Teoretická fyzika ï Základy teorie elektromagnetického pole

Michal Lenc ï podzim 2013

Obsah

1. Úvod

1.1 Maxwellovy rovnice

Základ teorie elektromagnetického pole tvoří Maxwellovy rovnice a pohybové rovnice náboje v elektromagnetickém poli. Maxwellovy rovnice popisující elektromagnetické pole vytvářené ve vakuu volnými náboji hustoty ρ a proudy hustoty $\vec{j}$ jsou

$$\begin{gathered}\vec{\nabla}\cdot\vec{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0}\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad,\\ \frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B}=\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}+\vec{j}\quad,\quad\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\quad.\end{gathered}\tag{1.1}$$

Druhý Newtonův zákon pro částici s nábojem e je

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}=e\left[\vec{E}+\vec{v}\times\vec{B}\right]\quad.\tag{1.2}$$

Konstanty v (1.1) jsou dány volbou soustavy jednotek SI. Intenzita elektrického pole je udávána ve $\mathrm{V\,m^{-1}}$, indukce magnetického pole má jednotku T. Platí

$$\frac{1}{\varepsilon_0\,\mu_0}=c^2\quad,\quad\mu_0=4\pi 10^{-7}\,\mathrm{H\,m^{-1}}\quad,\quad c=299792458\,\mathrm{m\,s^{-1}}\quad.\tag{1.3}$$

Zavádíme také indukci elektrického $\vec{D}=\varepsilon_0\,\vec{E}$ a intenzitu magnetického pole $\vec{H}=\vec{B}/\mu_0$. Pomocí těchto veličin můžeme Maxwellovy rovnice přepsat do tvaru

$$\begin{gathered}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\quad,\\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho\quad,\quad\vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j}\quad.\end{gathered}\tag{1.4}$$

První řádek rovnic v (1.4) určuje charakter pole, druhý řádek rovnic spojuje pole se zdroji. Ve tvaru (1.4) platí rovnice i v látkovém prostředí, na rozdíl od vakua jsou však v látkovém prostředí vztahy mezi vektory indukce a intenzity netriviální a často velmi komplikované. To, že za základní vektory pole považujeme právě elektrickou intenzitu a magnetickou indukci, je dáno charakterem Lorentzovy síly v (1.2) a prvním řádkem rovnic v (1.4). S využitím Gaussovy a Greenovy věty

$$\int_V \mathrm{div}\,\vec{X}\,\mathrm{d}V=\oint_{\partial V}\vec{X}\cdot\mathrm{d}\vec{S}\quad,\quad\int_S\vec{X}\cdot\mathrm{d}S=\oint_{\partial S}\mathrm{rot}\,\vec{X}\cdot\mathrm{d}\vec{l}\tag{1.5}$$

získáme integrální tvar Maxwellových rovnic

$$\Phi_{\partial V}^{(M)}=0\quad,\quad\Phi_{\partial V}^{(E)}=Q\quad,\quad U_{\partial S}^{(M)}=\frac{\mathrm{d}\Phi_S^{(E)}}{\mathrm{d}t}+J\quad,\quad U_{\partial S}^{(E)}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_S^{(M)}}{\mathrm{d}t}\quad.\tag{1.6}$$

Rovnice vyjadŚují tyto zákony:

