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jnT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

$$x(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \cdot e^{j2\pi kn/N}$$

INVERZIBILITA DFT

$$\mathcal{DFT}^{-1}\{\mathcal{DFT}(x)\} = x$$

$$x(mT_{vz}) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k\Omega) \cdot e^{jmT_{vz}k\Omega} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \left(\sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega nT_{vz}} \right) \cdot e^{jmT_{vz}k\Omega} =$$

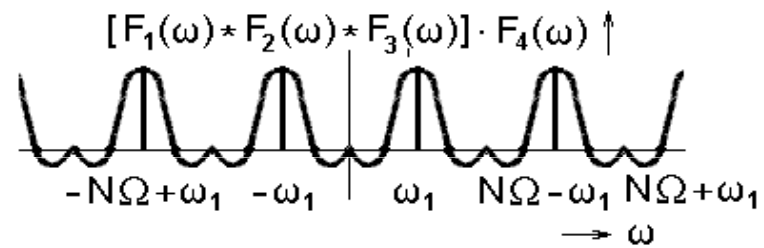
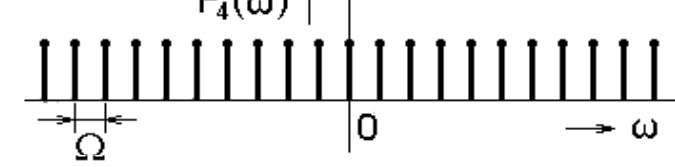
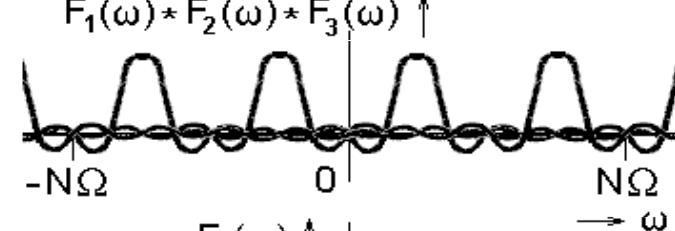
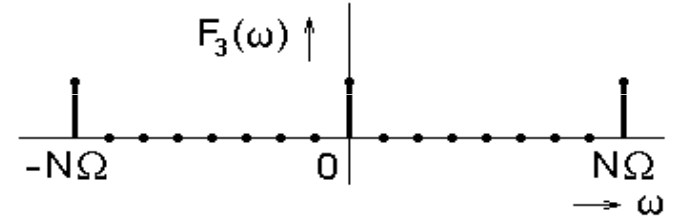
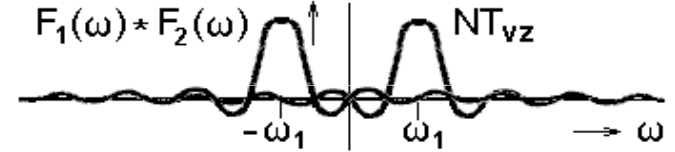
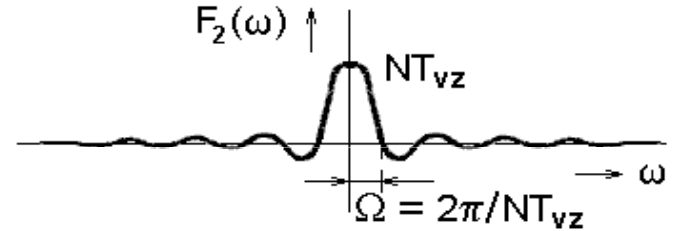
