

Teoretická fyzika o Základy speciální teorie relativity

Michal Lenc o podzim 2013

Obsah

Teoretická fyzika o Základy speciální teorie relativity	1
1. Princip relativity	2
1.1 Galileiho princip relativity	2
1.2 Události, interval	3
1.3 Lorentzova transformace	4
1.4 Einstein v princip relativity	4
1.5 Relativistická kinematika	5
1.6 Hybnost a energie	6
1.7 Více o intervalu	7
2. Příklady relativistických jevů	8
2.1 Aberace světla	8
2.2 Comptonův rozptyl	11
2.3 Dopplerův jev	12
2.4 Vstředné svazky	14
2.5 Hafeleho a Keatingův experiment	15
3. 4-vektorové veličiny	16
3.1 Základní pojmy	16
3.2 Lorentzova grupa	18
3.3 4-rychlost a 4-zrychlení	19
3.4 Princip nejmenšího úinku	21
4. Náboj v elektromagnetickém poli	22
4.1 4-potenciál a 4-úinek	22
4.2 Invarianty elektromagnetického pole	25

4.3	Pohyb náboje v konstantním homogenním poli.....	25
4.4	Adiabatický invariant	29
5.	částice v gravitačním poli.....	30
5.1	Gravitační pole v nerelativistické mechanice.....	30
5.2	Eötvös v experiment.....	32
5.3	Kovariantní a kontravariantní tenzory.....	33
5.4	Metrický tenzor	35
5.5	Neinerciální soustavy v Minkowského prostoroase.....	36

1. Princip relativity

1.1 Galileiho princip relativity

Princip relativity říká, že fyzikální zákony mají stejný tvar ve všech inerciálních souadných soustavách. Inerciální soustava je definována tak, že se v ní volná částice pohybuje rovnoměrným přímočarým pohybem, musí tedy být vzájemný pohyb dvou různých inerciálních soustav rovnoměrný přímočarý. Galileiho princip relativity předpokládá vztah mezi časem a prostorovými souadnicemi v soustavě K a K' (ta má se soustavou stejně orientované souadné osy)

$$t = \tau + t' \quad , \quad \vec{r} = \vec{\rho} + \vec{r}' + \vec{V}t' \quad , \quad (1.1)$$

pritom obvykle ztotožníme počátek odtahování soustav a prostorových souadnic, tj. předpokládáme $\tau = 0, \vec{\rho} = \vec{0}$. Porovnání druhého Newtonova pohybového zákona v soustavách K a K'

$$m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \vec{F}(\vec{r}, t) \quad , \quad m \frac{d^2 \vec{r}'}{dt'^2} = \vec{F}'(\vec{r}', t') \quad (1.2)$$

vede po dosazení (1.1) do druhé rovnice v (1.2) k podmínce transformace síly

$$\vec{F}(\vec{r}, t) = \vec{F}'(\vec{r} - \vec{V}t, t) \quad . \quad (1.3)$$

Jestliže síla splňuje podmínku (1.3), vyhovuje pohybová rovnice daná druhým Newtonovým zákonem Galileiho principu relativity. Je tomu tak například v případě, závisí-li síla na vzdálenosti částice od nějakého silového centra (nebo od jiné částice). Ale také například Lorentzova síla v homogenním elektrickém a magnetickém poli by vyhovovala Galileovu principu relativity, pokud by se pole transformovala podle vztahu

$$\vec{E}'_0 = \vec{E}_0 + \vec{V} \times \vec{B}_0 \quad , \quad \vec{B}'_0 = \vec{B}_0 \quad . \quad (1.4)$$

Pole se ale ve skutečnosti (jako řešení Maxwellových rovnic) transformují jako

$$\begin{aligned} \vec{E}'_{0\parallel} &= \vec{E}_{0\parallel} \quad , \quad \vec{B}'_{0\parallel} = \vec{B}_{0\parallel} \quad , \\ \vec{E}'_{0\perp} &= \frac{(\vec{E}_0 + \vec{V} \times \vec{B}_0)_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad , \quad \vec{B}'_{0\perp} = \frac{\left(\vec{B}_0 - \frac{\vec{V} \times \vec{E}_0}{c^2}\right)_{\perp}}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \quad . \end{aligned} \quad (1.5)$$

Podívejme se, jak se při Galileiho transformaci chová vlnová rovnice

$$\square \psi \equiv \left(\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \psi = 0 \quad . \quad (1.6)$$

Pro jednoduchost předpokládejme, že se soustava K' pohybuje vůči K podél osy x . Je pak

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t'} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} \quad , \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial}{\partial t'} = \left(-V \frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial}{\partial t'} \right) \quad \Rightarrow \\ \frac{\partial^2}{\partial t^2} &= V^2 \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial t'^2} - 2V \frac{\partial^2}{\partial x' \partial t'} \quad . \end{aligned} \quad (1.7)$$

Máme tedy pro d'Alembertův operátor v pohybující se soustavě jiný výraz než v původní soustavě, a mohli bychom tedy principiálně odlišit privilegovanou inerciální soustavu v klidu.

1.2 Události, interval

Základním pojmem pro úvodní úvahy o Einsteinově principu relativity je událost (pro jednoduchost na chvíli dvě prostorové dimenze potlačíme), charakterizovaná časem t a bodem na ose x , kdy a kde k události došlo. Hodnoty samozřejmě závisí na volbě souřadné soustavy. Předpokládejme si známou situaci, kdy poloha bodu v rovině je charakterizována kartézskými souřadnicemi x a y . Hodnoty závisí na poloze počátku a na orientaci os souřadné soustavy. Vezmeme-li však tvorec vzdálenosti dvou bodů

$$l^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \quad , \quad (1.8)$$

zjistíme snadno, že je ve všech kartézských soustavách stejný. Transformační rovnice mezi soustavami K a K' jsou

$$x = a + \cos \varphi x' + \sin \varphi y' \quad , \quad y = b - \sin \varphi x' + \cos \varphi y' \quad . \quad (1.9)$$

Einstein předpokládal, že rychlost šíření světla ve vakuu $c = 299\,792\,458 \text{ ms}^{-1}$ je ve všech inerciálních souřadných soustavách stejná. Potom pro dvě události, spojené šířením světla ve vakuu (např. první událostí je emise nějakého fotonu, druhou událostí absorpce tohoto fotonu)

platí (první len je tverec součinu rychlosti a doby měření, ten musí být pirozen roven druhému lenu, což je tverec vzdálenosti, kterou světlo urazilo)

$$c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 = 0 \quad , \quad c^2(t'_2 - t'_1)^2 - (x'_2 - x'_1)^2 = 0 \quad . \quad (1.10)$$

V zobecnění pak nazveme veličinu

$$s^2 = c^2(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 \quad (1.11)$$

tvercem intervalu mezi (libovolnými) dvěma událostmi.

Víme si, že invariance (1.8) vzhledem k transformaci (1.9) vychází ze vztahu $\cos^2 \varphi + \sin^2 \varphi = 1$. Vztah (1.11) se od (1.8) odlišuje znaménkem minus místo plus, budeme tedy hledat transformaci, která vychází ze vztahu $\cosh^2 \psi - \sinh^2 \psi = 1$, tedy

$$ct = c\tau + \cosh \psi ct' + \sinh \psi x' \quad , \quad x = \xi + \sinh \psi ct' + \cosh \psi x' \quad . \quad (1.12)$$

Snadno vidíme, že transformace (1.12) ponechává výraz pro tverec intervalu (1.11) invariantní.

1.3 Lorentzova transformace

Zatímco úhel φ v (1.8) má jasný geometrický význam, musíme fyzikální význam úhlu ψ teprve najít. Těmto vždy předpokládáme ztotožnění počátku odečítání času i prostorových souřadnic ve všech inerciálních soustavách, tedy položíme v (1.12) $c\tau = \xi = 0$. Ať se nyní pohybuje soustava K' (a tedy i její počátek $x' = 0$) vůči soustavě K rychlostí V . Potom máme z (1.12) s označením $\beta = V/c$

$$V = \frac{x}{t} = c \tanh \psi \quad \Rightarrow \quad \cosh \psi = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad \sinh \psi = \frac{\beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.13)$$

a výsledný vztah pro Lorentzovu transformaci (přidáme dva dosud potlačené rozměry geometrického prostoru)

$$ct = \frac{ct' + \beta x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad x = \frac{x' + Vt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad y = y' \quad , \quad z = z' \quad . \quad (1.14)$$

1.4 Einstein v principu relativity

Pro infinitezimálně blízké události můžeme psát interval jako

$$ds^2 = c^2 dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (1.15)$$

a Lorentzovu transformaci jako

$$c dt = \frac{c dt' + \frac{V}{c} dx'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad dx = \frac{dx' + V dt'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad , \quad dy = dy' \quad , \quad dz = dz' \quad . \quad (1.16)$$

Požadavek, aby rovnice vyjadřující fyzikální zákony byly invariantní vzhledem k Lorentzovským transformacím, nazýváme Einsteinovým principem relativity.

Vždy jsou uváděny dva klasické příklady na použití vztahu (1.14) o kontrakci délek a dilataci času. V soustavě K je podél osy x v klidu umístěno těleso, jehož dva konce mají v této soustavě souřadnice x_1, x_2 . Vzdálenost (klidová) konců je tedy $\Delta x_0 = x_2 - x_1$. Vzdálenost v soustavě K' (souřadnice jsou určovány ve stejném čase $t'_1 = t'_2$)

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = \Delta x_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad (1.17)$$

Protože vzdálenost zjištěná v pohybující se soustavě je menší než vzdálenost v klidové soustavě, mluvíme o kontrakci délky. Nyní předpokládejme, že se v soustavě K' odehrají v časech t'_1 a t'_2 v jediném místě $x'_1 = x'_2, y'_1 = y'_2, z'_1 = z'_2$ dvě události (interval mezi událostmi je tedy $\Delta t_0 = t'_2 - t'_1$). V soustavě K je interval mezi těmito událostmi

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.18)$$

časový interval zjištěný v soustavě K , v níž se soustava, kde se události odehrály v jednom místě prostoru, je delší, mluvíme proto o dilataci času. Je důležité uvědomit si přesný význam použitých veličin a tedy i pojem kontrakce délek a dilatace času.

1.5 Relativistická kinematika

Pro rychlost ($\vec{v} = d\vec{r}/dt, \vec{v}' = d\vec{r}'/dt'$) dostaneme z rovnice (1.16) transformací vztahy

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x V/c^2} \quad (1.19)$$

Vztah pro transformaci rychlosti odvodíme také následující úvahou. Mějme v soustavě K' částici, která se pohybuje konstantní rychlostí u , tedy platí pro ni $x' = ut'$. Z hlediska vnějšího pozorovatele v soustavě K dostaneme podle (1.14)

$$x = \frac{x' + V t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(u + V)t'}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad t = \frac{t' + V x'/c^2}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{(1 + V u/c^2)t'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (1.20)$$

pro rychlost v soustavě K máme pak

$$v_x = \frac{x}{t} = \frac{u + V}{1 + uV/c^2} \quad (1.21)$$

Velikost této rychlosti uflíme přepočítáním velikosti rychlosti světla a pro $u = c$ dostáváme přirozeně $v_x = c$.

