1 Průběh funkce jedné reálné proměnné

V této kapitole si ukážeme využití všech dosavadních znalostí pro řešení složitějšího matematického úkolu. Tyto úlohy se zpočátku zdají nepřekonatelně složité, ale ve skutečnosti tomu tak vůbec není. Nejdříve si popíšeme obecný postup při řešení průběhu funkce jedné reálné proměnné a potom si vše projdeme na konkrétních příkladech. Pro zájemce je zde přiloženo i několik příkladů na procvičení.

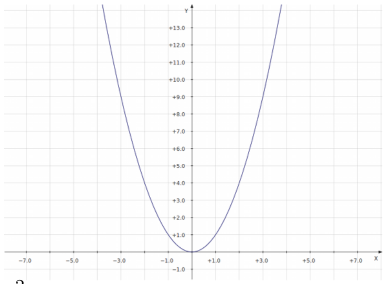
1.1 Obecný postup

1. krok
   - Určit definiční oboru funkce.
   - Určit průsečíky s osami
   - Zjistit intervaly, ve kterých je graf funkce pod a nebo nad osou x.
   - Určit paritu funkce (je-li sudá nebo lichá)
   - Zjistit je-li funkce periodická nebo není
2. krok
   - Určit první derivaci funkce
   - Určit nulové body derivace funkce
   - Zjistit intervaly, ve kterých je funkce rostoucí nebo klesající a určit lokální maxima a minima funkce.
3. krok
   - Určit druhou derivace funkce a určit její nulové body
   - Zjistit intervaly, kdy je funkce konvexní (nad tečnou) nebo konkávní (pod tečnou).
   - Určit inflexní body funkce
4. krok
   - Určit asymptoty bez směrnice (pokud existují)
   - Určit asymptoty se směrnicí (pokud existují)
5. krok
   - Určit důležité funkční hodnoty (pro lokální extrémy a inflexní body)
   - Načrtnout graf funkce

1.2 Jak řešit jednotlivé kroky

1. krok
   Musíme nalézt největší podmnožinu v $\mathbb{R}$, pro kterou má zadaná funkce smysl. V praxi to znamená vyloučit body, ve kterých je jmenovatel zlomku rovný 0, nebo najít interval kladných čísel x pro funkci ln a podobně. Všechny body pro které nemá zadaná funkce smysl si pečlivě zapíšeme.

   Dále je třeba určit průsečíky s osami grafu. Pro průsečík s osou y platí, že $x = 0$ a pro průsečík s osou x musí být $y = 0$. Průsečíky s osou x také nazýváme **nulovými body**. Tyto nulové body nám společně s body nespojitosti rozdělí definiční obor funkce na intervaly, kde může funkce měnit svou funkční hodnotu z kladné na zápornou a obráceně. Nejjednodušší postup řešení je tedy načrtnout si číselnou osu, na ní si zvýraznit nulové body a body nespojitosti a v každém vzniklém intervalu si zvolit za x takové číslo, se kterým se nám bude snadno počítat funkční hodnota. Intervaly si označíme znaménkem + pro kladné a znaménkem − pro záporné funkčí hodnoty. Je třeba prozkoumat všechny intervaly, protože ne vždy dochází ke střídání znamének funkčních hodnot v nulovém bodě. Příkladem může být funkce $y = x^2$ která má sice nulový bod pro $x = 0$, ale v obou intervalech definičního obory nabývá pouze kladných funkčních hodnot.

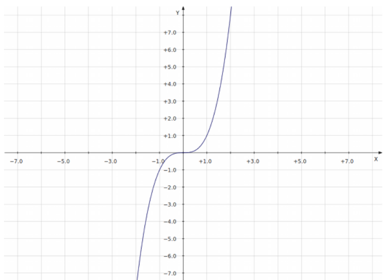


Obrázek 1: Graf funkce $y = x^2$ s vyznačeným nulovým bodem $x = 0$. V tomto bodě však funkce nemění znaménko funkční hodnoty.

Pro sudou funkci platí, že její graf je symetrický podle osy y. Z matematického pohledu to znamená, že pro každé x z definičního oboru musí existovat v definičním oboru číslo opačné $-x$ a funkční hodnoty obou čísel musí být shodné $f(x) = f(-x)$. Nalezneme li tedy v definičním oboru jeden bod nespojitosti různý od 0, nemůže být splněna podmínka existence bodu opačného a tedy funkce nemůže být sudá, a jak si ukážeme dále, ani lichá. Pro lichou funkci platí, že její graf je symetrický podle počátku soustavy souřadnic. Z matematického pohledu to znamená, že pro každé x z definičního oboru musí existovat číslo opačné $-x$ a pro funkční hodnoty platí $f(x) = (-1).f(-x)$.

Pro periodické funkce platí, že u nich dochází k pravidelnému opakování funkčních hodnot v tak zvaných periodách. Příkladem periodických funkcí jsou funkce goniometrické. Pro klid čtenáře můžeme sdělit, že periodických funkcí není mnoho.

2. krok
   V tomto kroku určíme extrémy funkce. Jak víme z definice derivace funkce, odpovídá derivace funkce v bodě x_0 směrnici tečny ke grafu funkce v daném bodě. Pro extrémy platí, že v nich je tečna ke grafu rovnoběžná s osou x. Derivace funkce v tomto bodě je rovna 0. Toto je podmínka nutná pro hledání extrému funkce, nikoli však dostačující. Například funkce x^3 má v bodě $x = 0$ derivaci rovnou 0, ale v tomto bodě nemá funkce ani minimum, ani maximum.