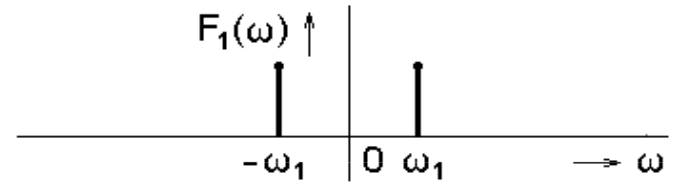
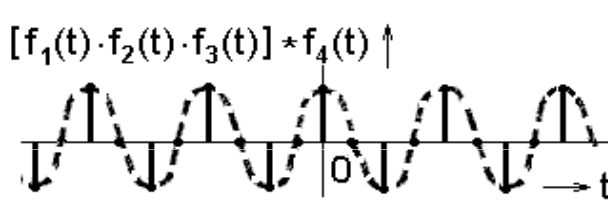
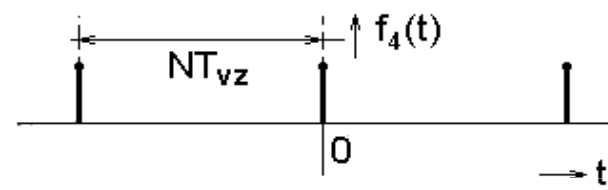
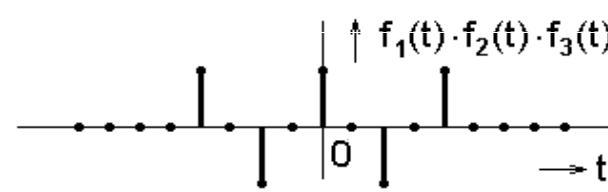
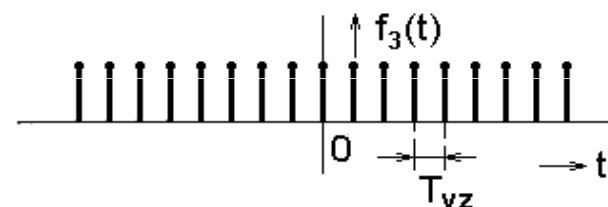
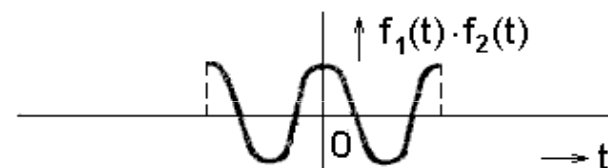
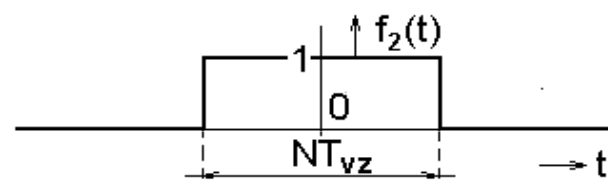
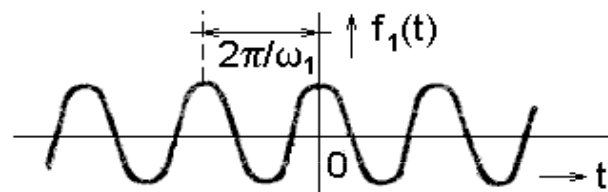
$$= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \left| \begin{array}{l} \text{pro } m = n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = N \\ \text{pro } m \neq n \text{ je } \sum_{k=0}^{N-1} e^{j(m-n)k\Omega T_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} \frac{1 - e^{j(m-n)N\Omega T_{vz}}}{1 - e^{j(m-n)\Omega T_{vz}}} = 0 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{N} x(mT_{vz}) \cdot N = x(mT_{vz}) \quad \Omega = 2\pi / NT_{vz}$$