1.6 Hybnost a energie

Pro odvození výrazu pro hybnost a energii částice hmotnosti m musíme vycházet z již známé invariantní veličiny, což je interval (1.15). Ten můžeme použít pro konstrukci invariantního úinku pro volnou částici, který by pro malé rychlosti přecházel do klasického tvaru. Vezmeme tedy za základ rozměrově správný a úmírný hmotnosti invariantní výraz

$$S = -mc \int_a^b ds \quad . \quad (1.22)$$

Použijeme-li pro parametrizaci časovou souřadnici, dostáváme

$$S = -mc \int_a^b \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} dt \quad . \quad (1.23)$$

Porovnáním se standardním výrazem $S = \int_{t_a}^{t_b} L dt$ tak dostáváme pro Lagrangeovu funkci

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}} \quad . \quad (1.24)$$

Hybnost a energii získáme obvyklým postupem

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}}, \quad E = \vec{v} \cdot \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{\vec{v}^2}{c^2}}} \quad . \quad (1.25)$$

Pro malé rychlosti přechází výraz pro hybnost na klasický tvar $\vec{p} = m\vec{v}$ a pro energii dostáváme z prvních dvou členů rozvoje odmocniny

$$E = mc^2 + \frac{1}{2}m\vec{v}^2 \quad .$$

Často se vztahy (1.25) pro hybnost a energii chápou jako nárůst hmotnosti částice s rychlostí. Vhodnější je ale považovat hmotnost za charakteristickou vlastnost částice a vztah (1.25) prostříká, že vztah mezi rychlostí a hybností je složitější než v nerelativistické aproximaci. Snad nejslavnější fyzikální rovnicí je (uvažujeme částici v klidu)

$$E = mc^2 \quad . \quad (1.26)$$

Představme si nějaké atomové jádro hmotnosti M , jako celek v klidu. Oddělíme-li postupně jednotlivé nukleony a vzdálíme tak, že jejich interakci lze zanedbat, zjistíme, že rozdíl energií

$$\Delta E = \left(M - \sum_a m_a \right) c^2 \quad , \quad (1.27)$$

kde $\sum_a m_a$ je součet hmotností všech volných nukleonů, je obecně nenulový. Je-li rozdíl kladný, lze rozštěpením jádra energii získat, je-li záporný, lze složením lehčích jader do těžšího jádra

energii získat. Používáme-li pro popis jevu dle sledné fyzikální terminologie, nemůžeme dojít k filosofickým diskusím o poměru hmoty na energii i naopak.

S pomocí veličin energie a vektoru hybnosti vyjádříme celkovou energii E a kinetickou energii T

$$E = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} \quad , \quad T = E - m c^2 = \sqrt{\vec{p}^2 c^2 + m^2 c^4} - m c^2 \quad . \quad (1.28)$$

V limitních případech má výraz pro kinetickou energii tvar

$$T \ll m c^2 \Rightarrow T \approx \frac{\vec{p}^2}{2m} \quad , \quad T \gg m c^2 \Rightarrow T \approx |\vec{p}| c \quad . \quad (1.29)$$

Vztah mezi energií a hybností můžeme vyjádřit stejně jako jsme vyjádřili interval tvorec časoprostorového intervalu

$$m^2 c^2 = \frac{E^2}{c^2} - \vec{p}^2 \quad . \quad (1.30)$$

Při Lorentzovské transformaci (1.14) bude pak

$$\frac{E}{c} = \gamma \left(\frac{E'}{c} + \beta p'_x \right) \quad , \quad p_x = \gamma \left(\beta \frac{E'}{c} + p'_x \right) \quad , \quad p_y = p'_y \quad , \quad p_z = p'_z \quad . \quad (1.31)$$

1.7 Více o intervalu

Máme dvě události popsané v inerciální soustavě K souřadnicemi (t_1, \vec{r}_1) a (t_2, \vec{r}_2) . Události jsou spojeny časopodobným intervalem a druhá událost nastala později než první

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta \vec{r})^2 > 0 \quad , \quad \Delta t = t_2 - t_1 > 0 \quad , \quad \Delta \vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad .$$

Ukážeme, že po adí událostí vidí stejný pozorovatelé ve všech inerciálních soustavách. Osu x zvolíme jako společnou osu soustavy K a soustavy K' , která se vůči K podél této osy pohybuje rychlostí V . Lorentzova transformace (1.16) je

$$c \Delta t = \gamma (c \Delta t' + \beta \Delta x') \quad , \quad \Delta x = \gamma (\Delta x' + V \Delta t') \quad , \quad \Delta y = \Delta y' \quad , \quad \Delta z = \Delta z' \quad .$$

Máme

$$c \Delta t' = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) > \gamma (c \Delta t - |\Delta \vec{r}|) > 0 \quad .$$

Poslední nerovnost plyne z toho, že interval je časopodobný, poslední nerovnost z toho, že odečítáme v číslu hodnotu, protože vždy $\beta < 1$ a $\Delta x < |\Delta \vec{r}|$.

Jsou-li události spojeny prostorupodobným intervalem a druhá událost nastala v soustavě K později než první, můžeme najít takovou soustavu K' , kde druhá událost

nastane dříve než první. Zvolíme společnou osu x tak, aby na ní ležely prostorové souřadnice obou událostí a její orientaci tak, aby $\Delta x = x_2 - x_1 > 0$. Potom máme

$$s^2 = c^2 (\Delta t)^2 - (\Delta x)^2 < 0, \quad \Delta t > 0, \quad \Delta x > 0,$$

Takže $c \Delta t < \Delta x$. Lorentzova transformace dává

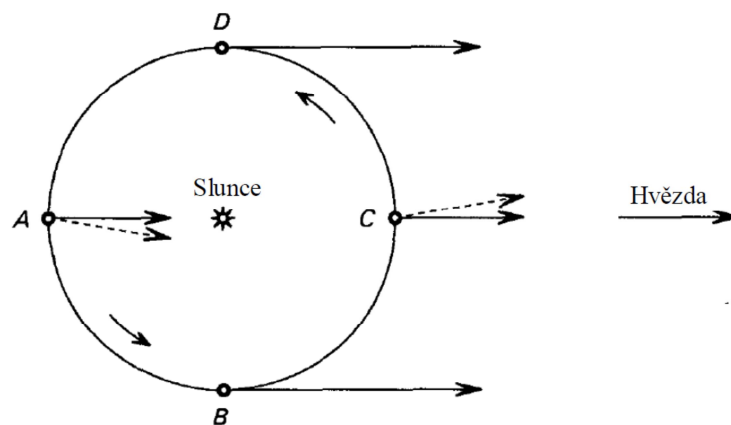
$$c \Delta t' = \gamma (c \Delta t - \beta \Delta x) = \gamma c \Delta t (1 - \beta \bar{\beta}), \quad \bar{\beta} = \frac{\Delta x}{c \Delta t} > 1.$$

Pro všechny soustavy K' s $1/\bar{\beta} < \beta < 1$ je pak opravdu $\Delta t' = t'_2 - t'_1 < 0$.

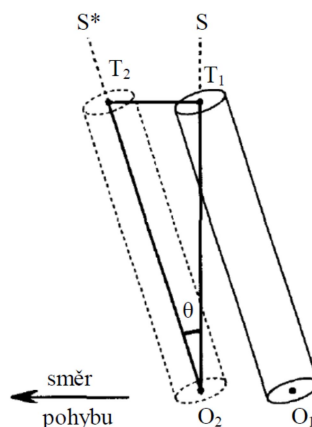
2. Příklady relativistických jevů

2.1 Aberace světla

Při pozorování hvězd ze Země se projevuje (mimo jiné) to, že Země obíhá kolem Slunce. Na obrázcích je znázorněn jev aberace světla, který se nejvíce projeví v bodech A a C,



zatímco paralaxa se nejvíce projeví při pozorování v bodech B a D. Když-li světelný paprsek od



hv zdy S vstupuje do tubusu v bod T_1 , je okulár v míst O_1 tak, aby p i posunutí tubusu vlivem pohybu Zem byl v poloze O_2 , kde zachytí uvařovaný paprsek. Hv zda se ov-em jeví v poloze S^* . Obecný výraz pro transformaci složek vektoru rychlosti máme vztah (1.19)

$$v_x = \frac{v'_x + V}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_y = \frac{v'_y \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}, \quad v_z = \frac{v'_z \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + v'_x V/c^2}. \quad (2.1)$$

Sledujeme-li šíření světelného paprsku v rovině $x-y$ ($v_z = v'_z = 0$ při vhodné volbě úhlu θ' resp. θ , tj. $v_x = c \sin \theta$, $v_y = -c \cos \theta$ resp. $v'_x = c \sin \theta'$, $v'_y = -c \cos \theta'$)

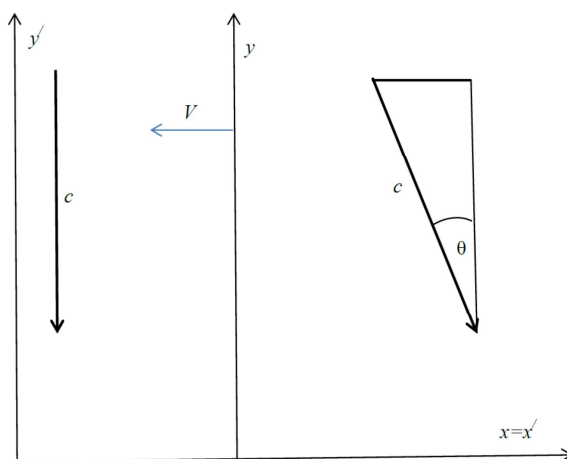
$$\sin \theta = \frac{\sin \theta' + \beta}{1 + \beta \sin \theta'}, \quad \cos \theta = \frac{\cos \theta' \sqrt{1 - \beta^2}}{1 + \beta \sin \theta'}, \quad (2.2)$$

dostaneme po podělení výrazu ve (2.2) vztah mezi úhly v soustavě spojené se zdrojem vysílajícím paprsek K' a soustavě spojené s detektorem přijímajícím paprsek K (tubus dalekohledu), která se vůči K' pohybuje rychlostí $-V$ podél osy x

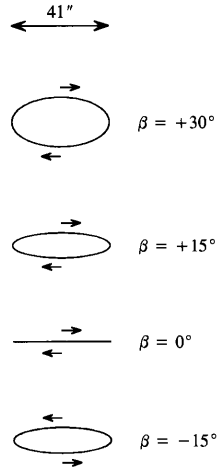
$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\beta + \sin \theta'}{\sqrt{1 - \beta^2} \cos \theta'}. \quad (2.3)$$

Pro $\theta' = 0$ dostaneme z (2.3)

$$\operatorname{tg} \theta = \beta / \sqrt{1 - \beta^2} \Rightarrow \sin \theta = \beta. \quad (2.4)$$



Na obrázku je případ $\theta' = 0$ nakreslen. Pro pohyb Zem kolem Slunce je maximální velikost aberace rovná $20,5''$. Jestliže neleží směr ke hv zdi v rovině ekliptiky, pozorujeme zdánlivou polohu hv zdy jako elipsu s velkou osou $41''$, jak je vidět na dalším obrázku. Zdánlivá poloha hv zdy v rovině ekliptiky ($\beta = 0^\circ$) se posouvá po úsece, pro hv zdu směrem k pólu ekliptiky ($\beta = 90^\circ$) leží pozorované polohy na kružnici.