1) Neexistuje magnetický náboj, tedy tok magnetické indukce $\Phi_{\partial V}^{(M)} = \oint_{\partial V} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ uzavŚenou plochou ∂V je nulový, siloļáry magnetického pole jsou uzavŚené kŚivky.
2) Gaussova vŊta: tok elektrické indukce $\Phi_{\partial V}^{(E)} = \oint_{\partial V} \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$ plochou ∂V uzavírající objem V je roven náboji v tomto objemu obsaġeném $Q = \int_V \rho \, \mathrm{d}V$.
3) ZobecnŊný AmpérŢv zákon: magnetomotorické napŊtí $U_{\partial S}^{(M)} = \oint_{\partial S} \vec{H} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ vytvoŚené na kŚivce ∂S ohraniļující plochu S je rovno souļtu ļasové zmŊny toku elektrické indukce $\mathrm{d}\Phi_S^{(E)} \big/ \mathrm{d}t = \mathrm{d}\left(\int_S \vec{D} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right) \Big/ \mathrm{d}t$ touto plochou a proudu tekoucího touto plochou $J = \int_S \vec{j} \cdot \mathrm{d}\vec{S}$.
4) FaradayŢv indukļní zákon: elektromotorické napŊtí $U_{\partial S}^{(E)} = \oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{l}$ vytvoŚené na kŚivce ∂S ohraniļující plochu S je rovno zápornŊ vzaté ļasové zmŊnŊ toku magnetické indukce touto plochou $-\mathrm{d}\Phi_S^{(M)} \big/ \mathrm{d}t = -\mathrm{d}\left(\int_S \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{S} \right) \Big/ \mathrm{d}t$.

1.2 Energie a hybnost elektromagnetického pole

MŊjme testovací ļástici s energií ε a hybností $\vec{p}$. PŚi pŚechodu ke spojitému rozloġení náboje a proudu je

$$\Delta \varepsilon = \vec{F} \cdot \Delta \vec{r} = \frac{1}{\rho} \vec{F} \cdot \vec{j} \, \Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho \vec{E} \, \Delta V + \vec{j} \times \vec{B} \, \Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V} \frac{\Delta \varepsilon}{\Delta t} = \vec{j} \cdot \vec{E} \quad . \tag{1.7}$$

Energie získaná ļásticí za jednotku ļasu je tedy $\vec{j} \cdot \vec{E} \, \Delta V$, je tedy práce vykonaná polem za jednotku ļasu vztaġená ne jednotku objemu $-\vec{j} \cdot \vec{E}$. S vyuġitím vztahu

$$\vec{E} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{H} \right) - \vec{H} \cdot \left(\vec{\nabla} \times \vec{E} \right) = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{H} \times \vec{E} \right) \tag{1.8}$$

odvodíme z Maxwellových rovnic výraz

$$\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = -\vec{j} \cdot \vec{E} - \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H} \right) \quad . \tag{1.9}$$

Na pravé stranŊ vystupuje hustota vykonané práce a nŊjaký tok, výraz na levé stranŊ mŢġeme tedy interpretovat jako ļasovou zmŊnu hustoty energie W. Po zavedení veliļin ļasové zmŊny hustoty energie a Poyntingova vektoru $\vec{S}$

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad , \quad \vec{S} = \vec{E}\times\vec{H} \tag{1.10}$$

můžeme (1.9) psát v integrálním tvaru jako

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V W\,\mathrm{d}V + \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V + \int_\Sigma \vec{S}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}\Sigma = 0 \quad . \tag{1.11}$$

V prostředí popsaném materiálovými vztahy

$$D_i = \varepsilon_0\,\varepsilon_{ik}^{(r)}\,E_k \quad , \quad B_i = \mu_0\,\mu_{ik}^{(r)}\,H_k \tag{1.12}$$

má hustota energie jednoduché vyjádření

$$W = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{B}\cdot\vec{H}\right) \quad . \tag{1.13}$$

Obdobnou úvahu jako pro energii pole můžeme provést pro jeho hybnost. Při přechodu ke spojitému rozložení náboje je

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\,\Delta t \quad , \quad \vec{F} = \rho\vec{E}\,\Delta V + \vec{j}\times\vec{B}\,\Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{\Delta V}\frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t} = \rho\vec{E} + \vec{j}\times\vec{B} \quad . \tag{1.14}$$

Z Maxwellových rovnic odvodíme výraz

$$\begin{aligned}&\vec{D}\times\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} + \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\times\vec{B} = \\ &\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) + \vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \vec{D}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right) - \vec{j}\times\vec{B} - \rho\vec{E} \quad .\end{aligned} \tag{1.15}$$