DFT

$$\omega_1 = 2\Omega$$

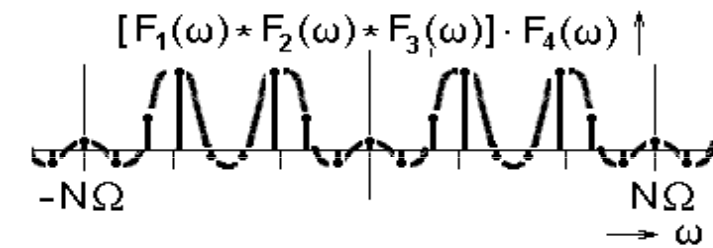
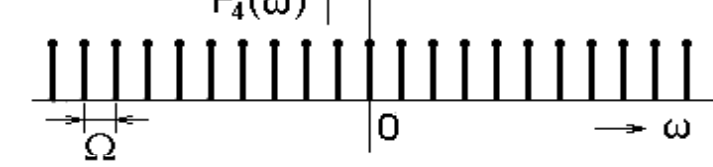
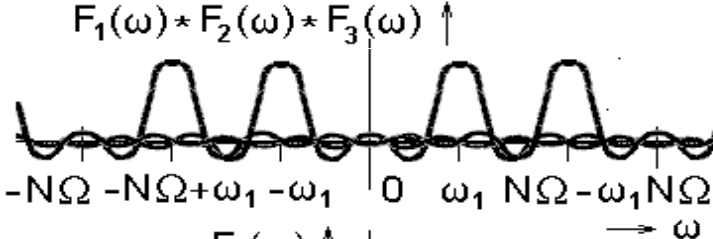
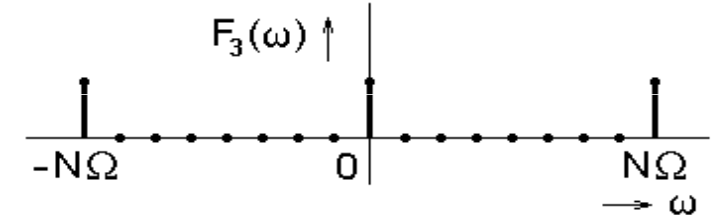
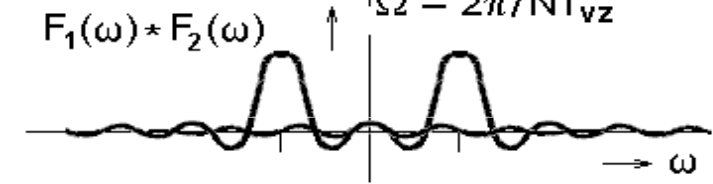
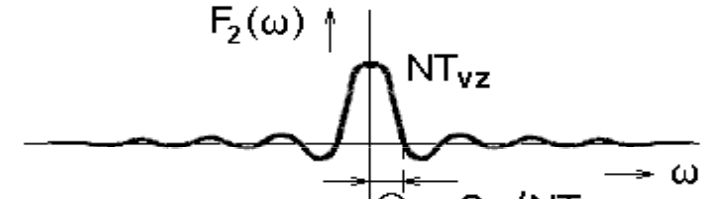
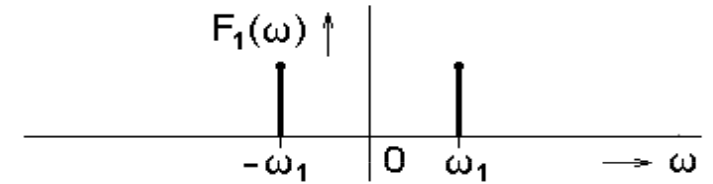
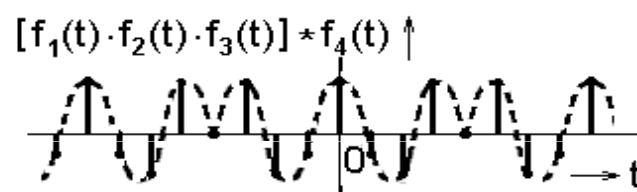
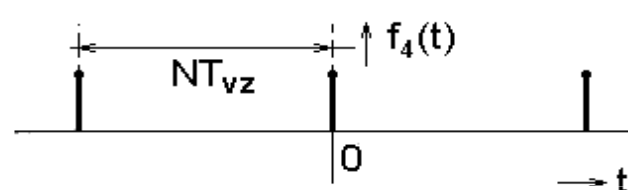
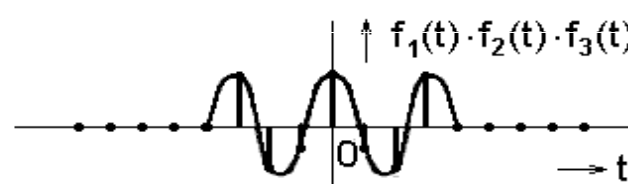
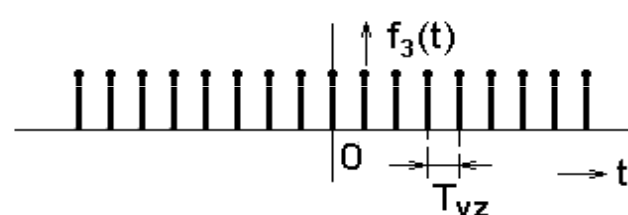
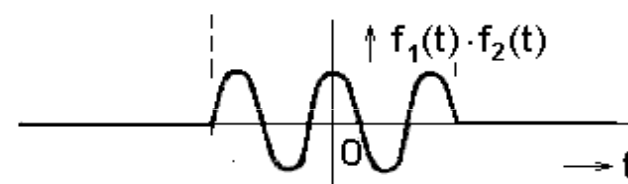
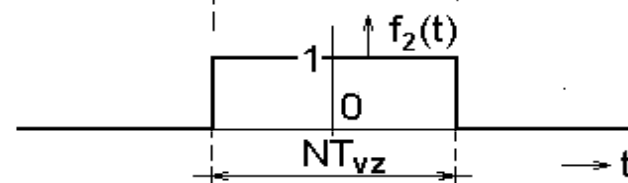
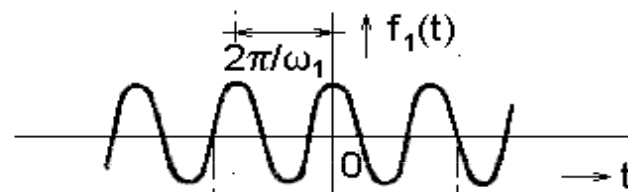
$$= 4\pi/NT_{vz}$$