Výraz (2.3) je nesymetrický vzhledem k soustavám K a K' , což vypadá v teorii relativity podivně. Malá úprava, když zvolíme pro vyjádření úhly $\vartheta = \theta - \pi/2$, $\vartheta' = \theta' - \pi/2$ a do trigonometrické identity

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \frac{\sin \vartheta}{1 + \cos \vartheta} \quad (2.5)$$

dosadíme z (2.2) vede však k symetrickému vztahu

$$\tan \frac{\vartheta}{2} = \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \tan \frac{\vartheta'}{2} \quad (2.6)$$

Velmi výrazně se jev aberace projevuje v úhlovém rozložení. Předpokládejme, že zdroj elektromagnetického záření má ve své klidové soustavě K' izotropní rozložení intenzity (úhel θ je nyní považován jako úhel s osou x , v předchozím značení tedy úhel ϑ)

$$dI' = \frac{dE'}{dt'} = I_0 d\Omega' = I_0 \sin \theta' d\theta' d\varphi' \quad (2.7)$$

Vztah (1.31) vyjádříme pro veličiny v soustavě K' a napíšeme v diferenciálním tvaru

$$\frac{dE'}{c} = \gamma \left(\frac{dE}{c} - \beta dp_x \right), \quad dp'_x = \gamma \left(-\beta \frac{dE}{c} + dp_x \right), \quad dp'_y = dp_y, \quad dp'_z = dp_z \quad (2.8)$$

a dosadíme (pro elektromagnetické vlnění platí $E = pc$)

$$\begin{aligned} dp'_x &= \frac{dE}{c} \cos \theta, & dp'_y &= \frac{dE}{c} \sin \theta \cos \varphi, & dp'_z &= \frac{dE}{c} \sin \theta \sin \varphi, \\ dp'_x &= \frac{dE'}{c} \cos \theta', & dp'_y &= \frac{dE'}{c} \sin \theta' \cos \varphi', & dp'_z &= \frac{dE'}{c} \sin \theta' \sin \varphi'. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Je vidět, že azimutální úhly se rovnají, tj. $\varphi = \varphi'$ a pro polární úhly platí vztahy analogické vztahům (2.2)

$$\sin\theta' = \frac{\sin\theta}{\gamma(1-\beta\cos\theta)} \quad , \quad \cos\theta' = \frac{\cos\theta-\beta}{1-\beta\cos\theta} \quad (2.10)$$

Dosadíme je-t za dt' z (1.16) (v soustav zdroje vychází zá ení z jednoho bodu, tedy $dx'=0$) a máme

$$dI = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{1}{1-\beta\cos\theta} \frac{dE'}{dt'} = \frac{I_0}{\gamma^2} \frac{1}{1-\beta\cos\theta} \frac{d\Omega'}{d\Omega} d\Omega \quad . \quad (2.11)$$

Jednoduchý výpo et dává

$$\frac{d\Omega'}{d\Omega} = \frac{d\cos\theta'}{d\cos\theta} = \frac{1}{\gamma^2(1-\beta\cos\theta)^2} \quad , \quad (2.12)$$

takže pro intenzitu dostáváme výsledný vztah

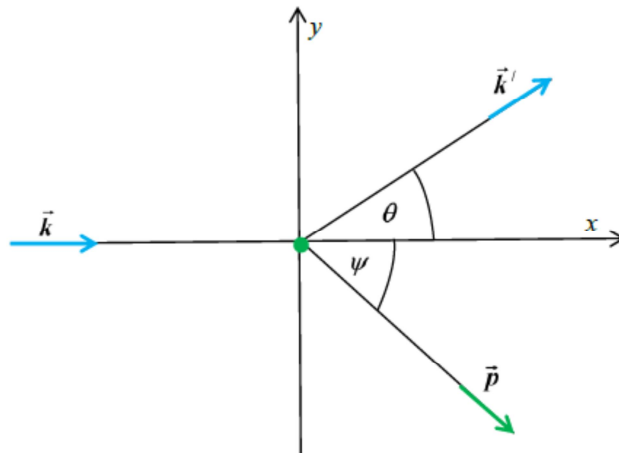
$$dI = I_0(1-\beta^2)^2 \frac{d\Omega}{(1-\beta\cos\theta)^3} \quad . \quad (2.13)$$

Vztah (2.13) reprezentuje pozoruhodnou úhlovou závislost rozlofení intenzity izotropního (rozumí se ve vlastní klidové soustav) zdroje. Integrací vztahu se p esv d íme, fle se p írozen nezmení celková intenzita $I=4\pi I_0$.

2.2 Compton v rozptyl

Podél osy x dopadá foton rentgenového zá ení s energií $\hbar\omega$ na elektron v klidu, po rozptylu pokračuje odchýlen od p vodního sm ru o úhel θ a s nižší energií $\hbar\omega'$. Zákony zachování nám dají (pohyb se d je v rovin)

$$\begin{aligned} \hbar\omega + mc^2 &= \hbar\omega' + \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad , \\ \frac{\hbar\omega}{c} &= \frac{\hbar\omega'}{c} \cos\theta + p \cos\psi \quad , \quad 0 = \frac{\hbar\omega'}{c} \sin\theta - p \sin\psi \quad . \end{aligned} \quad (2.14)$$



Po kratším výpočtu (vyloučením šnepotebných neznámých p a λ) dojdeme k výslednému známému vztahu pro rozdíl vlnových délek ($k = \hbar \omega / c = 2\pi / \lambda$)

$$\Delta \lambda = \lambda' - \lambda = \lambda_c (1 - \cos \theta) \quad , \quad \lambda_c = \frac{2\pi \hbar}{mc} \quad , \quad (2.15)$$

kde λ_c je konstanta Comptonova vlnová délka.

2.3 Doppler v jev

Doppler v jev je pozorovaná změna energie fotonu (frekvence vlnění ω'), emitovaného zdrojem, který se sám pohybuje rychlostí V podél osy x v i laboratorní soustav ("pozorovateli") K (v ní je pozorována frekvence vlnění ω). Soustava spojená se zdrojem je K' . Uvažujme rovinnou vlnu s vlnovým vektorem v rovině $x-y$. Například polohy míst s danou intenzitou vlny musí určit stejný pozorovatelé v obou soustavách, pouze jim přidáme známé souřadnice a frekvence, ale fáze vlny je relativistický invariant. V našem případě píšeme rovnost fází jako

$$\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \cos \theta' - \frac{y'}{c} \sin \theta' \right) = \omega \left(t - \frac{x}{c} \cos \theta - \frac{y}{c} \sin \theta \right) \quad . \quad (2.16)$$

Úhel mezi směrem šíření vlny a směrem pohybu zdroje (tj. osou x) jsme označili θ . Dosadíme-li do (2.16) ze vztahu pro Lorentzovu transformaci (1.14), dostáváme

$$\omega' \left(t' - \frac{x'}{c} \cos \theta' - \frac{y'}{c} \sin \theta' \right) = \omega \left(\frac{1 - \beta \cos \theta}{\sqrt{1 - \beta^2}} t' - \frac{\cos \theta - \beta}{\sqrt{1 - \beta^2}} \frac{x'}{c} - \frac{y'}{c} \sin \theta \right) \quad . \quad (2.17)$$

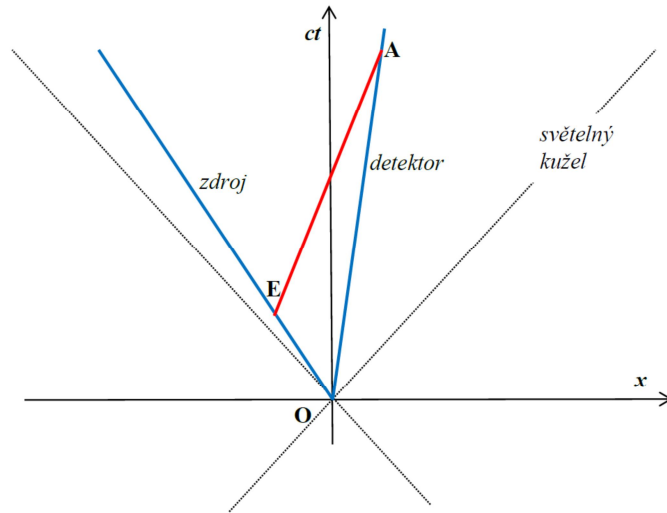
Porovnáním členů u t' dostaneme vztah vyjadřující Doppler v jev

$$\omega = \omega' \frac{\sqrt{1 - \beta^2}}{1 - \beta \cos \theta} \approx \omega' \left[1 + \beta \cos \theta + \frac{\beta^2}{2} \cos 2\theta \right] \quad . \quad (2.18)$$

Klasický Doppler v jev (bez členů u β^2) je rozdíl ve frekvenci přibližujícího se ($\theta = 0$) a vzdalujícího se ($\theta = \pi$) zdroje, relativistický Doppler v jev (člen u β^2) pozorujeme pro $\theta = \pi/2$. Porovnáním členů u x' dostaneme vztah vyjadřující aberaci světla, ale s jiným značením a jinou situací (zde se pohybuje soustava spojená se zdrojem, v 2.1 se pohybovala laboratorní soustava).

Pokud budeme uvažovat o vzájemném pohybu zdroje a detektoru po společné přímce, můžeme si představit diagram na obrázku (nemusí se jednat jen o světlo, může jít třeba o zvukové vlnění). V obrázku je znázorněn světelný kufel, po kterém by se z bodu O šířily

světelné paprsky. Protože na osách máme souřadnice x a ct a pro světlo máme interval $s^2 = c^2 t^2 - x^2 = 0$, je úhel povrchu kužele s osami roven 45° . Naopak podmínky zázoru ujmí



pohyb zdroje OE a detektoru OA musí svírat s osou ct úhel menší jak 45° , jejich rychlost je menší jak rychlost světla. Úsečka EA svírá s osou ct úhel mnohem menší než 45° , jde-li o zvukovou vlnu, nebo úhel právě 45° , jde-li o elektromagnetické vlnění. Máme tedy pro rychlosti signálu, zdroje a detektoru

$$c_s = \frac{x_A - x_E}{t_A - t_E}, \quad v_Z = -\frac{x_E}{t_E}, \quad v_D = \frac{x_A}{t_A}.$$

Rychlosti pohybujeme tak, aby kladné jsou při vzdalování zdroje a detektoru. Když se zdroj a detektor potkají v O, zapne se signál. Vypnutí signálu po uplynutí jedné periody nastane u zdroje v bod E a detektor je zaznamenán v bod A. Vlastní čas, který uplynutí periody odpovídá je pro zdroj a detektor dány vztahy

$$\begin{aligned} \tau_Z &= \frac{\overline{OE}}{c} = \sqrt{t_E^2 - x_E^2/c^2} = t_E \sqrt{1 - v_Z^2/c^2}, \\ \tau_D &= \frac{\overline{OA}}{c} = \sqrt{t_A^2 - x_A^2/c^2} = t_A \sqrt{1 - v_D^2/c^2}. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Poměr frekvencí je převrácenou hodnotou poměru period

$$\frac{f_D}{f_Z} = \frac{\tau_Z}{\tau_D} = \frac{t_E \sqrt{1 - v_Z^2/c^2}}{t_A \sqrt{1 - v_D^2/c^2}}.$$

Poměr časových údajů získáme úpravou

$$c_s = \frac{x_A - x_E}{t_A - t_E} = \frac{v_D t_A + v_Z t_E}{t_A - t_E} \Rightarrow \frac{t_E}{t_A} = \frac{1 - v_D/c_s}{1 + v_Z/c_s},$$

takže

$$\frac{f_D}{f_Z} = \frac{1 - v_D/c_s}{1 + v_Z/c_s} \frac{\sqrt{1 - v_Z^2/c^2}}{\sqrt{1 - v_D^2/c^2}} . \quad (2.20)$$

Pro všechny rychlosti malé ve srovnání s rychlostí sv tla (zvukové vlny) dostáváme klasický vztah pro Doppler v jev ó p i vzdalování ($v_Z > 0, v_D > 0$) vnímaná frekvence klesá, p i p iblifování ($v_Z < 0, v_D < 0$) vnímaná frekvence roste

$$\frac{f_D}{f_Z} \doteq \frac{1 - v_D/c_s}{1 + v_Z/c_s} . \quad (2.21)$$

Pro sv tlo ($c_s = c$) m fleme (2.20) p epsat na

$$\frac{f_D}{f_Z} = \sqrt{\left(\frac{1 - v_D/c}{1 + v_Z/c}\right)\left(\frac{1 - v_Z/c}{1 + v_D/c}\right)} . \quad (2.22)$$

Vezme te v úvahu vztah pro skládání rychlostí (1.21) a pro vzájemnou rychlost zdroje a detektoru máme

$$v = \frac{v_Z + v_D}{1 + v_Z v_D/c^2} .$$

Roznásobením výraz ve (2.22) a dosazením relativní rychlosti dostáváme vztah

$$\frac{f_D}{f_Z} = \sqrt{\frac{1 - v/c}{1 + v/c}} , \quad (2.23)$$

který p írozen souhlasí se vztahem (2.18) pro $\theta = 0$.