Poslední dva členy na pravé straně popisují Lorentzovu sílu, můžeme tedy výraz na levé straně interpretovat jako časovou změnu hustoty hybnosti pole

$$\vec{G} = \vec{D}\times\vec{B} \quad . \tag{1.16}$$

Provedeme úpravu výrazů v (1.15)

$$\begin{aligned}\left[\vec{E}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{D}\right) - \vec{D}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{E}\right)\right]_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(E_i\,D_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\vec{E}\cdot\vec{D}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial x_i}\right) \quad , \\ \left[\vec{H}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{B}\right) - \vec{B}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right)\right]_i &= \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(H_i\,B_j - \frac{1}{2}\delta_{ij}\,\vec{H}\cdot\vec{B}\right) - \frac{1}{2}\left(\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial x_i} - \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x_i}\right) \quad .\end{aligned} \tag{1.17}$$

a zákon zachování má pak tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V G_i\,\mathrm{d}V + \int_V P_i\,\mathrm{d}V + \int_\Sigma \sum_{j=1}^{3} T_{ij}\,n_j\,\mathrm{d}\Sigma = 0 \quad . \tag{1.18}$$

Rozdělení na prostředí a pole provedené v (1.18) není jednoznačné. Definovali jsme Maxwellův tensor napětí T_{ij} jako[1]

$$T_{ij} = -\left(E_i D_j + H_i B_j\right) + \frac{1}{2}\delta_{ij}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right) \tag{1.19}$$

a hustotu hybnosti prostředí

$$P_i = \rho E_i + \left(\vec{j}\times\vec{B}\right)_i + \frac{1}{2}\left[\vec{D}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial x_i} - \vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial x_i} + \vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial x_i} - \vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial x_i}\right] \quad . \tag{1.20}$$

Takto definovaný Maxwellův tensor určuje tok hybnosti z uvažovaného objemu. Jeho stopa je rovna hustotě energie

$$W - \sum_{i=1}^{3} T_{ii} = 0 \quad . \tag{1.21}$$

1.3 Elektřina a magnetismus

Pro statické (na čase nezávislé) jevy můžeme zvlášť studovat elektrostatiku a zvlášť magnetostatiku, jak je vidět z Maxwellových rovnic (1.4). Pro elektrostatiku je

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D} = \rho \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = 0 \tag{1.22}$$

a pro magnetostatiku

$$\vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad . \tag{1.23}$$

Řešíme-li úlohu pro homogenní prostředí s triviálními vztahy mezi indukcí a intenzitou, tj.

$$\vec{D} = \varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} \quad , \quad \vec{B} = \mu_r\,\mu_0\,\vec{H} \quad , \tag{1.24}$$

vede substituce

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi \tag{1.25}$$

k tomu, že rovnice s rotací v (1.22) je splněna identicky a rovnice s divergencí dává Poissonovu rovnici

$$\Delta\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} \quad . \tag{1.26}$$

Naopak substituce

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}' \tag{1.27}$$

vede k tomu, že rovnice s divergencí v (1.23) je splněna identicky a rovnice s rotací vede na rovnici[2]

---

[1] Jsou možné i jiné definice, které se vždy shodují pro vakuum. Vzhledem k obtížnosti experimentálního ověřování v jiném prostředí není otázka správného rozdělení hybnosti mezi „pole“ a „hmotu“ rozřešena.

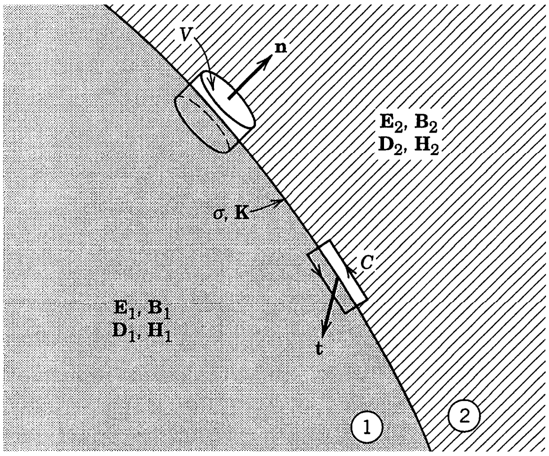
$$\Delta\vec{A}' - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}'\right) = -\,\mu_r\,\mu_0\,\vec{j} \quad . \tag{1.28}$$