DFT

$$\omega_1 = 2,5\Omega$$

$$= 5\pi/NT_{vz}$$

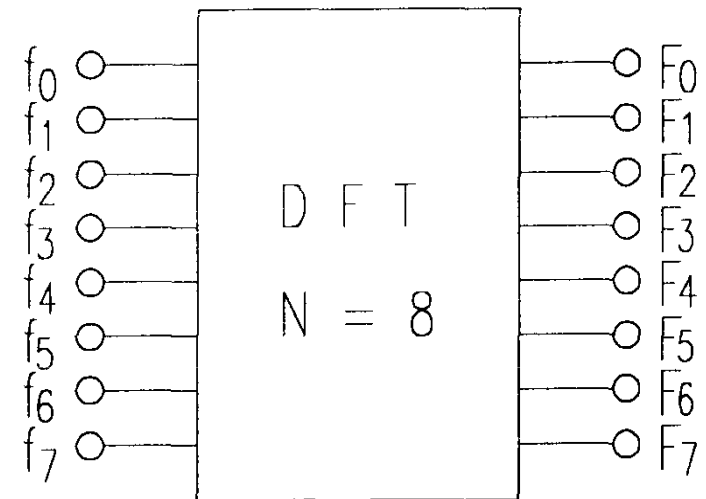


RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

$$X(k\Omega) = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot e^{-jk\Omega nT_{vz}} = \sum_{n=0}^{N-1} x(nT_{vz}) \cdot (\cos(k\Omega nT_{vz}) - j \sin(k\Omega nT_{vz}))$$

$$X(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot e^{-j2\pi kn/N} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) \cdot (\cos(2\pi kn/N) - j \sin(2\pi kn/N))$$

- ✓ hodnoty funkcí cos a sin se používají z tabulek pro čtvrtinu periody;
- ✓ zrychlení výpočetního algoritmu se dosáhne využitím dříve vypočítaných mezivýsledků, resp. vynecháním zbytečných výpočtů – např. násobení nulou;



RYCHLÁ FOURIEROVA TRANSFORMACE - FFT

FFT – (Cooley, Tukey – 1965, ale před nimi již i mnozí další od 1903)