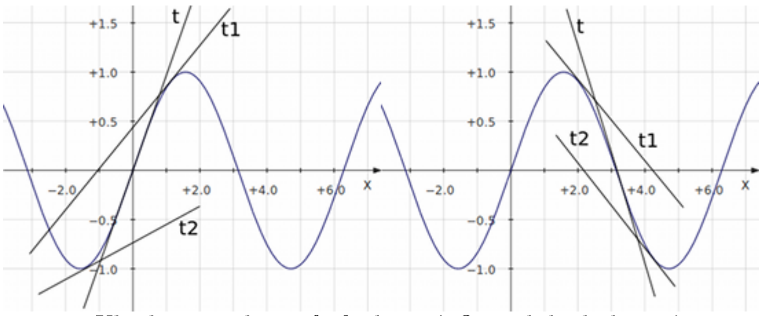


Obrázek 2: Graf funkce $y = x^3$ s vyznačenou tečnou v bodě $x = 0$. V tomto bodě má funkce první derivaci rovnou 0, ale nemá zde lokální extrém.

Jak tedy budeme postupovat? Podobně jako v předchozím kroku, budeme ale pracovat s první derivací funkce. Nejdříve tedy funkci zderivujeme a nalezneme nulové body této nové funkce. Budeme tedy hovořit o podezřelých bodech, matematicky o stacionárních bodech.

Tyto body si vyneseme do číselné osy společně s body nespojitosti. Stejně jako v předchozím případě vybereme v každém vzniklém intervalu jednu hodnotu a zjistíme je-li funkční hodnota derivace funkce kladná, nebo záporná. V případě kladné funkční hodnoty je funkce v daném intervalu rostoucí a interval si označíme znaménkem $+$, nebo šipkou $\nearrow$. Pro zápornou funkční hodnotu se jedná o funkci klesající. Uvedený interval si označíme znaménkem $-$, nebo pro lepší přehled šipkou $\searrow$. Extrém se nachází v případě střídání znamének funkčních hodnot v sousedních intervalech. Je-li funkce v levém intervalu rostoucí (klesající) a v pravém klesající (rostoucí), jedná se o lokální maximum (minimum).

3. krok
   Zde se zaměříme na konvexnost (graf funkce je v daném intervalu nad tečnou) a konkávnost funkce (graf funkce je v daném intervalu pod tečnou) a na body přechodu v průběhu funkce mezi těmito dvěma stavy -inflexní body. Řešení tohoto problému bude podobné předchozímu bodu, jen použijeme druhé derivace funkce. Proč je tomu tak? Podíváme-li se na následující obrázek, zjistíme, že v případě inflexního bodu je tečna nejstrmější v porovnaní s běžnými body. Směrnice tečny v daném bodě je derivací funkce v daném bodě a proto v inflexním bodě nebývá první derivace funkce svých extrémních hodnot. Budeme tedy hledat extrémy první derivace zadané funkce a ty se hledají za užití derivace. Budeme tedy potřebovat derivaci derivace funkce, tedy druhou derivaci zadané funkce.



Obrázek 3: Ukázka tečen ke grafu funkce v inflexních bodech a mimo tyto body.

Konkrétní postup bude tedy následující. Nejdříve určíme druhou derivaci zadané funkce a nalezneme její nulové body. Tyto nulové body společně s body, ve kterých není funkce definována, vyneseme do číselné osy. Ve vzniklých intervalech si zvolíme body, pro které bude nejjednodušší spočítat funkční hodnotu druhé derivace funkce. Je-li tato hodnota kladná, jedná se o funkci konvexní a graf dané funkce bude nad tečnou, takový interval si označíme znaménkem $+$, nebo ještě lépe znaménkem $\smile$. V případě záporné funkční hodnoty druhé derivace se jedná o funkci konkávní, u které bude graf funkce pod tečnou v bodech daného intervalu. Takový interval si na číselné ose označíme znaménkem $-$, nebo lépe znaménkem $\frown$. Inflexní body jsou body, ve kterých je druhá derivace funkce rovna nule a ve kterých přechází funkce z konvexní na konkávní a obráceně.

4. krok
   Asymptoty. Nejdříve si objasníme co to jsou asymptoty. Nebudeme čtenáře strašit matematickou definicí, tu si můžete najít v libovolné knize o matematické analýze. Řekneme si, že asymptota je přímka, lépe řečeno tečna ke grafu funkce v nekonečnu (ať už $x = \pm\infty$ nebo $y = \pm\infty$. Je to tedy přímka, ke které se graf funkce maximálně přiblíží, ale nikdy se jí v reálném bodě $[x, y]$ nedotkne. Ne všechny funkce mají asymptotu (např. funkce $y = \sin x$ ji nemá). Budeme rozlišovat dva typy asymptot. První typ bude přímka rovnoběžná s osou y (v některých učebnicích nazývaná *vertikála*). Tato přímka nemá směrnici, nazveme ji tedy **asymptota bez směrnice**. Tato přímka je tečnou ke grafu funkce v bodech $y = \pm\infty$, osu x protíná v bodě x_0. V bodě x_0 není zadaná funkce definována. Jak tedy zjistíme, má-li daná funkce v bodě asymptotu bez směrnice? Základní podmínkou pro existenci asymptoty bez

směrnice je, že funkce není pro některý bod definována, ale v okolí tohoto bodu definována je. Vyšetříme tedy chování funkce v pravém a levém okolí tohoto bodu nespojitosti. Budeme tedy řešit limitu zleva a zprava pro x jdoucí k bodu nespojitosti pro danou funkci. Pokud se limita zleva nebo zprava blíží nekonečnu, nebo mínus nekonečnu, pak má funkce v daném bodě asymptotu bez směrnice. Asymptotou be směrnice může být i samotná osa y, jak je znázorněno na obrázku pro funkci $y = \frac{1}{x}$.