Vektorový potenciál nezmění hodnotu magnetické indukce, přičteme-li k původnímu vektoru gradient libovolné skalární funkce ($\mathrm{rot\,grad}\, f \equiv 0$). Toho můžeme využít k volbě takového potenciálu $\vec{A} = \vec{A}' + \vec{\nabla} f$, jehož divergence je nulová[3] a místo (1.28) máme opět (vektorovou) Poissonovu rovnici

$$\Delta\vec{A} = -\,\mu_r\,\mu_0\,\vec{j} \quad .$$

1.4 Podmínky na rozhraní

Máme-li dvě homogenní prostředí se společným rozhraním, řešíme rovnice pole zvlášť v každém z nich. Potom musíme zajistit, aby byly na společném rozhraní splněny podmínky plynoucí z Maxwellových rovnic. Na obrázku[4] je popis všech potřebných veličin: $\vec{n}$ normála



a $\vec{t}$ tečna k rozhraní, rovnoběžné s rozhraním jsou i podstavy válce o ploše ΔS a delší hrany obdélníku délky $\Delta\ell$. Kratší hrany obdélníka i stěny válce mají zanedbatelné délky. Povrchová hustota náboje je označena σ, povrchová hustota proudu $\vec{K}$ (má složky pouze podél rozhraní). Integrální tvar Maxwellových rovnic s divergencemi je

$$\oint_S \vec{D}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \rho\,\mathrm{d}V \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{D}_2 - \vec{D}_1\right)\cdot\vec{n}\,\Delta S = \sigma\,\Delta S$$

a

$$\oint_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{B}_2 - \vec{B}_1\right)\cdot\vec{n}\,\Delta S = 0 \quad .$$

---

[2] $\mathrm{rot\,rot}\vec{V} = \vec{\nabla}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{V}\right) = \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{V}\right) - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{V} = \mathrm{grad}\left(\mathrm{div}\vec{V}\right) - \Delta\vec{V}$.

[3] $\mathrm{div}\vec{A} = 0$ znamená, že funkci f volíme jako řešení rovnice $\Delta f = -\mathrm{div}\vec{A}'$.

[4] J. D. Jackson: Classical Electrodynamics (John Wiley@Sons, 1999), Figure 1.4.

Integrální tvar rovnic s rotacemi je

$$\oint_C \vec{E}\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\,\mathrm{d}\ell = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right)\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\,\Delta\ell = 0$$

a

$$\oint_C \vec{H}\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\,\mathrm{d}\ell = \int_S \vec{j}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}S \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right)\cdot(\vec{t}\times\vec{n})\,\Delta\ell = \vec{K}\cdot\vec{t}\,\Delta\ell \quad .$$

Členy $\int_S \partial\vec{B}/\partial t\,\mathrm{d}S$ a $\int_S \partial\vec{D}/\partial t\,\mathrm{d}S$ mají omezený integrand a v limitě malé plochy jdou k nule, proto jsme je v posledních dvou vztazích ani nepsali. Máme tak pro normálové složky

$$\left(\vec{D}_2-\vec{D}_1\right)\cdot\vec{n} = \sigma \quad , \quad \left(\vec{B}_2-\vec{B}_1\right)\cdot\vec{n} = 0 \tag{1.29}$$

a pro tečné složky[5]

$$\vec{n}\times\left(\vec{E}_2-\vec{E}_1\right) = 0 \quad , \quad \vec{n}\times\left(\vec{H}_2-\vec{H}_1\right) = \vec{K} \quad . \tag{1.30}$$