- rozklad v časové oblasti;
- rozklad ve frekvenční oblasti

jednotka pracnosti P – jedno komplexní násobení a sečítání

pracnost výpočtu jednoho vzorku spektra – $N \cdot P$

pracnost celé transformace – $N \cdot N \cdot P = N^2 \cdot P$

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

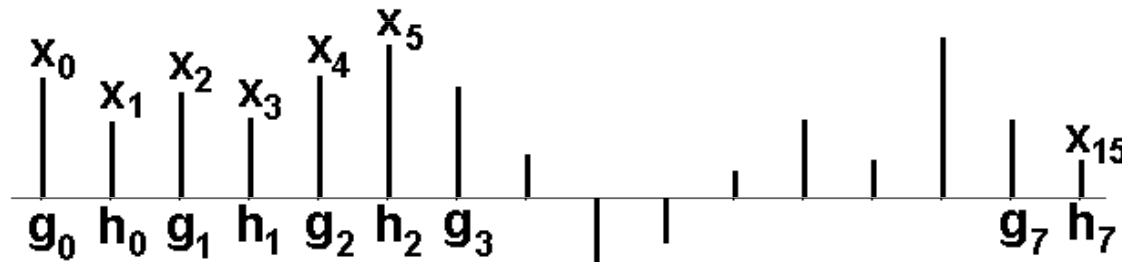
- ✓ vstupní posloupnost o sudém počtu vzorku rozdělíme na dvě dílčí posloupnosti

$\{g_i\} = \{x_{2i}\}$ - sudé prvky původní posloupnosti,

$\{h_i\} = \{x_{2i+1}\}$ - liché prvky původní posloupnosti,

$$i=0,1,\dots, N/2-1$$

předpokládáme, že každá z posloupností (původní i obě dílčí), mají svou DFT



FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$G(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} g_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

$$H(k) = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N/2}} = \sum_{i=0}^{N/2-1} h_i \cdot e^{-\frac{j4\pi ik}{N}}$$

$$k \in \langle 0, N/2 - 1 \rangle$$

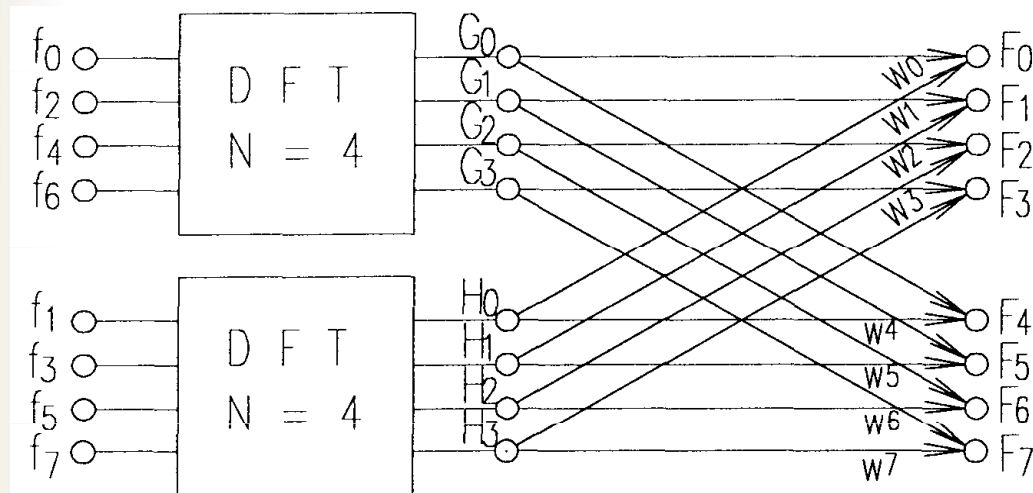
FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = \sum_{i=0}^{N-1} x_i \cdot e^{-\frac{j2\pi ik}{N}} = x_0 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}0k} + x_1 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}1k} + x_2 \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}2k} + \dots + x_{N-1} \cdot e^{-j\frac{2\pi}{N}(N-1)k} =$$

$$= \begin{vmatrix} g_0 = x_0 & g_1 = x_2 & g_2 = x_4 & g_7 = x_{14} \\ h_0 = x_1 & h_1 = x_3 & h_2 = x_5 & h_7 = x_{15} \end{vmatrix} = \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi(2i+1)k}{N}} \right) =$$