Druhým typem asymptoty je **asymptota se směrnicí**. Je to tečna ke grafu funkce pro $x = \pm\infty$. Jak vyplývá z názvu jedná se o přímku, kterou můžeme zapsat ve směrnicovém tvaru jako $y = k.x + q$. Funkce se v $\pm\infty$ blíží k asymptotě. Matematicky to tedy znamená, že pro x v $\pm\infty$ je rozdíl mezi funkční hodnotou a bodem na asymptotě nulový, tedy

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - (k.x) + q)) = 0$$

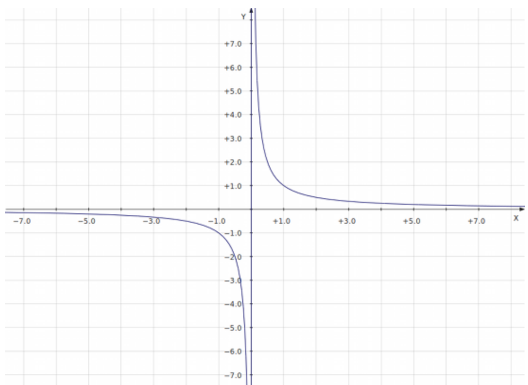
. Jak tedy zjistíme, má-li funkce asymptotu se směrnicí? Vyjdeme z předchozího vzorce a úpravou zjistíme, že pro koeficienty k a q platí následující vzorce:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty}\frac{f(x)}{x}$$

a

$$q = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - k.x)$$

. Podíváme-li se na nám již už známý graf funkce $y = \frac{1}{x}$ zjistíme, že funkce má asymptotu bez směrnice $x = 0$ (tedy osu y) a asymptotu se směrnicí $y = 0x + 0$, tedy osu x.



OBRÁZEK 4: Graf funkce $y = \frac{1}{x}$. Osa y je asymptotou bez směrnice a osa x je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce.

5. krok V tomto kroku spojíme všechny nalezené vlastnosti funkce a nakreslíme její graf. Nejdříve ale potřebujeme znát funkční hodnoty důležitých bodů definičního oboru funkce jako jsou lokální extrémy, inflexní body. Vypočtené funkční hodnoty si zapíšeme do přehledné tabulky. Nyní nám už nic nebrání v tom, abychom sestrojili graf funkce. Nakreslíme si souřadný systém, zaneseme zde průsečíky s osami, extrémy a inflexní body. Pokud má funkce asymptoty, zakreslíme je také do grafu. Nyní již můžeme zakreslit jednotlivé části grafu funkce podle vyšetřovaných intervalů. Výsledek vidíme na obrázku 4.

1.3 Konkrétní příklad - ukázkové řešení

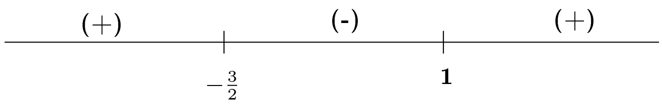
Příklad 1. *Vyšetřete průběh funkce* $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Řešení. 1. krok Nejdříve určíme definiční obor funkce. Jedná se o racionální lomenou funkci, která má smysl v případě kdy je jmenovatel zlomku nenulový. Nalezneme tedy taková x, kdy je jmenovatel roven 0 a tyto vyloučíme z definičního oboru. Výraz $x - 1 = 0$ je splněn pro $x = 1$. Definičním oborem funkce jsou tedy všechna reálná čísla, kromě 1. $D(f) = \mathbb{R} - \{1\}$.

Protože z definičního oboru funkce vypadává jeden bod (1), ale opačný bod (-1) do definičního oboru patří, není splněna základní podmínka pro sudou nebo lichou funkci. Zadaná funkce tedy není ani **sudá** ani **lichá**. Funkce rovněž není periodická.

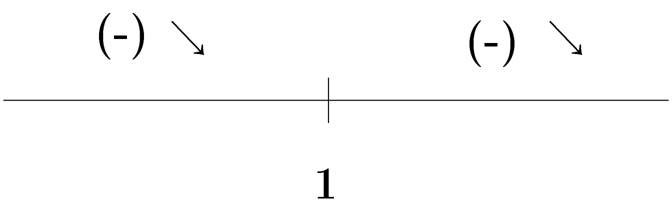
Určení průsečíku s osami je velmi jednoduché. Dosadíme-li za $x = 0$ do dané funkce, zjistíme že funkční hodnota $y = -3$. Průsečík s osou y má souřadnice [0;-3]. Průsečík s osou x je řešením rovnice $0 = \frac{2x+3}{x-1}$. Řešením této rovnice je $x = -\frac{3}{2}$. Průsečík s osou x má tedy souřadnice [-3/2;0].

Nakonec se podíváme na to, kdy jsou funkční hodnoty dané funkce kladné a kdy záporné. Nulovým bodem je průsečík s osou x, tedy $x = -\frac{3}{2}$. Započtením bodu nespojitosti zadané funkce máme definiční obor rozdělený na 3 intervaly: $(-\infty, -\frac{3}{2}), \langle -\frac{3}{2}; 1), (1; \infty)$. Nyní určíme znaménka funkce v daných intervalech. V intervalu $(-\infty, -\frac{3}{2})$ nabývá čitatel zlomku záporných hodnot a jmenovatel také, výsledkem je tedy kladná hodnota zlomku pro všechna x z tohoto intervalu. V tomto intervalu je graf funkce nad osou x. V intervalu $\langle -\frac{3}{2}; 1)$ nabývá čitatel kladných hodnot a jmenovatel záporných hodnot. Výsledkem je tedy záporná funkční hodnota zlomku. V tomto intervalu je graf funkce pod osou x (v nulovém bodě $-\frac{3}{2}$ protíná osu x). V posledním intervalu definičního oboru nabývají jak čitatel, tak jmenovatel kladných funkčních hodnot, takže výsledkem je kladná funkční hodnota zlomku na celém intervalu a graf dané funkce se nachází opět nad osou x. Výsledek si můžeme znázornit graficky na následujícím obrázku 5.