2.4 Vst íčné svazky

P i srážce dvou ástic (ekn me elektronu a positronu) m fle vzniknout nová ástice. Spo t me maximální hmotnost vzniklé ástice.

(a) Na elektron v klidu dopadá positron s kinetickou energií $T = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - mc^2$.

Zákony zachování dávají

$$mc^2 + \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{M^2 c^4 + P^2 c^2} , \quad 0 + p = P , \quad (2.24)$$

takfle (pro $T \gg mc^2$)

$$M c^2 \approx \sqrt{2 m c^2 T} . \quad (2.25)$$

(b) eln se srážejí elektron a positron stejné energie. Ze zákon zachování pak

$$\sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} + \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{M^2 c^4 + P^2 c^2} , \quad p - p = P , \quad (2.26)$$

takfle (op t pro $T \gg mc^2$)

$$M c^2 \approx 2T . \quad (2.27)$$

Pro kinetickou energii v LEP $T \approx 200 \text{ GeV}$ a klidovou energii elektronu $mc^2 \approx 500 \text{ keV}$ jde o vskutku propastný rozdíl v dosažitelné maximální hmotnosti částice vytvořené při srážce elektronu s pozitronem.

2.5 Hafeleho a Keating v experiment

Hafele s Keatingem navrhli a provedli¹ pozoruhodný pokus s atomovými hodinami, které nechali oblet zemi v oběhu nad severní a jižní polokoulí a porovnali jejich údaje s údaji hodin, které zůstaly na zemi. Přitom je třeba uvažovat nejen jev dilatace času, ale i rozdíl gravitačního potenciálu. Základním výrazem je interval Schwarzschildova řešení Einsteinových rovnic

$$ds^2 = \left(1 + \frac{2\chi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left[\frac{dr^2}{1 + \frac{2\chi}{c^2}} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right], \quad (2.28)$$

kde gravitační potenciál je

$$\chi = -\frac{GM}{r}. \quad (2.29)$$

Pro element vlastního času $d\tau = ds/c$ dostáváme

$$d\tau = \left[\left(1 + \frac{2\chi}{c^2}\right) - \frac{1}{c^2} \left(\frac{u_r^2}{1 + \frac{2\chi}{c^2}} + u_\theta^2 + u_\varphi^2 \right) \right]^{1/2} dt, \quad (2.30)$$

kde

$$u_r = \frac{dr}{dt}, \quad u_\theta = r \frac{d\theta}{dt}, \quad u_\varphi = r \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}, \quad u^2 = u_r^2 + u_\theta^2 + u_\varphi^2. \quad (2.31)$$

Parametrizace je dána pomocí souřadnicového času t času nějakého pozorovatele hledícího na severní pól Země z dostatečně velké vzdálenosti. V případě slabého pole a malých rychlostí ($|\chi| \ll c^2$, $u^2 \ll c^2$) pak

$$d\tau \cong \left(1 + \frac{\chi}{c^2} - \frac{u^2}{2c^2}\right) dt. \quad (2.32)$$

¹ J.C. Hafele, R.E. Keating: Around-the-World Atomic Clocks: Predicted Relativistic Time Gain, Science 177(1972), 166-168.

J.C. Hafele, R.E. Keating: Around-the-World Atomic Clocks: Observed Relativistic Time Gain, Science 177(1972), 168-170.

Pro jednoduchost budeme v dalších výpočtech předpokládat, že gravitační potenciál Země je sféricky symetrický a dle se budou odehrávat nad rovníkem. Také zanedbáme změny rychlosti při vzletu a přistání letadel, velikost jejich rychlosti označíme v , letovou výšku h . Protože po startu i konec odletu se odehrává v jediném prostorovém bodě, je interval souadnicového času $\Delta t = t_B - t_A$ pro všechny tyto hodiny stejný. Je potom pro intervaly jednotlivých hodin (při našich předpokladech je integrand (2.32) integrálu při výpočtu intervalu vlastního času u jednotlivých hodin konstantní)

$$\begin{aligned}\Delta\tau_0 &= \left[1 - \frac{GM}{c^2 R} - \frac{R^2 \Omega^2}{2c^2} \right] \Delta t, \\ \Delta\tau_v &= \left[1 - \frac{GM}{c^2 (R+h)R} - \frac{[(R+h)\Omega + v]^2}{2c^2} \right] \Delta t, \\ \Delta\tau_z &= \left[1 - \frac{GM}{c^2 (R+h)R} - \frac{[(R+h)\Omega - v]^2}{2c^2} \right] \Delta t.\end{aligned}\quad (2.33)$$

Další zjednodušení získáme uvažováním nerovnosti $h \ll R$, takže

$$\frac{\Delta\tau_v - \Delta\tau_0}{\Delta\tau_0} = \frac{gh}{c^2} - \frac{(2v_R + v)v}{2c^2}, \quad \frac{\Delta\tau_z - \Delta\tau_0}{\Delta\tau_0} = \frac{gh}{c^2} + \frac{(2v_R - v)v}{2c^2}, \quad (2.34)$$

kde jsme označili

$$g = \frac{GM}{R} \approx 9,81 \text{ m s}^{-2}, \quad v_R = R\Omega \approx 465,1 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.35)$$

3. Tenzory

3.1 Základní pojmy

Při značení se budeme jednak řídit Einsteinovou konvencí (přes stejné indexy nahoru a dolů se sečítá), jednak latinské indexy budou nabývat hodnot pro časoprostorové veličiny (0, 1, 2, 3), řecké indexy hodnot pro prostorové veličiny (1, 2, 3). Naneštěstí tato domluva bývá i opačná.

Nejprve definujeme podstatné tenzory. Metrický tenzor a jednotkový tenzor jsou

$$g_{ik} = g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \delta_i^k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

Snadno vidíme, že platí

$$g_{il} g^{lk} = \delta_i^k. \quad (3.2)$$

Úplný antisymetrický pseudotenzor 4. řádu je definován pomocí vztah

$$\varepsilon^{iklm} (\varepsilon^{0123} = 1) \quad , \quad \varepsilon_{iklm} (\varepsilon_{0123} = -1) \quad . \quad (3.3)$$

ty vektory sou adnic události (kontravariantní a kovariantní) zapisujeme jako

$$x^i = (x^0, x^1, x^2, x^3) = (ct, \vec{r}) \quad , \quad x_i = (x_0, x_1, x_2, x_3) = (ct, -\vec{r}) \quad . \quad (3.4)$$

Pomocí metrického tenzoru p evádíme sloflky kontravariantního vektoru na sloflky kovariantního vektoru a naopak

$$x_i = g_{ik} x^k \quad , \quad x^i = g^{ik} x_k \quad (3.5)$$

(s Einsteinovou sumací konvencí). Interval pak můžeme psát jako

$$s^2 = x^i x_i = g_{ik} x^i x^k = g^{ik} x_i x_k = c^2 t^2 - (x^2 + y^2 + z^2) \quad . \quad (3.6)$$

Vnůžeme se na chvíli trojrozměrnému eukleidovskému prostoru. Tam máme polární a axiální vektory. Při změně orientace kartézských souřadných os se změní zápis vektoru pomocí

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = (-x)(-\vec{i}) + (-y)(-\vec{j}) + (-z)(-\vec{k}) \quad . \quad (3.7)$$

Definujeme operaci zrcadlení jako

$$\vec{r}' = \check{P}\vec{r} = -\vec{r} \quad . \quad (3.8)$$

Pro vektor rychlosti máme tedy

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \quad , \quad \vec{v}' = \frac{d(\check{P}\vec{r})}{dt} = \frac{d\vec{r}'}{dt} = -\frac{d\vec{r}}{dt} = -\vec{v} \quad . \quad (3.9)$$

Pro vektor úhlové rychlosti ale

$$\vec{\omega} = \vec{r} \times \vec{v} \quad , \quad \vec{\omega}' = \check{P}\vec{\omega} = \vec{r}' \times \vec{v}' = (-\vec{r}) \times (-\vec{v}) = \vec{r} \times \vec{v} = \vec{\omega} \quad . \quad (3.10)$$

Vektory, které se při zrcadlení transformují stejně jako pomocí (3.9), se nazývají polární a vektory, které se transformují stejně jako úhlová rychlost, se nazývají axiální. Obecně zavádíme ve trojrozměrném prostoru axiální vektor jako pseudovektor duální k antisymetrickému tenzoru

$$C_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{\beta, \gamma=1}^3 \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} C_{\beta\gamma} \quad , \quad C_{\beta\gamma} = A_\beta B_\gamma - A_\gamma B_\beta \quad \Leftrightarrow \quad \vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} \quad . \quad (3.11)$$

Ve trojrozměrném prostoru jsou duálními antisymetrický tenzor 2. řádu s antisymetrickým pseudotenzorem 2. řádu a antisymetrický pseudotenzor 3. řádu s vektorem

$${}^*A^{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} A_{lm} \quad , \quad {}^*A^{ikl} = \varepsilon^{iklm} A_m \quad . \quad (3.12)$$

3.2 Lorentzova grupa

Setkali jsme se s jifl s Lorentzovou transformací. Tato transformace je jednou z transformací, tvo ících Lorentzovu grupu. Tak jako se skalární sou in vektor v trojrozm rném eukleidovském prostoru nem ní p i transformacích z grupy rotací, nebude se skalární sou in ty vektor m nit p i transformacích z Lorentzovy grupy. P iblifn m fleme íci, fle Lorentzova grupa obsahuje rotace v trojrozm rném prostoru, Lorentzovy transformace a r zné operace inverse. Transformaci budeme popisovat pomocí transforma ní matice Λ (v zápisu pomocí matic je horní index ádkový a spodní sloupcový)

$$x^i \rightarrow x'^i = \Lambda^i_k x^k, \quad x \rightarrow x' = \Lambda x. \quad (3.13)$$

Skalární sou in ty vektor je definován jako

$$(x, y) \equiv x_i y^i = g_{ik} x^k y^i. \quad (3.14)$$

Lorentzova transformace je lineární zobrazení, které zobrazuje prostoro as sám na sebe a které zachovává skalární sou in

$$g_{lm} x'^m x'^n = g_{lm} \Lambda^l_i x^i \Lambda^m_k x^k = g_{ik} x^i x^k. \quad (3.15)$$