$$= \sum_{i=0}^{N/2-1} \left(g_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} + h_i \cdot e^{-\frac{j2\pi 2ik}{N}} \cdot e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \right) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \cdot H(k') \quad k' = k \bmod(N/2)$$



$$W^m = e^{-j\frac{2\pi}{N}m}$$

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

$$X(k) = G(k') + e^{-\frac{j2\pi k}{N}} \cdot H(k') \quad k' = k \bmod (N/2)$$

- ✓ výsledná pracnost bude součtem pracností výpočtu spekter obou posloupností

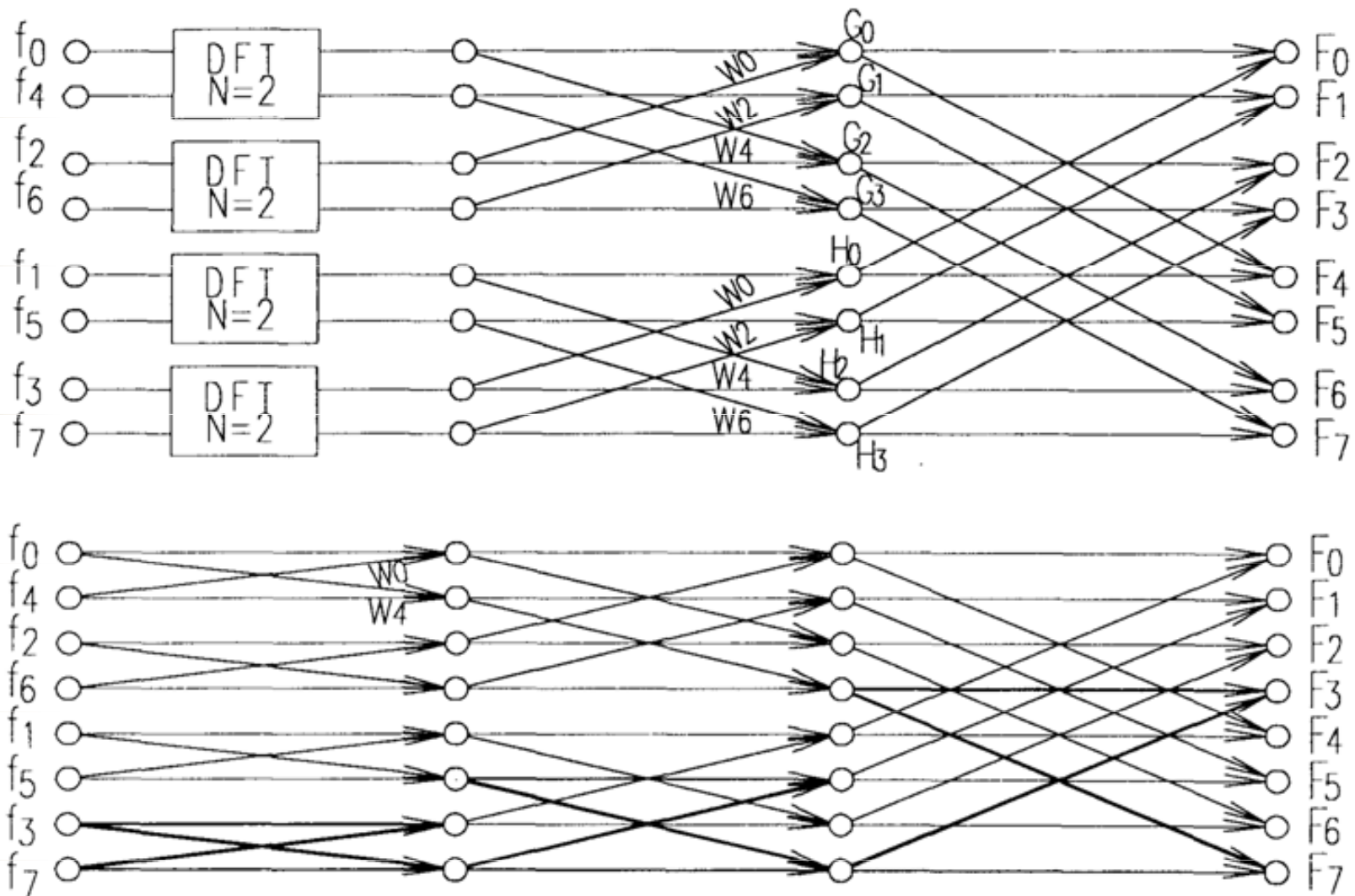
$$2 \cdot (N/2)^2 \cdot P + N \cdot P$$

tzn. uspořeni pracnosti téměř na polovinu;