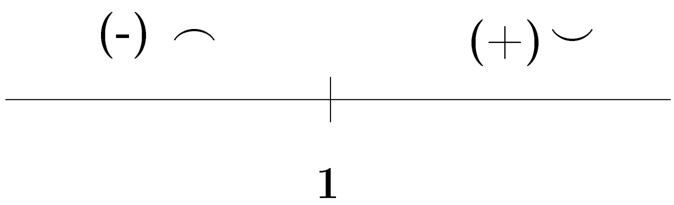
Obrázek 5: Znázornění kladných a záporných funkčních hodnot funkce $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

2. krok Vypočítáme první derivaci funkce. Jedná se o derivaci racionální lomené funkce, takže budeme postupovat jako při derivování podílu dvou funkcí. $f'(x) = \frac{(2x+3)'.(x-1)-(2x+3).(x-1)'}{(x-1)^2} = \frac{2.(x-1)-(2x+3).1}{(x-1)^2} = \frac{2x-2-2x-3}{(x-1)^2} = \frac{-5}{(x-1)^2}$. Výsledná funkce nemá žádný nulový bod, má pouze jeden bod nespojitosti a to $x = 1$. Musíme tedy vyšetřit kladné a záporné funkční hodnoty derivace ve dvou intervalech: $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$. Pro oba intervaly platí, že čitatel funkce je záporný a jmenovatel je vždy kladný (druhá mocnina je vždy kladné číslo), výsledkem je tedy, že první derivace funkce je v celém definičním oboru záporná a funkce je v celém oboru klesající. Funkce nemá žádné lokální extrémy. Výsledek je graficky znázorněn na následujícím obrázku 6.



Obrázek 6: Znázornění průběhu funkce $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Znázornění intervalů s rostoucí a klesající částí.

3. krok Zjistíme, kdy je graf funkce konvexní (nad tečnou) a kdy je konkávní (pod tečnou). K tomu potřebujeme znát druhou derivaci funkce. $f''(x) = (f'(x))' = (\frac{-5}{(x-1)^2})'$. Na funkci



OBRÁZEK 7: Znázornění průběhu funkce $f(x) = \frac{2x+3}{x-1}$. Znázornění intervalů s konvexní a konkávní částí.

můžeme nahlížet jako -5 násobek funkce $(x-1)^{-2}$ a tak ji můžeme i derivovat. $(-5.(x-1)^{-2})' = -5.(-2).(x-1)^{-3}.1 = \frac{10}{(x-1)^3}$. -5 je konstanta, kterou jsme vytkli před derivaci, zbytek výrazu je složená funkce, kde vnější funkcí je -2 druhá mocnina a vnitřní funkcí je $x-1$. Výsledná funkce nemá opět nulové body a má jen jeden bod nespojitosti a to je $x = 1$. Vyšetřujeme tedy opět dva intervaly: $(-\infty, 1)$ a $(1, \infty)$. Pro oba intervaly je čitatel zlomku vždy kladný, ale jmenovatel mění znaménko právě v bodě nespojitosti. Pro $x < 1$ je jmenovatel záporný a pro $x > 1$ je kladný. V prvním intervalu je tedy graf funkce pod tečnou a ve druhém nad tečnou. Druhá derivace funkce nemá nulový bod, proto nemá funkce ani body inflexe. Výsledek tohoto kroku je graficky znázorněn na obrázku 7.

4. krok Nyní nám zbývá určení asymptot ke grafu funkce. Zadaná funkce má jeden bod nespojitosti, kterým může procházet asymptota bez směrnice. Její existenci ověříme pomocí limit z funkce pro x jdoucí k bodu nespojitosti zleva a zprava.

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{2x+3}{x-1} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{2x+3}{x-1} = \infty$$

Přímka $x = 1$ je tedy asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $y = \frac{2x+3}{x-1}$.

Nyní vyšetříme existenci asymptoty se směrnicí. Pro směrnici asymptoty platí vztah:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Určíme tedy limity pro x jdoucí do nekonečna.

$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x(x-1)} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x^2-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x(x-1)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x^2-x} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x^2}+\frac{3}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{x}{x^2}} = \frac{0+0}{1-0} = \frac{0}{1} = 0$$

Koeficient q asymptoty se směrnicí určíme následujícího vzorce:

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} f(x) - kx$$

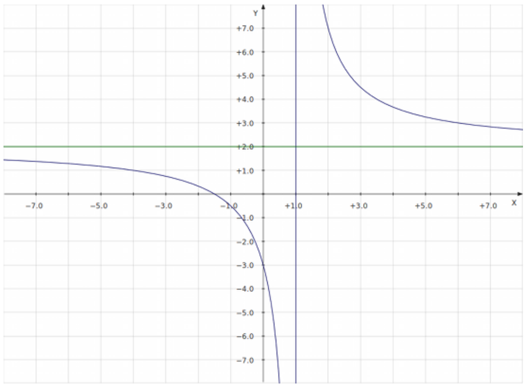
Protože v našem případě je směrnice rovna 0, budeme počítat pouze limity dané funmce.

$$q = \lim_{x\to-\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+3}{x-1} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \frac{2+0}{1-0} = \frac{2}{1} = 2$$

Asymptota se směrnicí má tedy tvar $y = 2$. Je to tedy přímka rovnoběžná s osou x protínající osu y v bodě $[0, 2]$.

5. krok Nyní již můžeme shrnout všechny indicie a můžeme načrtnout graf funkce. Protože zde máme pouze jeden průsečík s osou, vyznačíme jej do souřadného systému. Potom vyznačíme asymptoty a podle vypočítaných limit můžeme nakreslit graf v blízkosti asymptoty bez směrnice. Kladné a záporné funkční hodnoty zadané funkce, její rostoucí a klesající úseky a konvexnost a konkávnost nás povedou v kreslení grafu. Výsledek je zobrazen na obrázku 8.

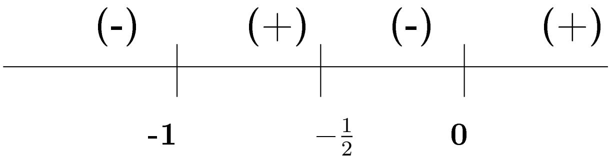


Obrázek 8: Graf funkce $y = \frac{2x+3}{x-1}$ s vyznačenými asymptotami.