1.5 Elektromagnetické vlny

Zavedeme-li pro popis časově proměnného elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál vztahy

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \tag{1.31}$$

máme po dosazení do Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned} \Delta\phi + \frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A} &= -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \\ \Delta\vec{A} - \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} - \vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) &= -\mu_0\,\vec{j} \quad . \end{aligned} \tag{1.32}$$

S využitím kalibrační transformace (tj. transformace, která nevede ke změnám vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$)

$$\vec{A}\rightarrow\vec{A}+\vec{\nabla}\psi \quad , \quad \phi\rightarrow\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{1.33}$$

můžeme dosáhnout, aby platilo

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} + \varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t} = 0 \tag{1.34}$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní vlnovou rovnici

---

[5] Platí $\vec{X}\cdot(\vec{t}\times\vec{n}) = \vec{t}\cdot(\vec{n}\times\vec{X})$ a vektor $\vec{t}$ je libovolný tečný vektor k rozhraní.

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ,$$
$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\,\vec{j} \quad . \tag{1.35}$$

2. Elektrostatika

2.1 Coulombův zákon

Síla, kterou působí náboj q_2 (nacházející se v místě 2) na náboj q_1 v místě 1 je

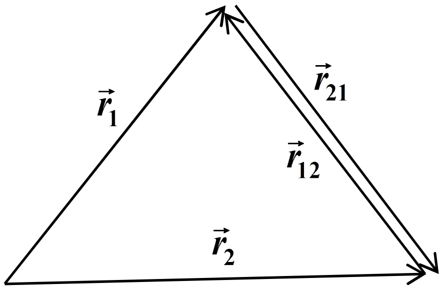
$$\vec{F}_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad , \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \tag{2.1}$$

a síla, kterou působící náboj q_1 (nacházející se v místě 1) na náboj q_2 v místě 2 je

$$\vec{F}_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} \quad , \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad r_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \quad , \tag{2.2}$$

je tedy

$$\vec{F}_1 = -\vec{F}_2 \quad . \tag{2.3}$$



2.2 Newtonův zákon

Newtonův gravitační zákon zde uvádíme pro porovnání. Síla, kterou působí hmotnost m_2 (nacházející se v místě 2) na hmotnost m_1 v místě 1 je

$$\vec{F}_1 = G\frac{m_1 m_2}{r_{21}^3}\vec{r}_{21} \quad , \quad \vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \quad , \quad r_{21} = |\vec{r}_2 - \vec{r}_1| \tag{2.4}$$

a síla, kterou působí hmotnost m_1 (nacházející se v místě 1) na hmotnost m_2 v místě 2 je

$$\vec{F}_2 = G\frac{m_1 m_2}{r_{12}^3}\vec{r}_{12} \quad , \quad \vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 \quad , \quad r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2| \quad , \tag{2.5}$$

je tedy samozřejmě opět $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$.

2.3 Poissonova rovnice

2.3.1 Greenova funkce[6]

Poissonovu rovnici pro elektrostatické pole

$$-\Delta\phi = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.6}$$

i rovnici pro gravitační pole

$$\Delta\phi = 4\pi G\,\mu \tag{2.7}$$

budeme psát jednotným způsobem jako

$$\hat{H}|\psi\rangle = |J\rangle \quad , \tag{2.8}$$

kde $\hat{H} = -\Delta$ a $|J\rangle = \rho/\varepsilon_0$ nebo $|J\rangle = -4\pi G\,\mu$. Předpokládejme, že známe vlastní funkce a vlastní hodnoty operátoru $\hat{H}$

$$\langle x|\hat{H}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \lambda_m |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)|x'\rangle = \sum_m \lambda_m \psi_m^*(x')\psi_m(x) \quad . \tag{2.9}$$

Předpokládejme dále, že žádná z vlastních hodnot není rovna nule. Položíme pak Greenovu funkci rovnu

$$\langle x|\hat{G}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m} |\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)|x'\rangle = \sum_m \frac{1}{\lambda_m} \psi_m^*(x')\psi_m(x) \quad . \tag{2.10}$$