- ✓ je-li $N/2$ opět sudé, může se v dělení pokračovat – celkově je výhodné, je-li $N = 2^m$

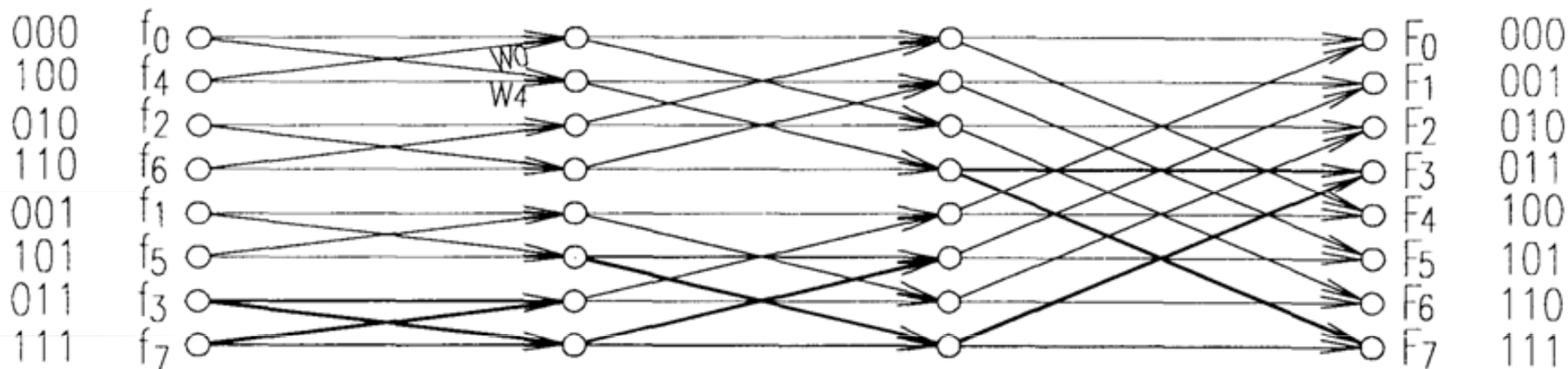
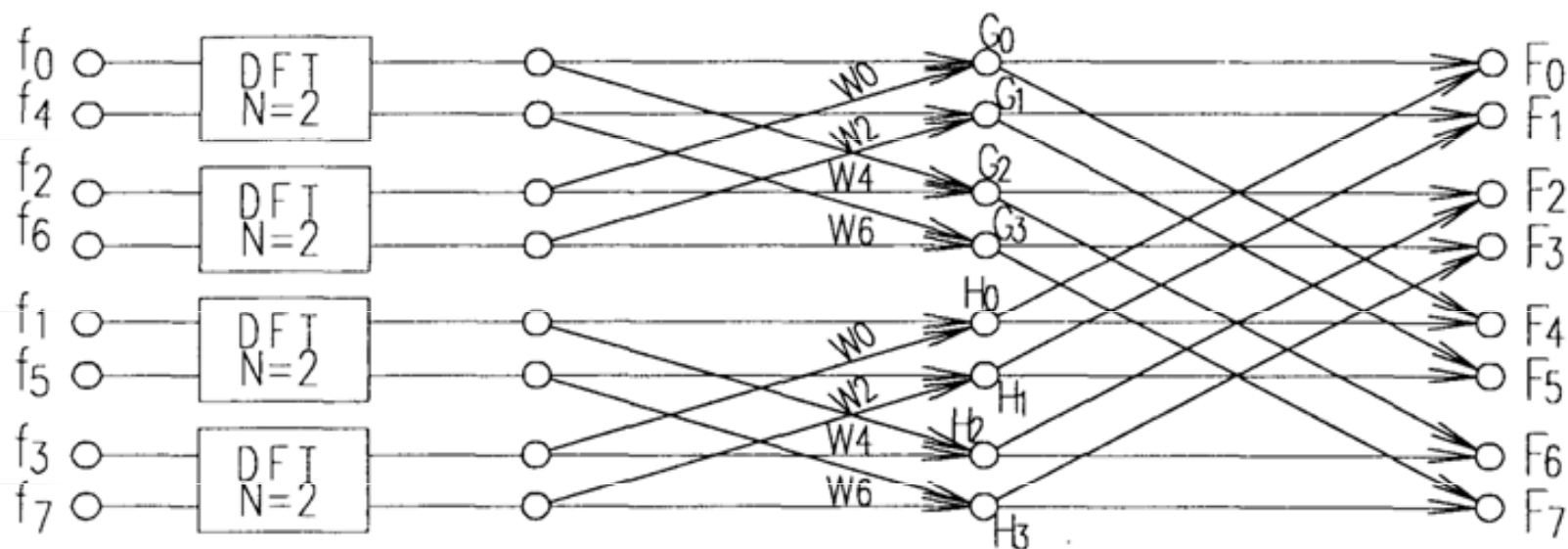
FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI



FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI



FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ každý uzel v grafu představuje jedno komplexní násobení a součet
- ☑ N uzlů ve vrstvě; celkem m vrstev $m = \log_2 N$
- ☑ celková pracnost:

$$P.N.m = P.N.\log_2 N$$

to představuje při $N=8$ úsporu 60%, při $N=1024$ již téměř 99% a při $N=131072=2^{17}$ dokonce 99,99%

FFT

ROZKLAD V ČASOVÉ OBLASTI

- ☑ výstup je uspořádán přirozeně; vstup je v bitově inverzním pořadí;
- ☑ opakující se struktury „motýlků“ obsahujících 4 uzly a 4 hrany

REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

Předpokládejme, že původní spojitá funkce $x_a(t)$ měla frekvenčně omezené spektrum $X_a(f)$, tj. platí pro ni

$$X_a(f) = \begin{cases} X(f) & |f| \leq f_{vz} / 2 \\ 0 & |f| > f_{vz} / 2 \end{cases}$$

kde je $X(f)$ frekvenční spektrum dané posloupnosti. Protože víme, že spektrum navzorkované posloupnosti je periodické s periodou danou vzorkovací frekvencí, zajímá nás pouze její jedna (první) perioda, pro kterou v rozsahu frekvencí $|f| \leq f_{vz}/2$ platí

$$X_a(f) = X(f) = T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f n T_{vz}}$$

REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

Potom pro původní funkci $x_a(t)$ je

$$\begin{aligned}x_a(t) &= \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} X_a(f) \cdot e^{j2\pi ft} df = \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} \left[T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi fnT_{vz}} \right] \cdot e^{j2\pi ft} df = \\&= T_{vz} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \int_{-f_{vz}/2}^{f_{vz}/2} e^{j2\pi f(t-nT_{vz})} df = \left| \int e^{ax} dx = \frac{1}{a} e^{ax} + C \right| = \\&= \frac{1}{f_{vz}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \frac{e^{j2\pi(t-nT_{vz}) \cdot f_{vz}/2} - e^{-j2\pi(t-nT_{vz}) \cdot f_{vz}/2}}{j2\pi(t-nT_{vz})} = \\&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_{vz}) \cdot \text{Si} \left(\pi(t-nT_{vz}) \cdot \frac{1}{T_{vz}} \right)\end{aligned}$$

tj. původní funkce je dána nekonečným součtem vzorkovacích funkcí, které procházejí každou hodnotou $x_a(t)$ z nekonečného počtu vzorků navzorkované posloupnosti.

REKONSTRUKCE SPOJITÉ FUNKCE Z NAVZORKOVANÉ POSLOUPNOSTI