Podmínka pro invarianci skalárního sou inu je tedy

$$g_{lm} \Lambda^l_i \Lambda^m_k = g_{ik}. \quad (3.16)$$

Jsou-li Λ a M Lorentzovy transformace, jsou také Λ^{-1} a ΛM Lorentzovy transformace, což snadno odvodíme

$$\begin{aligned} g_{ik} &= g_{lm} \Lambda^l_r \Lambda^m_s (\Lambda^{-1})^r_i (\Lambda^{-1})^s_k = g_{rs} (\Lambda^{-1})^r_i (\Lambda^{-1})^s_k, \\ g_{ik} &= g_{lm} M^l_i M^m_k = g_{rs} \Lambda^r_l \Lambda^s_m M^l_i M^m_k = g_{rs} (\Lambda M)^r_i (\Lambda M)^s_k. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Lorentzovy transformace tvo í grupu. Grupa má ty i podmnožiny, charakterizované signaturou determinantu a Λ_0^0 , nebo

$$(\det \Lambda)^2 = 1, \quad (\Lambda_0^0)^2 - \sum_{j=1}^3 (\Lambda_0^j)^2 = 1. \quad (3.18)$$

Máme

$$\begin{aligned} L_+^+ &: \det \Lambda = 1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = 1, \quad I \in L_+^+, \\ L_-^+ &: \det \Lambda = -1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = 1, \quad I_s \in L_-^+, \\ L_+^- &: \det \Lambda = 1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = -1, \quad I_{st} \in L_+^-, \\ L_-^- &: \det \Lambda = -1, \quad \text{sgn } \Lambda_0^0 = -1, \quad I_t \in L_-^-. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Speciální Lorentzova grupa je tvo ena transformacemi s $\det \Lambda = 1$ a $\text{sgn } \Lambda_0^0 = 1$. Speciální Lorentzova grupa obsahuje identickou transformaci, dal í podmnožiny jsou charakterizovány

prvky I_s (prostorová inverse), I_t (časová inverse) a I_{st} (asoprostorová inverse), definovanými pomocí vztah

$$\begin{aligned} (I_s x)^0 &= x^0, & (I_s x)^\alpha &= -x^\alpha, \\ (I_t x)^0 &= -x^0, & (I_t x)^\alpha &= x^\alpha, \\ (I_{st} x)^0 &= -x^0, & (I_{st} x)^\alpha &= -x^\alpha. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Se speciální Lorentzovou grupou je spojena grupa komplexních matic druhého řádu s determinanem, rovným jedné, platí $SO(3,1) = SL(2, C) / Z_2$.

Například matici Lorentzovy transformace (1.14) ($\tanh \psi = \beta$) nebo matici rotace kolem osy z o úhel φ zapíšeme jako

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \cosh \psi & \sinh \psi & 0 & 0 \\ \sinh \psi & \cosh \psi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \beta & 0 & 0 \\ \gamma \beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

nebo

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zkrácené značení

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (3.22)$$

je velmi užité a budeme jej také používat. Dalším velmi užitým postupem bude užití výrazu pro interval s parametrizací podle času

$$ds = \sqrt{c^2 dt^2 - d\vec{r}^2} = c \sqrt{1 - \beta^2} dt = \frac{c}{\gamma} dt. \quad (3.23)$$

3.3 Čtyřvektor rychlosti a čtyřvektor zrychlení

Definujeme čtyřvektor rychlosti p iroženým způsobem jako

$$u^i = \frac{dx^i}{ds}, \quad u^i = \left(\gamma, \gamma \frac{\vec{v}}{c} \right), \quad u^i u_i = 1. \quad (3.24)$$

Slovem p irožením míníme, že máme automaticky zajištěno, že jde o čtyřvektor a prostorová část je úmírně časové změně polohy. Obdobně p irožením definujeme čtyřvektor zrychlení

$$w^i = \frac{du^i}{ds} = \frac{d^2 x^i}{ds^2}, \quad u^i w_i = 0. \quad (3.25)$$

Podívejme se na relativistický popis pohybu s konstantním zrychlením. V souadné soustavě spojené s částicí K , kde okamžitá rychlost částice je samozřejmě $v=0$ (soustava nemusí být inerciální) máme

$$u_K^i = (1, 0, 0, 0) \quad , \quad w_K^i = (0, a/c^2, 0, 0) \quad , \quad (3.26)$$

kde $a = dv/dt$ je obyčejné zrychlení. V obecné souadné soustavě je rychlost podle (3.24)

$$u^i = \gamma(1, \beta, 0, 0) \quad . \quad (3.27)$$

Víme si, že pro stanovení této rychlosti jsme mohli také použít vztah $u^i = \Lambda_k^i u_K^k$ s maticí Λ ze (3.21)

$$\begin{pmatrix} u^0 \\ u^1 \\ u^2 \\ u^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma \\ \beta\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad . \quad (3.28)$$

Protože se jedná o zrychlený pohyb, není tento jednoduchý postup pro výpočet tohoto vektoru zrychlení použitelný, protože nejde o přechod mezi inerciálními soustavami. Musíme tedy provést přímo výpočet podle definice (3.25). Ve vztahu (3.28) můžeme derivovat buď výsledný tvar tohoto vektoru rychlosti nebo derivovat transformační matici. S uvažováním

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{\gamma^3}{c^2} v \frac{dv}{dt} = \frac{v}{c^2} \frac{d}{dt}(\gamma v)$$

dospějeme oběma postupy k výrazu

$$w^j = \frac{\gamma}{c^2} \frac{d(\gamma v)}{dt} (\beta, 1, 0, 0) \quad . \quad (3.29)$$

Tento výraz přechází po dosazení $\beta=0, \gamma=1$ a $dv/dt=a$ do výrazu w_K^i uvedeného v (3.26).

Po malé úpravě (z rovnosti $w^i w_i = w_K^i w_{Ki}$) dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = a \quad . \quad (3.30)$$

S použitými podmínkami $v_0=0, x_0=0$ dostáváme řešení

$$v = \frac{at}{\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2}} \quad , \quad x = \frac{c^2}{a} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{at}{c}\right)^2} - 1 \right) \quad . \quad (3.31)$$

Zpoátku ve shodě s klasickými výrazy $v \approx at$, $x \approx at^2/2$, po delší době se ale rychlost limitně blíží k rychlosti světla $v \rightarrow c$ a trajektorie částice je blízká dráze světelného paprsku $x \rightarrow ct$.

3.4 Princip nejmenšího úinku

Úinek musí být invariantní a co nejjednodušší. Nabízí se integrál podél světelné dráhy. Abychom dostali pro úinek známý nerelativistický výraz, musíme konstantu úhmosti zvolit rovno $-mc$, tedy

$$S = -mc \int_a^b ds = -mc^2 \int_{t_a}^{t_b} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} dt \quad . \quad (3.32)$$

Lagrangeova funkce a hybnost jsou

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \quad \vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad . \quad (3.33)$$

Hamiltonova funkce je pak

$$H = \vec{p} \cdot \vec{v} - L = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \sqrt{p^2 c^2 + m^2 c^4} \quad . \quad (3.34)$$

Z předchozích rovnic (3.33) a (3.34) vidíme, že

$$\vec{p} = \frac{H\vec{v}}{c^2} \quad , \quad \vec{v} = \frac{c^2 \vec{p}}{H} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}} \quad . \quad (3.35)$$

Pohybové rovnice dostaneme z variačního principu

$$\begin{aligned} \delta S &= -mc \delta \int_a^b ds \quad , \quad \delta ds = \delta \left(g_{ik} dx^i dx^k \right)^{1/2} = \frac{g_{ik} dx^i \delta dx^k}{ds} = u_k \delta dx^k \quad , \\ \delta S &= -mc \int_a^b u_k \delta dx^k = -mc u_k \delta x^k \Big|_a^b + mc \int_a^b \delta x^k \frac{du_k}{ds} ds \quad . \end{aligned} \quad (3.36)$$

Odsud pak

$$\frac{du^i}{ds} = 0 \quad , \quad p_i = -\frac{\partial S}{\partial x^i} = mc u_i \quad . \quad (3.37)$$

ty vektor hybnosti definujeme jako časopodobný vektor (tvar velikosti je kladný)

$$p^i = \left(\frac{H}{c}, \vec{p} \right) \quad , \quad p^i p_i = m^2 c^2 \quad (3.38)$$

a ty vektor síly jako prostorupodobný vektor (je kolmý na časopodobný vektor hybnosti)

$$g^i = \frac{dp^i}{ds} = \left(\frac{\vec{f} \cdot \vec{v}}{c^2 \sqrt{1-\beta^2}}, \frac{\vec{f}}{c \sqrt{1-\beta^2}} \right), \quad g^i p_i = 0 \quad . \quad (3.39)$$

tvorec velikosti ty vektoru síly je

$$g^i g_i = \frac{1}{c^2 (c^2 - v^2)} \left[(\vec{f} \cdot \vec{v})^2 - c^2 f^2 \right] < 0 \quad .$$

Hamiltonova - Jacobiho rovnice volné ástice je z (3.38)

$$g^{ik} \frac{\partial S}{\partial x^i} \frac{\partial S}{\partial x^k} = m^2 c^2 \quad , \quad \frac{1}{c^2} \left(\frac{\partial S}{\partial t} \right)^2 - \left[\left(\frac{\partial S}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial z} \right)^2 \right] = m^2 c^2 \quad . \quad (3.40)$$

4. Náboj v elektromagnetickém poli

4.1 ty rozm rný potenciál a ú inek

Elektromagnetické pole popisujeme pomocí ty rozm rného potenciálu

$$A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A} \right) \quad , \quad A_i = \left(\frac{\phi}{c}, -\vec{A} \right) \quad , \quad (4.1)$$

kde ϕ je skalární a \vec{A} vektorový potenciál. Pomocí derivací A_i vytvo íme antisymetrický tensor druhého ádu

$$F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad . \quad (4.2)$$

Dimense prostoro asu je ty i, má tedy tensor F_{ik} -est nezávislých sloflek. Snadno se p esv d íme, fle jsou to sloflky dvou trojrozm rných t írozrn rných vektor \vec{E} a \vec{B} , které jsou v t írozrn rném zápisu dány vztahy

$$\vec{E} = -\vec{\nabla} \phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \quad . \quad (4.3)$$

Tensor elektromagnetického pole má pomocí \vec{E} a \vec{B} vyjád ení

$$(4.4)$$

K ú inku volné ástice p idáme len závislý na elektromagnetickém poli ó nejjednodu—ím invariantním výrazem obsahujícím ty vektor A_i je skalár $A_i dx^i$. Vezmeme tedy jako ú inek

$$S = \int_a^b (-mc ds - e A_i dx^i) \quad . \quad (4.5)$$

Parametrizujeme-li integrál pomocí sou adnice asu, dostáváme

$$S = \int_{t_a}^{t_b} \left(-mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \phi \right) dt \quad . \quad (4.6)$$

Ukážeme odvození pohybových rovnic jak ve čtyřrozměrném, tak třírozměrném zápisu. Pro variaci ds jsme již odvodili vztah ve (3.36), tj. $\delta ds = u_i \delta x^i$, takže variací (4.5) dostáváme

$$\begin{aligned} \delta S = & - \int_a^b (mc u_i \delta x^i + e A_i \delta x^i + e \delta A_i dx^i) = \\ & - (mc u_i + e A_i) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b (mc du_i + e \delta x^i dA_i - e \delta A_k dx^k) \quad . \end{aligned} \quad (4.7)$$

Infinitesimální změny potenciálu rozepíšeme

$$dA_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k} dx^k \quad , \quad \delta A_k = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} \delta x^i$$

a parametrizujeme integrál pomocí elementu ds (tedy $dx^k = u^k ds$), dostáváme tak

$$\delta S = - (mc u_i + e A_i) \delta x^i \Big|_a^b + \int_a^b \left[mc \frac{du_i}{ds} - e \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \right] \delta x^i ds \quad . \quad (4.8)$$

Variací princip nám tak dává jak výraz pro zobecněnou hybnost

$$p_i = mc u_i + e A_i \quad , \quad (4.9)$$

tak pohybovou rovnicí

$$mc \frac{du_i}{ds} = e \left(\frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \right) u^k \quad . \quad (4.10)$$