Příklad 2. *Vyšetřete průběh funkce:* $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$

Řešení. 1. krok

- $D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 0\}$. Jmenovatel nesmí být rovný 0, proto nesmí být x rovno 0, nebo $x + 1$ rovno 0.
- Funkce není ani sudá ani lichá vzhledem k definičnímu oboru funkce.
- Není periodická.
- Průsečíky s osami: Dosadíme $x = 0$ - průsečík s osou y, $y = 0$ - průsečík s osou x. Pro $x = 0$ není funkce definována, takže nemá průsečík s osou y. Pro průsečík s osou x nám stačí položit polynom v čitateli roven 0 a zjistíme, že řešením je $x = -\frac{1}{2}$.
- Znaménka funkce zjistíme dosazením za x vhodných čísel z intervalů. Viz obrázek 9.



Obrázek 9: Znaménko funkční hodnoty funkce $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$.

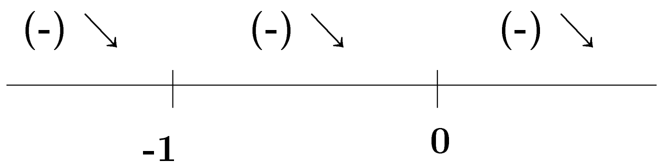
2. krok

- Určíme první derivaci funkce.

$$\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)' = \frac{2(x^2+x) - (2x+1)(2x+1)}{(x^2+x)^2} = \frac{2x^2+2x-4x^2-4x-1}{(x^2+x)^2} = \frac{-2x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$$

- Nalezneme nulové body první derivace. Racionální lomená funkce je rovna 0 v případě, že funkce v čitateli je rovna 0. Hledáme tedy kořeny polynomu v čitateli nalezené funkce (řešíme rovnici $-2x^2 - 2x - 1 = 0$ tedy $2x^2 + 2x + 1 = 0$) Tento polynom nemá reálné kořeny a funkce tedy nemá nulové body. Zbývá nám vyšetřit, jestli funkce nemění znaménko v bodech nespojitosti 0 a -1.

- Dosazením vybraných hodnot z intervalů zjistíme, že funkce první derivace má ve všech intervalech záporné hodnoty a je tedy v celém definičním oboru klesající. Vyšetřovaná funkce nemá tedy lokální extrémy. Výsledek je graficky znázorněn na následujícím obrázku 10.



Obrázek 10: Znaménka první derivace funkce $\frac{2x+1}{x^2+x}$. Funkce je ve všech intervalech klesající.

3. krok

- Podíváme se kdy je vyšetřovaná funkce konvexní a kdy konkávní a vyhledáme inflexní body funkce, pokud existují. Jak jsme si sdělili již dříve, inflexní body jsou ty body, ve kterých má vyšetřovaná funkce extrémní první derivaci. Hledáme tedy extrémy první derivace funkce. Protože extrémy hledáme pomocí derivace, budeme potřebovat druhou derivaci vyšetřované funkce. Proto ji nyní určíme.

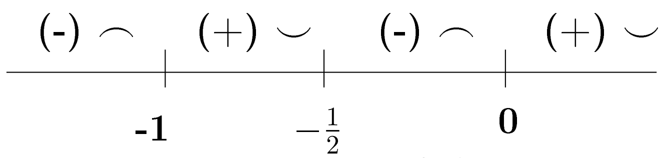
$$\left(\frac{2x+1}{x^2+x}\right)'' = \left(-\frac{2x^2+2x+1}{(x^2+x)^2}\right)' = -\frac{(4x+2)(x^2+x)^2 - (2x^2+2x+1)(2(x^2+x)(2x+1)}{(x^2+x)^4}$$

$$= -\frac{2(2x+1)(x^2+x) - 2(2x+1)(2x^2+2x+1)}{(x^2+x)^3} = -\frac{2(2x+1)(x^2+x-2x^2-2x-1)}{(x^2+x)^3}$$

$$= -\frac{2(2x+1)(-x^2-x-1)}{(x^2+x)^3} = -\frac{(-1)\cdot 2\cdot(2x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x)^3} = \frac{2(2x+1)(x^2+x+1)}{(x^2+x)^3}$$

.

- Ne vždy se vyplatí vše roznásobit. Jak ukazuje předchozí derivování. Nulové body druhé derivace nalezneme tak, že položíme součin funkcí v čitateli roven 0. Součin je roven 0 v případě, že alespoň jeden z činitelů je roven nule. Výraz $x^2+x+1=0$ nemá řešení v $\mathbb{R}$ a výraz $2x+1=0$ má pouze jedno řešení $x=-\frac{1}{2}$.
- Vyšetříme znaménka druhé derivace v intervalech $(-\infty;-1);(-1;-\frac{1}{2});\langle-\frac{1}{2};0);(0;\infty)$. Výsledky šetření jsou shrnuty v následujícím obrázku 11.



Obrázek 11: Znaménka druhé derivace funkce $\frac{2x+1}{x^2+x}$. Inflexním bodem je $x=-\frac{1}{2}$.

4. krok

- Asymptoty bez směrnice.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{2x+1}{x^2+x}=\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{2x+1}{x^2+x}=-\infty$$

Přímka $x = 0$ je asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $\frac{2x+1}{x^2+x}$.
Nyní vyšetříme bod $x = -1$.

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{2x+1}{x^2+x} = \infty$$

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{2x+1}{x^2+x} = -\infty$$

Přímka $x = -1$ je rovněž asymptotou bez směrnice ke grafu funkce $\frac{2x+1}{x^2+x}$.

- Asymptoty se směrnicí:

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{x(x^2+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{3x^2+2x} = 0$$

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{x(x^2+x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{3x^2+2x} = 0$$

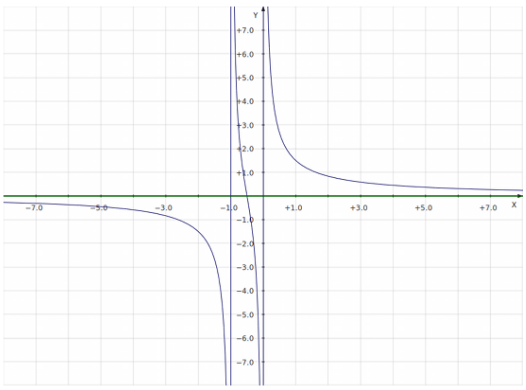
Pro výpočet limit jsme využili l´ Hospitalova pravidla. Nyní ještě musíme vypočítat koeficient q.