Potom dostáváme

$$\begin{aligned} &\langle x|\hat{G}\hat{H}|x'\rangle = \langle x|\left(\sum_m \frac{1}{\lambda_m}|\psi_m\rangle\langle\psi_m|\right)\left(\sum_n \lambda_n|\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|x'\rangle = \\ &\langle x|\left(\sum_n |\psi_n\rangle\langle\psi_n|\right)|x'\rangle = \langle x|\hat{1}|x'\rangle = \delta(x-x') \quad . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Řešení Poissonovy rovnice tak zapíšeme ve tvaru

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|\hat{G}|J\rangle = \int \langle x|\hat{G}|x'\rangle\langle x'|J\rangle \mathrm{d}x' \tag{2.12}$$

nebo

$$\psi(x) = \sum_n \frac{1}{\lambda_n}\psi_n(x)\int \psi_n^*(x')\,J(x')\,\mathrm{d}x' \quad . \tag{2.13}$$

2.3.2 Greenova věta

Všimněme si nejprve působení laplaciánu na funkci $1/r$. Máme

---

[6] Tento odstavec možno vynechat.

$$\vec{\nabla}\frac{1}{r}=-\frac{\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)=0 \tag{2.14}$$

všude, kde je tato funkce dobře definována, tedy s výjimkou bodu $r=0$. Použitím Gaussovy věty na kouli se středem v počátku máme

$$\int_K \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\frac{1}{r}\right)\mathrm{d}V=-4\pi \quad . \tag{2.15}$$

Pokud považujeme $\Delta\left(1/r\right)$ za funkci, je její chování neobvyklé. Zapisujeme ji pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\Delta\frac{1}{r}=-4\pi\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}\right) \quad . \tag{2.16}$$

Z Gaussovy věty plyne Greenova věta. Máme identity

$$\vec{\nabla}\cdot\left(u\vec{\nabla}v\right)=u\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}v\right)+\left(\vec{\nabla}u\right)\cdot\left(\vec{\nabla}v\right) \quad ,$$
$$\vec{\nabla}\cdot\left(v\vec{\nabla}u\right)=v\vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}u\right)+\left(\vec{\nabla}v\right)\cdot\left(\vec{\nabla}u\right) \quad .$$

Po odečtení rovnic a užití Gaussovy věty dostáváme Greenovu větu

$$\int_V \left(u\,\Delta v-v\,\Delta u\right)\mathrm{d}V=\int_{\partial V}\left(u\vec{\nabla}v-v\vec{\nabla}u\right)\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad . \tag{2.17}$$

Máme teď pro $u=\phi$ a $v=1/r$

$$\Delta\phi=-\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad , \quad \Delta\frac{1}{r}=-4\pi\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}\right) \quad . \tag{2.18}$$

Rozšíříme-li integrační oblast na celý prostor a předpokládáme-li dostatečně rychlý pokles funkcí v nekonečnu, dostáváme

$$\phi\left(\vec{r}\right)=\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|}\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} \quad . \tag{2.19}$$

Ve dvourozměrném případě je postup podobný. Všimněme si nejprve působení laplaciánu na funkci $\ln r$. Máme

$$\vec{\nabla}\ln r=\frac{\vec{r}}{r^2} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\ln r\right)=0 \tag{2.20}$$

všude, kde je dobře definována, tedy s výjimkou bodu $r=0$. Použitím Gaussovy věty na kružnici se středem v počátku máme

$$\int_K \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{\nabla}\ln r\right)\mathrm{d}S=2\pi \quad , \tag{2.21}$$

je tedy chování funkce $\Delta\left(\ln r\right)$ neobvyklé. Zapisujeme je pomocí Diracovy delta funkce jako

$$\Delta \ln r = 2\pi\, \delta^{(2)}(\vec r) \quad . \tag{2.22}$$

Z Greenovy věty potom dostáváme (pozor na podmínky v nekonečnu a „rozměr“ $\ln r$)

$$\phi(\vec r) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\int \sigma(\vec r^{\,\prime}) \ln\left|\vec r - \vec r^{\,\prime}\right| \mathrm{d}^2\vec r^{\,\prime} \quad . \tag{2.23}$$