Pomocí tensoru pole (4.2) resp. jeho kontravariantních složek $F^{ik} = g^{il} g^{km} F_{lm}$ můžeme (4.10) zapsat jako

$$mc \frac{du^i}{ds} = e F^{ik} u_k \quad . \quad (4.11)$$

Odvození pohybových rovnic z (4.6) vychází z Lagrangeovy funkce

$$L = -mc^2 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} + e \vec{A} \cdot \vec{v} - e \phi \quad . \quad (4.12)$$

Je pak

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\vec{A} = \vec{p} + e\vec{A} \quad ,$$

$$\frac{d}{dt}(\vec{p} + e\vec{A}) = \frac{d\vec{p}}{dt} + e\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} + e(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A}$$

a

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = e\vec{\nabla}(\vec{A} \cdot \vec{v}) - e\vec{\nabla}\phi = e(\vec{v} \cdot \vec{\nabla})\vec{A} + e\vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - e\vec{\nabla}\phi \quad .$$

Dosazením do Lagrangeovy rovnice dostáváme

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = e(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad . \quad (4.13)$$

Zopakujme dle vlastností ty vektor rychlosti a zrychlení

$$u^i = \frac{dx^i}{ds} \Rightarrow u_i u^i = 1 \Rightarrow \frac{d}{ds}(u_i u^i) = 0 \Rightarrow u_i \frac{du^i}{ds} = u_i w^i = 0 \quad , \quad (4.14)$$

ty vektor rychlosti je asupodobný, ty vektor zrychlení prostorupodobný. Pro asupodobný ty vektor hybnosti máme

$$p^i = mu^i = (p^0, \vec{p}) = (\gamma mc, \gamma m\vec{v}) \quad , \quad p_i p^i = (mc)^2 \quad . \quad (4.15)$$

P i časové inverzi $t \rightarrow -t$ je $p^0 \rightarrow p^0$ a $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$. Má-li z stat pohybová rovnice (4.13) nezmenění, musí pak být $\vec{E} \rightarrow \vec{E}$ a $\vec{B} \rightarrow -\vec{B}$. Ze vztahu (4.3) pak pro potenciály musí být $\phi \rightarrow \phi$ a $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$. P i prostorové inverzi $\vec{r} \rightarrow -\vec{r}$ je opět $p^0 \rightarrow p^0$ a $\vec{p} \rightarrow -\vec{p}$. Má-li z stat v tomto případě pohybová rovnice (4.13) nezmenění, musí pak být $\vec{E} \rightarrow -\vec{E}$ a $\vec{B} \rightarrow \vec{B}$. Ze vztahu (4.3) pak pro potenciály musí být opět $\phi \rightarrow \phi$ a $\vec{A} \rightarrow -\vec{A}$. Vidíme, že pokud jde o diskrétní transformace, je invariance zachována pouze při současném působení časové a prostorové inverze. Je to pochopitelné, uvážíme-li, že ty vektory mají asupodobné i prostorupodobné složky.

P idáme-li ke ty vektoru A_i ty rozměrný gradient libovolné funkce, tensor elektromagnetického pole se nezmení

$$F_{ik} = \frac{\partial}{\partial x^i} \left(A_k + \frac{\partial f}{\partial x^k} \right) - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} + \underbrace{\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 f}{\partial x^k \partial x^i}}_{=0} \quad .$$

Této vlastnosti říkáme kalibrační invariance. Nezmení se ani pohybová rovnice náboje v poli, protože první člen v úvinku je

$$-\int_a^b e \left(A_i + \frac{\partial f}{\partial x^i} \right) dx^i = -\int_a^b e A_i dx^i - \underbrace{\int_a^b d(e f)}_{ef(b)-ef(a)} .$$

4.2 Invarianty elektromagnetického pole

Pole je popsáno antisymetrickým tensorem F_{ik} . Podle (3.12) k n mu m fleme vytvo it duální tensor $*F^{ik} = \frac{1}{2} \varepsilon^{iklm} F_{lm}$. Máme tedy možnost vytvo it dva invariantní výrazy (skaláry vzhledem k transformacím z Lorentzovy grupy)

$$F^{ik} F_{ik} = \text{inv} \quad , \quad *F^{ik} F_{ik} = \text{inv} \quad . \quad (4.16)$$

Ve vyjád ení tensor pomocí vektor pole podle (4.4) pak máme

$$c^2 \vec{B}^2 - \vec{E}^2 = \text{inv} \quad , \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = \text{inv} \quad . \quad (4.17)$$

Vztah (4.17) má d lefité d sledky. Pokud v n jaké soustav platí $\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 = 0$, m fleme vřdy najít inerciální soustavu, kdy bu $\vec{E} = 0$ (pokud je $c^2 \vec{B}_0^2 - \vec{E}_0^2 > 0$) nebo $\vec{B} = 0$ (pokud je $c^2 \vec{B}_0^2 - \vec{E}_0^2 < 0$) Naopak, platí-li v n jaké soustav $\vec{E}_0 \cdot \vec{B}_0 \neq 0$, m fleme vřdy najít inerciální soustavu, kde budou ob pole rovnob fná.

4.3 Pohyb náboje v konstantním homogenním poli

Konstantním polem nazýváme pole, které se s asem nem ní. Homogenní pole má pak v celém prostoru stejný sm r i velikost. Elektrické pole intenzity \vec{E} získáme ze skalárního potenciálu²

$$\phi = -\vec{E} \cdot \vec{r} \quad , \quad (4.18)$$

magnetické pole indukce \vec{B} z vektorového potenciálu³

$$\vec{A} = \frac{1}{2} \vec{B} \times \vec{r} \quad . \quad (4.19)$$

K vektorovému potenciálu m fleme p idat gradient libovolné funkce. Nap íklad pro pole $\vec{B} = (0, 0, B)$ p i tením nebo ode tením gradientu funkce $f = x y B/2$ dostáváme potenciály

² $\text{grad}(\vec{E} \cdot \vec{r}) = (\vec{E} \cdot \text{grad}) \vec{r} = \vec{E}$.

³ $\text{rot}(\vec{B} \times \vec{r}) = \vec{B} \text{div} \vec{r} - (\vec{B} \cdot \text{grad}) \vec{r} = 2 \vec{B}$.

$$\vec{A} = \left(-\frac{1}{2} B y, \frac{1}{2} B x, 0 \right) \rightarrow \begin{cases} \vec{A}_{(+)} = (0, B x, 0) \\ \vec{A}_{(-)} = (-B y, 0, 0) \end{cases} .$$

Výraz $\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2}$ budeme nazývat kinetickou energií⁴.

Uvažujme nejprve pohyb v elektrickém poli, v jehož směru orientujeme osu x a který se odehrává v rovině $x y$. S pohybovými rovnicemi (teďka je derivace podle času t)

$$\dot{p}_x = e E \quad , \quad \dot{p}_y = 0$$

a použijeme s nimi podmínkami

$$p_x(0) = 0 \quad , \quad p_y(0) = p_0$$

dostáváme

$$p_x = e E t \quad , \quad p_y = p_0 \quad . \quad (4.20)$$

Kinetická energie je

$$\mathcal{E} = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = \sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2} \quad , \quad (4.21)$$

kde jsme označili $\mathcal{E}_0 = \mathcal{E}(0)$. Podle vztahu (3.35) máme pro složky rychlosti

$$\frac{dx}{dt} = \frac{p_x c^2}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 e E t}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}} \quad , \quad \frac{dy}{dt} = \frac{p_y c^2}{\mathcal{E}} = \frac{c^2 p_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}}$$

a integrací těchto rovnic dostáváme

$$\begin{aligned} x &= \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2} - \mathcal{E}_0}{e E} \quad , \\ y &= \frac{p_0 c}{e E} \ln \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2} + c e E t}{\mathcal{E}_0} = \frac{p_0 c}{e E} \ln \frac{\mathcal{E}_0}{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2} - c e E t} \quad . \end{aligned} \quad (4.22)$$

První vyjádření pro y použijeme pro výraz $\exp[e E y / (p_0 c)]$, druhé pak pro $\exp[-e E y / (p_0 c)]$. Se tením obou výrazů a podělením dvěma dostaneme

⁴ Přesněji by bylo jako kinetickou energii nazývat $T = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} - m c^2$, tedy celkovou energii bez potenciální energie (výraz daný odmocninou) s odečtením klidové energie ($m c^2$). Na-e volba v-ak vede k užitím zkrácením ady výraz .

$$\cosh \frac{e E y}{p_0 c} = \frac{\sqrt{\mathcal{E}_0^2 + (c e E t)^2}}{\mathcal{E}_0} .$$

Dosazením do výrazu pro x dostáváme rovnici trajektorie

$$x = \frac{\mathcal{E}_0}{e E} \left[\cosh \left(\frac{e E y}{p_0 c} \right) - 1 \right] . \quad (4.23)$$

Pro $\mathcal{E}_0 \approx m c^2$ a $p_0 \approx m v_0$ a $\cosh[e E y / (m v_0 c)] \approx 1 + 1/2 [e E y / (m v_0 c)]^2$ dostáváme p irozen z nerelativistické teorie známou parabolickou trajektorií

$$x = \frac{e E}{2 m v_0^2} y .$$

Nyní budeme po ítat pohyb v homogenním magnetickém poli, v jehoí sm ru orientujeme osu z . Pohybová rovnice je

$$\dot{\vec{p}} = e \vec{v} \times \vec{B} .$$

Z toho fle $\vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} = e \vec{v} \cdot (\vec{v} \times \vec{B}) = 0$ hned vidíme, fle se zachovává kinetická energie

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial \vec{p}} \cdot \dot{\vec{p}} = \frac{c^2}{\mathcal{E}} \vec{v} \cdot \dot{\vec{p}} = 0 .$$

Pohybovou rovnici si tedy m fleme p epsat na

$$\frac{\mathcal{E}}{c^2} \frac{d\vec{v}}{dt} = e \vec{v} \times \vec{B} \quad (4.24)$$

nebo ve sloífkách

$$\dot{v}_x = \omega v_y , \quad \dot{v}_y = -\omega v_x , \quad \dot{v}_z = 0 , \quad (4.25)$$

kde

$$\omega = \frac{e c^2 B}{\mathcal{E}} . \quad (4.26)$$

Pro komplexní prom nnou $w = x + i y$ získáme kombinací prvních dvou rovnic v (4.25)

$$\dot{w} = -i \omega w \Rightarrow w = v_{0r} \exp[-i(\omega t + \alpha)] ,$$

kde v_{0r} a α jsou reálné konstanty. Odd líme-li reálnou a imaginární ást, dostáváme

$$v_x = v_{0r} \cos(\omega t + \alpha) , \quad v_y = -v_{0r} \sin(\omega t + \alpha) . \quad (4.27)$$

Ze (4.27) vidíme, pro jsme konstantu ozna íli v_{0r} ó je to velikost rychlosti v rovin kolmé ke sm ru magnetického pole. Rovnice (4.27) integrujeme a dostáváme

$$x = x_0 + a \sin(\omega t + \alpha) , \quad y = y_0 + a \cos(\omega t + \alpha) , \quad (4.28)$$

kde

$$a = \frac{v_{0r}}{\omega} = \frac{v_{0r} \mathcal{E}}{e c^2 B} = \frac{p_t}{e B} . \quad (4.29)$$

Integrace poslední z rovnic v (4.25) dává

$$z = z_0 + v_{0z} t . \quad (4.30)$$

Je tedy pohyb v homogenním magnetickém poli pohybem po kruhové spirále, v případě $v_{0z} = 0$ pohybem po kružnici poloměru a v rovině $z = z_0$. V případě malých rychlostí bude mít trajektorie stejný tvar, pouze ve (4.29) dosadíme nerelativistické výrazy, tedy $a = m v_{0r} / (e B)$.