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{(2x+1)} = 0$$

$$q = \lim_{x\to -\infty} \frac{2x+1}{(x^2+x)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{2}{(2x+1)} = 0$$

Přímka $y = 0$, tedy osa x je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce $\frac{2x+1}{x^2+x}$.

5. krok Nyní nám zbývá dopočítat funkční hodnotu pro inflexní bod. Dosazením $x = -\frac{1}{2}$ do funkce získáme $y = 0$. Spojením všech dosavadních znalostí nakreslíme graf. Výsledek je znázorněn na obrázku 12.

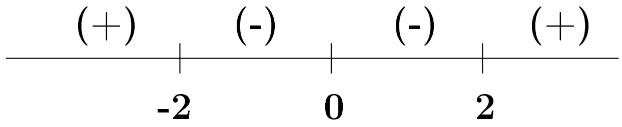


Obrázek 12: Graf funkce $y = \frac{2x+1}{x^2+x}$ s vyznačenými asymptotami.

Příklad 3. *Vyšetřete průběh funkce* $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

Řešení. 1. krok

- Funkce není definována pro $x = -2$ a $x = 2$. $D(f) = \mathbb{R} - \{-2; 2\}$.
- Jedná se o sudou funkci. $(-x)^2 = x^2$.
- Funkce není periodická.
- Průsečíky s osami: pro $x = 0$ je $y = 0$. Graf funkce tedy prochází počátkem soustavy souřadnic.



Obrázek 13: Znaménko funkce $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

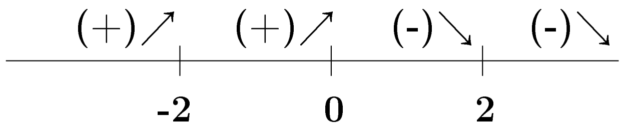
- Nulový bod je $x = 0$, body nespojitosti jsou $x = -2$ a $x = 2$. Podíváme se tedy jak mění funkce své znaménko v jednotlivých intervalech. Výsledek je na obrázku 13.

2. krok

- Rostoucí a klesající části funkce. Určíme první derivaci funkce.

$$y' = (\frac{x^2}{x^2-4})' = \frac{2x(x^2-4) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{2x(x^2-4-x^2)}{(x^2-4)^2} = \frac{-8x}{(x^2-4)^2}$$

- Derivace funkce není definovaná, stejně jako původní funkce, pro $x = \pm 2$.
- Nulovým bodem derivace je $x = 0$.
- Společné šetření intervalů definičního oboru vytvořených nulovým bodem a body nespojitosti je znázorněn na obrázku 14.



Obrázek 14: Intervaly rostoucích a klesajících částí funkce $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

- Funkce má lokální maximum pro $x = 0$.

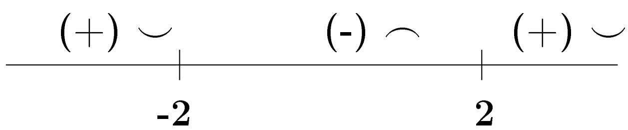
3. krok

- Konvexní a konkávní úseky funkce, inflexní body.
- Určíme druhou derivaci funkce:

$$(\frac{x^2}{x^2-4})'' = (\frac{-8x}{(x^2-4)^2})' = \frac{-8(x^2-4)^2 - ((-8x) \cdot 2(x^2-4) \cdot 2x)}{(x^2-4)^4}$$

$$= \frac{8(x^2-4)(-(x^2-4) + 4x^2)}{(x^2-4)^4} = \frac{8(x^2-4)(3x^2+4)}{(x^2-4)^4} = \frac{8(3x^2+4)}{(x^2-4)^3}$$

- Výraz v čitateli druhé derivace je stále kladný, proto vyšetříme jmenovatele zlomku. Výraz $x^2 - 4$ je kladný pro $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$ a v intervalu $(-2; 2)$ je záporný.
- Zjištěné údaje jsou graficky znázorněny na obrázku 15.



Obrázek 15: Intervaly konvexních a konkávních částí funkce $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

- Funkce nemá inflexní body, protože body v nichž přechází z konvexní na konkávní a naopak jsou body nespojitosti funkce.

4. krok

- Asymptoty bez směrnice

$$\lim_{x\to -2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = \infty \qquad \lim_{x\to -2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-} \frac{x^2}{x^2-4} = -\infty \qquad \lim_{x\to 2^+} \frac{x^2}{x^2-4} = \infty$$

Přímky $x = -2$ a $x = 2$ jsou asymptotami bez směrnice ke grafu funkce $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

- Asymptoty se směrnicí

$$k = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^3-4x} = \lim_{x\to -\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

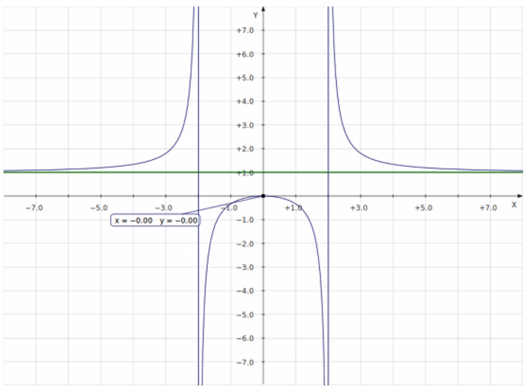
$$k = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^3-4x} = \lim_{x\to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{0}{1-0} = 0$$

$$q = \lim_{x\to -\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to -\infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

$$q = \lim_{x\to \infty} \frac{x^2}{x^2-4} = \lim_{x\to \infty} \frac{1}{1-\frac{4}{x^2}} = \frac{1}{1} = 1$$

- Přímka $y = 0x + 1$ tedy $y = 1$ je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce $y = \frac{x^2}{x^2-4}$.

5. krok Nakreslíme graf funkce. Výsledek je znázorněn na obrázku 16.