2.4 Elektrostatická energie nábojů.

Elektrostatickou energii spojitého rozložení náboje

$$U = \frac{1}{2}\int \rho\,\phi\,\mathrm{d}V \tag{2.24}$$

můžeme pro soustavu bodových nábojů $\rho(\vec r) = \sum_a e_a\, \delta^{(3)}(\vec r - \vec r_a)$ zdánlivě snadno napsat jako důsledek prostého dosazení

$$U^{\prime} = \frac{1}{2}\sum_a e_a\,\phi_a \quad , \quad \phi_a = \phi(\vec r_a) \quad . \tag{2.25}$$

Z Coulombova zákona máme

$$\phi_a = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\sum_b \frac{e_b}{r_{ab}} \quad , \quad r_{ab} = \left|\vec r_a - \vec r_b\right| \quad . \tag{2.26}$$

Musíme tedy vyloučit působení pole vytvořeného daným bodovým nábojem sama na sebe, abychom mohli psát konečný výraz pro energii

$$U = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\sum_{a\neq b}\frac{e_a\, e_b}{r_{ab}} \quad . \tag{2.27}$$

2.5 Multipólový rozklad pole.

2.5.1 Laplaceova rovnice ve sférických souřadnicích

Laplaceův operátor ve sférických souřadnicích je

$$\Delta\psi = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} \quad . \tag{2.28}$$

Separací proměnných

$$\psi(r,\theta,\varphi) = R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi) \tag{2.29}$$

dojdeme ke třem obyčejným diferenciálním rovnicím

$$\begin{gathered}\frac{\mathrm{d}^2\Phi(\varphi)}{\mathrm{d}\varphi^2} + m^2\,\Phi(\varphi) = 0 \quad , \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}R(r)}{\mathrm{d}r}\right) - \lambda^2 R(r) = 0 \quad , \\ \frac{1}{\sin\theta}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta(\theta)}{\mathrm{d}\theta}\right) + \left(\lambda^2 - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right)\Theta(\theta) = 0 \quad .\end{gathered} \tag{2.30}$$

Jednoduše odvodíme, že (požadavek periodicity v proměnné φ) m musí být celé číslo a

$$\Phi_m(\varphi) = C_m \cos m\varphi + S_m \sin m\varphi \quad . \tag{2.31}$$

Dále pak zjistíme, že řešením radiální rovnice je (konstantu píšeme jako $\lambda^2 = l(l+1)$, aby tvar řešení byl jednoduchý a zejména proto, aby rovnice v proměnné θ měla řešení ve tvaru polynomů v proměnných $\cos\theta$ a $\sin\theta$)

$$R_l(r) = A_l\, r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}} \quad . \tag{2.32}$$

Nejobtížnější je rovnice pro polární úhel. Substituce $\cos\theta = x$ vede k Legendreově rovnici

$$\left(1 - x^2\right)\frac{\mathrm{d}^2 P_l^m(x)}{\mathrm{d}x^2} - 2x\frac{\mathrm{d}P_l^m(x)}{\mathrm{d}x} + \left[l(l+1) - \frac{m^2}{1-x^2}\right]P_l^m(x) = 0 \quad , \tag{2.33}$$

která má jako regulární řešení polynomy proměnných x a $\left(1-x^2\right)^{1/2}$.