Nakonec rozebereme pohyb ve vzájemně kolmých (tj. navzájem kolmých) elektrických a magnetických polích. Viděli jsme, že relativistické výrazy pro pohyb v elektrickém poli nejsou příliš jednoduché, budeme proto řešit úlohu v nerelativistické aproximaci. Osu z orientujeme opět podél magnetické indukce a rovinu xy zvolíme tak, aby v ní ležela vektor elektrické intenzity. Pohybová rovnice

$$m \dot{\vec{v}} = e (\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$$

je pak ve složkách

$$m \ddot{x} = e \dot{y} B , \quad m \ddot{y} = e E_y - e \dot{x} B , \quad m \ddot{z} = e E_z . \quad (4.31)$$

Tyto rovnice v (4.31) můžeme hned integrovat

$$z = \frac{e E_z}{2m} t^2 + v_{0z} t + z_0 . \quad (4.32)$$

Kombinací prvních dvou rovnic ve (4.31) dostaneme

$$\frac{d}{dt}(\dot{x} + i \dot{y}) + i \omega (\dot{x} + i \dot{y}) = i \frac{e}{m} E_y , \quad \omega = \frac{e B}{m} .$$

Levá strana homogenní rovnice pro proměnnou $\dot{w} = \dot{x} + i \dot{y}$ známe z předchozího případu, levostranná nehomogenní rovnice je konstanta E_y / B , takže

$$\dot{x} + i \dot{y} = a \exp[-i(\omega t + \alpha)] + \frac{E_y}{B} .$$

Oddělení reálné a imaginární části a následná integrace rovnic vede na

$$x = x_0 + \frac{a}{\omega} \sin(\omega t + \alpha) + \frac{E_y}{B} t , \quad y = y_0 + \frac{a}{\omega} \cos(\omega t + \alpha) . \quad (4.33)$$

Konstanty zvolíme tak, aby se částice v čase $t=0$ nacházela v počátku. Potom

$$x = \frac{a}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{E_y}{B} t, \quad y = \frac{a}{\omega} [\cos(\omega t) - 1], \quad z = \frac{e E_z}{2m} t^2 + v_{0z} t. \quad (4.34)$$

Označíme-li složku rychlosti podél osy x vase $t=0$ jako v_{0x} , je parametr a dán vztahem $a = v_{0x} - E_y/B$. V rovině xy je prmitrajektorie

$$\begin{aligned} x &= \frac{v_{0x}}{\omega} \sin(\omega t) + \frac{E_y}{\omega B} [\omega t - \sin(\omega t)], \\ y &= \frac{v_{0x}}{\omega} [\cos(\omega t) - 1] + \frac{E_y}{\omega B} [1 - \cos(\omega t)]. \end{aligned} \quad (4.35)$$

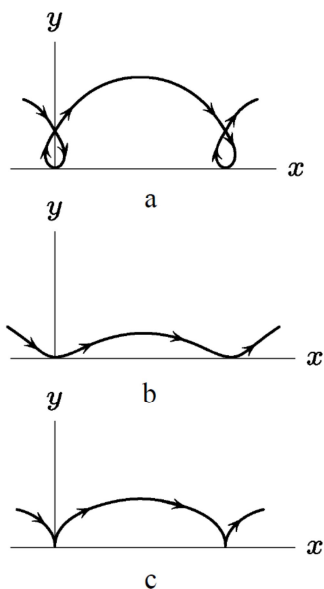
Pi $v_{0x}=0$ je to rovnice cykloidy (obrázek c). Pohyb nabité částice ve zkřížených polích je docela pozoruhodný, srovnáme-li orientaci elektrického pole a stejné hodnoty rychlosti

$$\langle v_x \rangle = \frac{E_y}{B}, \quad \langle v_y \rangle = 0, \quad \langle v_z \rangle = v_{0z} + \frac{e E_z}{m} t.$$

Z těchto hodnot také vidíme meze platnosti nerelativistického přiblížení. Uvažujeme-li jen pohyb v rovině xy , je podmínkou

$$E_y \ll c B.$$

U pohybu ve směru osy z zase záleží na době, po kterou se částice bude pohybovat.



4.4 Adiabatický invariant

Z obecné Hamiltonovy teorie můžeme odvodit existenci tzv. adiabatických invariantů, které při pomalých změnách podmínek pohybu zůstávají konstantní. Při pohybu v tém homogenním magnetickém poli je adiabatickým invariantem

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{P}_t d\vec{r} \quad , \quad (4.36)$$

kde integra ní k ivkou je pr m t trajektorie (kruffnice) v rovin kolmé k magnetickému poli a \vec{P}_t je pr m t zobecn ěné hybnosti do této roviny. Dosazení $\vec{P}_t = \vec{p}_t + e\vec{A}$ (vektorový potenciál volíme takový, fle leffí celý v této rovin) do (4.36) dává

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint \vec{p}_t d\vec{r} + \frac{e}{2\pi} \oint \vec{A} d\vec{r} \quad .$$

Orientace kruffnice je po sm ru hodinových ru í ek pro $eB > 0$ a proti sm ru hodinových ru í ek pro $eB < 0$. Stokesova v ta⁵ proto dává pro druhý integrál hodnotu $-|eB|r^2/2$, kde r je polom r kruffnice (podle (4.29) $r = p_t/|eB|$), zatímco hodnota prvního integrálu je $r p_t$. Adiabatický invariant je tedy

$$I = \frac{p_t^2}{2|eB|} \quad . \quad (4.37)$$

P i adiabatické zm ěn ě magnetické indukce se proto m ní p í ná sloffka hybnosti jako $\sqrt{C|B|}$, kde C je kladná konstanta. Těto skute nosti je s výhodou uffito nap íklad p i udrffování vysokoteplotního plazmatu uvnit daného objemu. Je-li v centrální ásti indukce pom rn malá a k okrajovým ástem se zvy-uje, máme pro podélnou sloffku hybnosti

$$p_l^2 = p^2 - p_t^2 = p^2 - C|B(\vec{r})| \quad .$$

V oblasti silného pole se pohyb podél silo áry zastaví a obrátí zp t. Opa ná situace, kdy jsou nabit ě ástice uvol ovány v oblasti silného pole a pohybují se do oblasti slab-ího pole je vyuffito ve spektrometrech k vytvá ění tém rovnob ffných svazk .

5. ástice v gravita ním poli

5.1 Gravita ní pole v nerelativistické mechanice

Pohyb ástice v gravita ním poli je ur ěn Lagrangeovou funkcí

$$L = \frac{mv^2}{2} - m\phi(\vec{r}) \quad , \quad (5.1)$$

kde $\phi(\vec{r})$ je potenciál gravita ního pole. Lagrangeova rovnice bude pak

⁵ Vzorec Stokesovy v ty $\oint_C \vec{V} \cdot \vec{\tau} d\ell = \int_S \text{rot}\vec{V} \cdot \vec{n} d\sigma$ p edpokládá, fle vn j-í normála ke k ivce C , te na

$\vec{\tau}$ k této k ivce a normála \vec{n} k plo-ě S tvo í pravoto ívovou soustavu.

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\text{grad}\phi \quad . \quad (5.2)$$

Hmotnost částice se v rovnici nevyskytuje. Je to dáno tím, že jsme považovali hmotnost částice v kinetické energii (hmotnost setrvačná) za identickou s hmotností, která váže částici s gravitačním polem (hmotnost gravitační). Rovnost těchto hmotností není samozřejmá. Vezměme například rovnici pro pohyb částice hmotnosti m s nábojem q v elektrickém poli bodového náboje Q , tedy v poli popsaném potenciálem, který je řešením Poissonovy rovnice⁶

$$\Delta\phi = -\frac{Q}{\epsilon_0}\delta^{(3)}(\vec{r}) \Rightarrow \phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r} \quad .$$

Máme pak

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{qQ}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3} \quad . \quad (5.3)$$

Tady hraje hmotnost částice důležitou roli. Naopak pro pohyb částice s hmotností m v gravitačním poli bodové částice hmotnosti M máme

$$\Delta\phi = 4\pi GM\delta^{(3)}(\vec{r}) \Rightarrow \phi = GM\frac{1}{r} \quad ,$$

odkud

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -GM\frac{\vec{r}}{r^3} \quad (5.4)$$

a hmotnost částice se v rovnici zkrátila, pokud ovšem platí zmiňovaná rovnost hmotností. Tato rovnost je jedním ze stavebních kamenů Einsteinovy teorie gravitace. Je také experimentálně s vynikající přesností potvrzena. Na vztah (5.4) se můžeme dívat tak, že na levé straně je zrychlení \vec{a} , na pravé straně intenzita gravitačního pole \vec{g} a rovnice říká, že lokálně jsou si zrychlení a intenzita gravitačního pole rovny, tj. nemůžeme je od sebe odlišit. Z pohledu souadné soustavy s patřičným zrychlením lokálně pole zmizí nebo naopak, přechodem z inerciální do zrychlené soustavy se projevuje jako přítomnost gravitačního pole. Úvahy o analogii mezi gravitačními poli a neinerciálními soustavami vedou k obecnějšímu

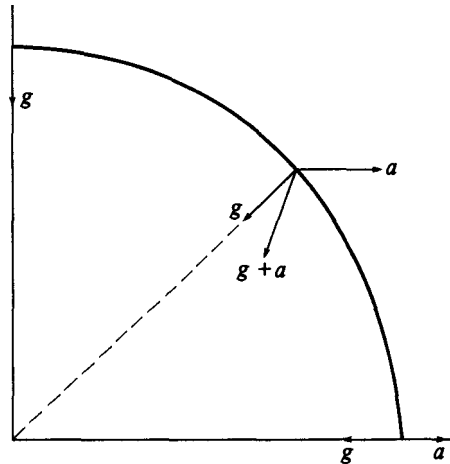
⁶ Platí $\Delta\left(\frac{1}{r}\right) = -4\pi\delta^{(3)}(\vec{r})$, protože integrál přes kouli poloměru R dá na pravé straně -4π , na levé

straně pak $\int_K \text{divgrad}(1/r) dV = R^2 [\text{grad}(1/r) \cdot \vec{r}/r] \Big|_{r=R} \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = -4\pi$.

intervalu. P edtím se ale zmíníme o historicky velmi významném pokusu, dokazujícím rovnost hmotnosti setrva né a gravita ní.