OBRÁZEK 16: Graf funkce $y = \frac{x^2}{x^2-4}$ s vyznačenými asymptotami.

1.4 Příklady na procvičení

Vyšetřete průběh funkce:

1. $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$
2. $y = \frac{e^x}{x}$
3. $y = \frac{x}{e^x}$
4. $y = \frac{x}{x^2-1}$
5. $y = \frac{x^2}{x^2-1}$

Výsledky:

1. příklad.

   - $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
     $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq (-1)f(x)$ tedy funkce není ani sudá ani lichá
     Průsečík s osou y funkce nemá. Průsečík s osu x leží mezi $\frac{1}{3}$ a $\frac{1}{2}$. Jeho přesný výpočet je nalezením kořenu polynomu $x^3 + 2x^2 + 7x - 3$ což je nad rámec našeho semináře.
   - $y\prime = \frac{x^3-7x+6}{2x^3}$
     maxima jsou v bodech $x = -3$ a $x = 1$
     minimum v bodě $x = 2$
   - $y\prime\prime = \frac{7x-9}{x^4}$
     inflexní bod je pro $x = \frac{9}{7}$
   - Asymptoty:
     - Bez směrnice: osa y

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = -\infty$$

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} = -\infty$$

     - Se směrnicí

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^3} = \frac{1}{2}$$

$$q = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 7x - 3}{2x^2} - \frac{1}{2}x = 1$$

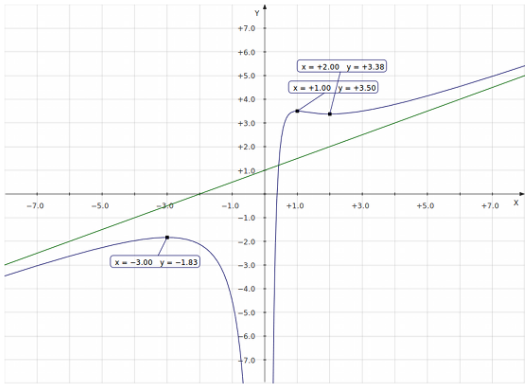
     asymptota se směrnicí má tedy rovnici:

$$y = \frac{1}{2}x + 1$$

- Důležité funkční hodnoty:

x	-3	1	2
y	$-\frac{11}{6}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{27}{8}$

- Graf funkce je na obrázku 17:



Obrázek 17: Graf funkce $y = \frac{x^3+2x^2+7x-3}{2x^2}$ s vyznačenými asymptotami.

2. příklad.

- $D(f) = \mathbb{R} - \{0\}$
  $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq (-1)f(x)$ tedy funkce není ani sudá ani lichá

- $y\prime = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$
  minimum v bodě $x = 1$ funkční hodnota je $y = e$

- $y\prime\prime = \frac{e^x(x^2-x+1)}{x^3}$
  Funkce mění znaménko v bodě nespojitosti.

- Asymptoty:

  - Bez směrnice: osa y

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty$$

  - Se směrnicí

$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x^2} = 0$$

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{e^x}{x^2} = \infty$$

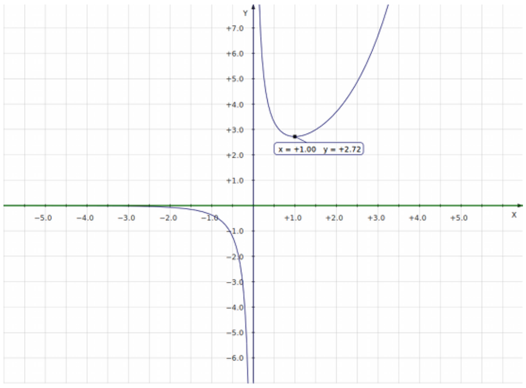
$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{e^x}{x} = 0$$

  asymptota se směrnicí má tedy rovnici:

$$y = 0x + 0$$

  osa x pouze pro $x \to -\infty$

- Graf funkce je na obrázku 18:



Obrázek 18: Graf funkce $y = \frac{e^x}{x}$ s vyznačenými asymptotami.

3. příklad.

- $D(f) = \mathbb{R}$
  $f(-x) \neq f(x)$ a $f(-x) \neq (-1)f(x)$ tedy funkce není ani sudá ani lichá
  Průsečík s osou y je pro $x = 0$, tedy počátek souřadné soustavy.
- $y\prime = \frac{1-x}{e^x}$
  maximum v bodě $x = 1$ funkční hodnota je $y = \frac{1}{e}$
- $y\prime\prime = \frac{x-2}{e^x}$
  Funkce má inflexní bod pro $x = 2$ $f(x) = \frac{2}{e^2}$
- Asymptoty:
  - Bez směrnice: osa y
    nejsou
  - Se směrnicí

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{xe^x} = 0$$

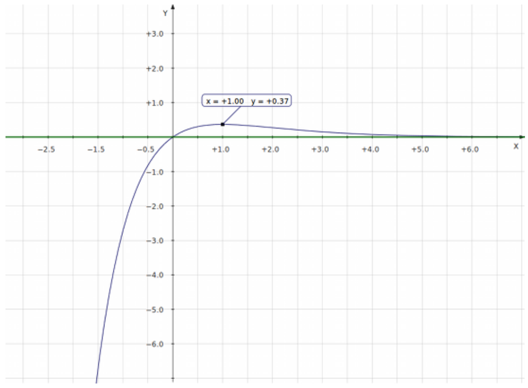
$$k = \lim_{x\to-\infty} \frac{x}{xe^x} = \infty$$

$$q = \lim_{x\to\infty} \frac{x}{e^x} = 0$$

    asymptota se směrnicí má tedy rovnici:

$$y = 0x + 0$$

    osa x pouze pro $x \to \infty$
- Graf funkce je na obrázku 19.



Obrázek 19: Graf funkce $y = \frac{e^x}{x}$ s vyznačenými asymptotami.

4. příklad.