5.2 Eötvös v experiment

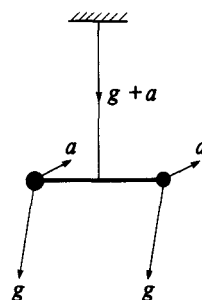
Na izolované, elektricky neutrální těleso na povrchu Země působí v podstatě dvě síly: gravitační a odstředivá, na obrázku označené intenzitami \vec{g} a \vec{a} . Zvolíme svou adnou osu tak,



aby na dané (severní) zeměpisné šířce λ směřovala osa z ke středu Země, osa y po rovnoběžce k východu a osa x po poledníku směrem k rovníku. Potom máme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$ a pro odstředivou sílu $\vec{a} = \vec{\Omega} \times (\vec{R} \times \vec{\Omega})$ s $\vec{\Omega} = -\Omega \cos \lambda \vec{e}_x + \Omega \sin \lambda \vec{e}_z$ a $\vec{R} = R_{\oplus} \vec{e}_z$ potom

$$\vec{a} = \Omega^2 R_{\oplus} \cos \lambda (\cos \lambda \vec{e}_z + \sin \lambda \vec{e}_x) .$$

Maximální hodnota $a_{\max} = \Omega^2 R_{\oplus}$ na rovníku je přibližně $0,03 \text{ m.s}^{-2}$. Ve srovnání s hodnotou g na pólu $9,83 \text{ m.s}^{-2}$ je tato hodnota malá, ale zdaleka ne zanedbatelná. Eötvös v experimentu spořívá v



umístí dvě stejné hmotných (se stejnou gravitační hmotností) koule z různých materiálů (tedy s případně různými setrvačnými hmotnostmi) na rameno torzního kyvadla. Pro jednoduchost uvažujme polohu ramena ve směru západ-ovýchod, a podle naší volby souřadné soustavy je proto rozdíl polohových vektorů $\vec{r}_1 - \vec{r}_2 = y \vec{e}_y$. Na koule působí síly

$$\vec{F}_1 = m_{1(g)} \vec{g} + m_{1(i)} \vec{a} \quad , \quad \vec{F}_2 = m_{2(g)} \vec{g} + m_{2(i)} \vec{a} \quad . \quad (5.5)$$

Výsledný moment, kterým soustava p sobí na záv s je

$$\vec{T} = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \quad , \quad (5.6)$$

p itom záv s sm ůje podél výslednice sil $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$. Kroucí moment bude tedy pr m tem

$$T = \frac{(\vec{F}_1 + \vec{F}_2) \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2)}{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|} = \frac{\vec{F}_2 \cdot (\vec{r}_1 \times \vec{F}_1) + \vec{F}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{F}_2)}{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|} = \frac{(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \cdot (\vec{F}_1 \times \vec{F}_2)}{|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|} \quad . \quad (5.7)$$

Výpo tem dostáváme

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 \times \vec{F}_2 &= m_{1(g)} m_{2(g)} \left(\frac{m_{1(i)}}{m_{1(g)}} - \frac{m_{2(i)}}{m_{2(g)}} \right) (\vec{a} \times \vec{g}) = \\ &= \frac{m_{1(g)} m_{2(g)}}{2} \left(\frac{m_{1(i)}}{m_{1(g)}} - \frac{m_{2(i)}}{m_{2(g)}} \right) g a_{\max} \sin(2\lambda) \vec{e}_y \quad . \end{aligned} \quad (5.8)$$

Ve velikosti sou tu $|\vec{F}_1 + \vec{F}_2|$ sta í uvařovat jen gravita ní pole, takže máme

$$T = \frac{m_{1(g)} m_{2(g)}}{2(m_{1(g)} + m_{2(g)})} \left(\frac{m_{1(i)}}{m_{1(g)}} - \frac{m_{2(i)}}{m_{2(g)}} \right) y a_{\max} \sin(2\lambda) \quad . \quad (5.9)$$

V rovnováze tento moment zp sobí nato ení o úhel θ

$$\theta = \frac{T}{\kappa} \quad , \quad (5.10)$$

kde κ je torzní tuhost záv su⁷. P i zm n orientace o 180°, tj. p i zám n $y \rightarrow -y$ dojde ke zm n rovnovážné polohy. P i experimentech se tato zm na d je periodicky, takže vliv náhodných p í in úhlové výchyly je siln potla en. V moderních experimentech je ov eno, že rovnost setrva né a gravita ní hmotnosti je ov ena s vynikající p esností

$$\left| \frac{m_{1(i)}}{m_{1(g)}} - \frac{m_{2(i)}}{m_{2(g)}} \right| \leq 10^{-13} \quad . \quad (5.11)$$

5.3 Kovariantní a kontravariantní tenzory

Pro popis d j se zapo tením gravitace musíme podle Einsteina p ejt od Minkowskio geometrie prostoro asu k obecn j-í, Riemannov geometrii. Každému bodu P prostoro asu

⁷ Pro drát kruhového pr ezu o polom ru r a délky ℓ je $\kappa = \eta \pi r^4 / (2\ell)$, kde η je modul pružnosti ve smyku.

pro i adíme tve ici sou adnic $P \propto \{x\} = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. To m fleme ud lat mnoha r znými zp soby, nap . $\{x'\} = (x'^0, x'^1, x'^2, x'^3)$. Protože ale jde o tentýfl bod, musí platit

$$x'^i = x'^i(x) \quad . \quad (5.12)$$

Prostor \mathcal{P} (nebo alespo jeho ást) pokryjeme soustavou takových sou adnicových funkcí ó je p irozené, že infinitesimáln blížkým bod m P a \bar{P} budou p íslu-et sou adnice, pro které $|x^i - \bar{x}^i| \rightarrow 0$. (Blížkost bod musí je-t p esn ji definovat.)

Uvaflujme te o n jaké skalární funkci $\varphi = \varphi(x)$. P i transformaci sou adnic $\{x\} \rightarrow \{x'\}$ se transformuje skalární funkce tak, že její hodnota v daném bod se nem ní, tj.

$$\varphi'(x') = \varphi(x) \quad . \quad (5.13)$$

Derivujme te vztah (5.13) podle x'^i (pravou stranu jako slofenou funkci, uflíváme Einsteinova suma ního pravidla)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x'^i} = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} \frac{\partial \varphi}{\partial x^k} \quad . \quad (5.14)$$

Objekt, tvo ený slofkami $A_i(x)$, které se transformují stejn jako parciální derivace skalární funkce podle odpovídajících sou adnic v (5.14), nazveme kovariantním vektorem. Je tedy

$$A'_i(x') = \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} A_k(x) \quad . \quad (5.15)$$

Diferenciál výrazu (5.12) pro transformaci sou adnic je (op t je na pravé stran slofená funkce)

$$dx'^i = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} dx^k \quad . \quad (5.16)$$

Objekt, tvo ený slofkami $A^i(x)$, které se transformují stejn jako diferenciály odpovídajících sou adnicových funkcí v (5.16), nazveme kontravariantním vektorem. Pro jeho sloflky tedy

$$A'^i(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^k} A^k(x) \quad . \quad (5.17)$$

Tyto definice zobecníme na tenzory vy ího ádu, nap íklad

$$T'^{i/k}(x') = \frac{\partial x'^i}{\partial x^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^i} \frac{\partial x^n}{\partial x'^j} T'^l_{mn}(x) \quad . \quad (5.18)$$

5.4 Metrický tensor

Pojem intervalu mezi událostmi jako invariantní veličiny se zachovává i v Riemannovské geometrii. Máme

$$ds^2 = g_{ik}(x) dx^i dx^k, \quad (5.19)$$

kde $g_{ik}(x)$ jsou kovariantní složky symetrického tenzoru druhého řádu g metrického tenzoru.

Přesvědčíme se o invariantnosti výrazu pro interval:

$$\begin{aligned} g'_{mn} dx'^m dx'^n &= \frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x^k}{\partial x'^n} g_{ik} \frac{\partial x'^m}{\partial x^l} dx^l \frac{\partial x'^n}{\partial x^j} dx^j = \\ &= g_{ik} \underbrace{\frac{\partial x^i}{\partial x'^m} \frac{\partial x'^m}{\partial x^l}}_{dx^i} \underbrace{\frac{\partial x^k}{\partial x'^n} \frac{\partial x'^n}{\partial x^j}}_{dx^k} dx^l dx^j = g_{ik} dx^i dx^k. \end{aligned}$$

Také skalární součin dvou vektorů, definovaný jako $A^i B_i$ je invariantní veličinou:

$$A'^i B'_i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} A^l \frac{\partial x^k}{\partial x'^i} B_k = \frac{\partial x^k}{\partial x'^l} \underbrace{\frac{\partial x'^l}{\partial x^i}}_{\delta_i^k} A^l B_k = A^k B_k.$$

Kroneckerovo delta δ_k^i je tenzor:

$$\delta_k'^i = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \frac{\partial x^m}{\partial x'^k} \delta_m^l = \frac{\partial x^i}{\partial x'^l} \underbrace{\frac{\partial x'^l}{\partial x^k}}_{\delta_k^i} = \delta_k^i.$$

Definujeme inverzní metrický tenzor g^{ik} pomocí vztahu pro složky

$$g^{ik} g_{kj} = \delta_j^i. \quad (5.20)$$

Pomocí složek metrického tenzoru převádíme kontravariantní složky na kovariantní, pomocí složek inverzního metrického tenzoru kovariantní složky na kontravariantní. Pro vektory

$$A_i = g_{ik} A^k, \quad A^i = g^{ik} A_k. \quad (5.21)$$

Vhodnou volbou souřadnic můžeme v infinitesimálním okolí zvoleného bodu dát metrickému tenzoru tvar známý z Minkowského prostoru (pro tuto chvíli takové souřadnice označíme $\{x_G\}$ (podle Landaua a Lifšice jsou to Galileovy souřadnice) a metrický tenzor je

$$g_{Gik} = g_G^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (5.22)$$

Ozna íme jakobián transformace od Galileových souadnic k obecným jako J ó jakobián je determinant vytvo ený z derivací $\partial x^i / \partial x_G^k$, ve standardním zna ení

$$J = \frac{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)}{\partial(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)} .$$

Jakobián m íme vyjád ít pomocí determinantu metrického tensoru $g = \det(g_{ik})$. Zapí-eme transformaci inverzního metrického tensoru od Galileových souadnic k obecným

$$g^{ik} = \frac{\partial x^i}{\partial x_G^l} \frac{\partial x^k}{\partial x_G^m} g_G^{lm} \Rightarrow \frac{1}{g} = -J^2 .$$

(Platí $\det(g_G^{ik}) = -1$ a $\det(g^{ik} g_{kl}) = \det(g^{ik}) \det(g_{kl}) = \det(\delta_i^i) = 1$.) Máme tedy pro jakobián výraz $J = 1/\sqrt{-g}$. P í integraci je objemový element v Galileových souadnicích skalár, musí se mu tedy rovnat objemový element v obecných souadnicích

$$d\Omega_G = dx_G^0 dx_G^1 dx_G^2 dx_G^3 = \frac{\partial(x_G^0, x_G^1, x_G^2, x_G^3)}{\partial(x^0, x^1, x^2, x^3)} dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 = \sqrt{-g} d\Omega .$$

(Triviálním p íkladem je p echod od kartézských ke k ivo arým souadnicím v Eukleidovském prostoru. Nap íklad pro sférické souadnice $d\ell^2 = dr^2 + r^2 d\theta + r^2 \sin^2 \theta d\varphi$, odkud $\sqrt{g} = r^2 \sin \theta$ a tedy $dx dy dz = r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi$.) Také úpln antisymetrický tensor tvrtého ádu, v Galileových souadnicích e_{Giklm} resp. e_G^{iklm} je v obecných souadnicích

$$e_{iklm} = \sqrt{-g} e_{Giklm} , \quad e^{iklm} = \frac{1}{\sqrt{-g}} e_G^{iklm} .$$

5.5 Neinerciální soustavy v Minkowskioho prostoro ase

Souadnice v inerciální soustav budeme zna ít $\{x_G\}$, souadnice v neinerciální soustav $\{x\}$. Neinerciální soustava bude rotovat kolem společné osy z s úhlovou rychlostí ω . Po transformaci souadnic

$$x_G = x \cos \omega t_G - y \sin \omega t_G , \quad y_G = x \sin \omega t_G + y \cos \omega t_G , \quad z_G = z$$

má interval

$$ds^2 = g_{Gik} dx_G^i dx_G^k = c^2 dt_G^2 - (dx_G^2 + dy_G^2 + dz_G^2)$$

tvar

$$ds^2 = [c^2 - \omega^2 (x^2 + y^2)] dt_G^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) + 2\omega (y dx dt_G - x dy dt_G) . \quad (5.23)$$