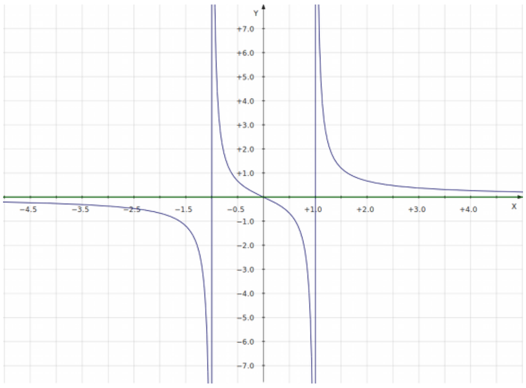
- $D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$
  Funkce je lichá $f(-x) = (-1) \cdot f(x)$.
  Funkce není periodická
  Průsečíky s osami $[0, 0]$ - počátek soustavy souřadnic.
- $$(f(x))' = \frac{x^2 - 1 - x \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2 - 1 - 2x^2}{(x^2-1)^2} = -\frac{x^2+1}{(x^2-1)^2}$$
  Funkce nemá nulové body a nabývá v celém svém definičním oboru záporné hodnoty. Vyšetřovaná funkce je tedy v celém svém definičním oboru klesající.
- $$(f(x))'' = -\frac{2x(x^2-1)^2 - (x^2+1)(2(x^2-1) \cdot 2x)}{(x^2-1)^4} = -\frac{2x(x^2-1) - 4x(x^2+1)}{(x^2-1)^3} =$$
  $$-\frac{2x^3 - 2x - 4x^3 - 4x}{(x^2-1)^3} = \frac{x^3+6x}{(x^2-1)^3} = \frac{x(x^2+6)}{(x^2-1)^3}$$
  Funkce je konkávní v intervalech $(-\infty - 1)$ a $(0; 1)$. Funkce je konvexní v intervalech $(-1; 0)$ a $(1; \infty)$.
- Asymptoty:
  - Bez směrnice:
    $$\lim_{x \to -1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$
    $$\lim_{x \to -1^+} \frac{x}{x^2-1} = \infty$$
    $$\lim_{x \to 1^-} \frac{x}{x^2-1} = -\infty$$
    $$\lim_{x \to 1^+} \frac{x}{x^2-1} = \infty$$
    Přímky $x = -1$ a $x = 1$ jsou asymptotami bez směrnice ke grafu funkce $y = \frac{x}{x^2-1}$.
  - Se směrnicí:
    $$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$
    $$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x^2-1} = 0$$

$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{1}{2x} = 0$$

$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x}{x^2 - 1} = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{2x} = 0$$

Osa x je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce $y = \frac{x}{x^2-1}$.

- Graf funkce je na obrázku 20:



Obrázek 20: Graf funkce $y = \frac{x}{x^2-1}$ s vyznačenými asymptotami.

5. příklad

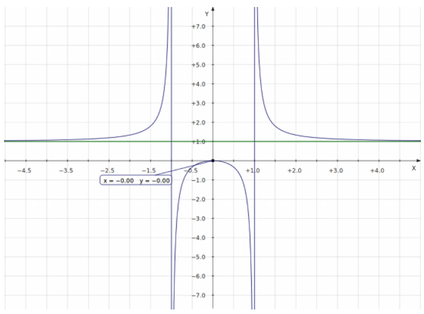
- $D(f) = \mathbb{R} - \{-1; 1\}$
  Funkce je sudá $f(-x) = f(x)$ v celém definičním oboru funkce.
  Funkce není periodická.
  Nulovým bodem funkce je $x = 0$.
  Funkce nabývá kladných hodnot pro intervaly $(-\infty; -1)$ a $(1; \infty)$. Záporné funkční hodnoty má funkce v intervalu $(-1; 1)$.
-
$$(f(x))' = \frac{2x(x^2-1) - x^2 \cdot 2x}{(x^2-1)^2} = \frac{2x^3 - 2x - 2x^3}{(x^2-1)^2} = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$$

  Funkce ve jmenovateli je stále kladná, proto se zaměříme pouze na funkci v čitateli. Tato funkce nabývá kladných hodnot pro záporná čísla a záporných hodnot pro kladná čísla. Funkce je tedy pro $x > 0$ klesající a pro $x < 0$ je rostoucí.
-
$$(f(x))'' = (\frac{-2x}{(x^2-1)^2})' = \frac{-2(x^2-1)^2 + 2x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{8x^2(x^2-1) - 2(x^2-1)^2}{(x^2-1)^4} =$$
$$= \frac{6x^2+2}{(x^2-1)^3}$$

  Funkce v čitateli zlomku nabývá vždy kladných hodnot, proto vyšetříme pouze funkci ve jmenovateli. Druhá derivace mění znaménko v bodech -1 a 1. V intervalech $(-\infty; -1)$ a $(1; \infty)$ nabývá kladných funkčních hodnot - je tedy konvexní. V intervalu $(-1; 1)$ nabývá záporných funkčních hodnot a je tedy konkávní.
- Asymptoty:
  - bez směrnice
$$\lim_{x \to -1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty; \lim_{x \to -1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1^-} \frac{x^2}{x^2-1} = -\infty; \lim_{x \to 1^+} \frac{x^2}{x^2-1} = \infty$$

    Přímky $x = -1$ a $x = 1$ jsou tedy asymptotami bez směrnice ke grafu funkce $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.
  - se směrnicí
$$k = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{3x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2}{6x} = 0$$
$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x(x^2-1)} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{3x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2}{6x} = 0$$
$$q = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to -\infty} \frac{2x}{2x} = 1$$
$$q = \lim_{x \to \infty} \frac{x^2}{x^2-1} = \lim_{x \to \infty} \frac{2x}{2x} = 1$$

    Přímka $y = 0x + 1$ tedy $y = 1$ je asymptotou se směrnicí ke grafu funkce $y = \frac{x^2}{x^2-1}$.
- Graf funkce je na obrázku 21:



Obrázek 21: Graf funkce $y = \frac{x^2}{x^2-1}$ s vyznačenými asymptotami.