2.5.2 Legendreovy polynomy

Snadno vidíme, že pro $m=0$ můžeme rovnici (2.33) přepsat na

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\left(1-x^2\right)\frac{\mathrm{d}P_l(x)}{\mathrm{d}x}\right] + l(l+1)P_l(x) = 0 \quad . \tag{2.34}$$

Integrací rozdílu rovnic pro $l=m$ a $l=n$ na intervalu $(-1,1)$ dostaneme vztah

$$(m-n)(m+n+1)\int_{-1}^{1} P_m(x)P_n(x)\,\mathrm{d}x = 0 \quad , \tag{2.35}$$

odkud plyne ortogonalita Legendreových polynomů $P_l(x)$ na tomto intervalu. Z mnoha důležitých vlastností Legendreových polynomů uveďme dvě vyjádření polynomu pomocí Rodriguesova vzorce

$$P_l(x) = \frac{1}{l!2^l}\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}x^l}\left(x^2-1\right)^l \tag{2.36}$$

a výraz pro vytvářející funkci

$$\frac{1}{\left(1-2xt+t^2\right)^{1/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l \quad . \tag{2.37}$$

Použitím Leibnizova pravidla

$$\frac{\mathrm{d}^m\left[f(x)g(x)\right]}{\mathrm{d}x^m} = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\frac{\mathrm{d}^{m-k}f(x)}{\mathrm{d}x^{m-k}}\frac{\mathrm{d}^k g(x)}{\mathrm{d}x^k} \tag{2.38}$$

dostaneme m – násobným derivováním rovnice (2.34) rovnici

$$\left(1-x^2\right)f''(x) - 2x(m+1)f'(x) + (n-m)(n+m+1)f(x) = 0 \quad , \tag{2.39}$$

kde $f(x)=\mathrm{d}^m P_l(x)/\mathrm{d}x^m$. Substituce $f(x)=\left(1-x^2\right)^{-m/2} g(x)$ vede k tomu, že funkce $g(x)$ musí splňovat rovnici (2.33), je tedy konečně

$$P_l^m(x)=\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^m P_l(x)}{\mathrm{d}x^m} \quad . \tag{2.40}$$

Využijeme-li ještě (2.36), můžeme (2.40) rozšířit i na oblast záporných *m*, tedy

$$P_l^m(x)=\frac{(-1)^l}{l!2^l}\left(1-x^2\right)^{m/2}\frac{\mathrm{d}^{m+l}}{\mathrm{d}x^{m+l}}\left(1-x^2\right)^l \quad , \quad -l\le m\le l \quad . \tag{2.41}$$

Polynomy (2.41) se nazývají přidružené Legendreovy polynomy. Námi definované polynomy $P_l^m(x)$ nebo $P_l(x)$ nejsou na intervalu $(-1,1)$ normované na jedničku. Ostatně různé drobné i větší odchylky v definicích speciálních funkcí jsou díky historickému vývoji bohužel zcela běžné.

2.5.3 Kulové funkce

Pomocí přidružených Legendreových polynomů definujeme úplný ortonormální soubor kulových funkcí (tj. každou funkci úhlových proměnných ve sférických souřadnicích můžeme napsat pomocí (nekonečné) řady těchto funkcí)

$$Y_l^m(\theta,\varphi)=\sqrt{\frac{(2l+1)}{4\pi}\frac{(l-m)!}{(l+m)!}}\,P_l^m(\cos\theta)\exp(i\,m\varphi) \quad . \tag{2.42}$$

Platí tedy

$$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\, Y_{l_1}^{m_1\,*}(\theta,\varphi)\,Y_{l_2}^{m_2}(\theta,\varphi)=\delta_{l_1 l_2}\,\delta_{m_1 m_2} \tag{2.43}$$

a

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{m=l} f_l^m\,Y_l^m(\theta,\varphi) \quad , \quad f_l^m=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\sin\theta\, f(\theta,\varphi)\,Y_l^{m*}(\theta,\varphi) \quad . \tag{2.44}$$

Několik prvních kulových funkcí je

$$\begin{gathered}
Y_0^0=\sqrt{\frac{1}{4\pi}}\\
Y_1^{-1}=\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(-i\varphi) \quad Y_1^0=\sqrt{\frac{3}{4\pi}}\cos\theta \quad Y_1^1=-\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\sin\theta\exp(i\varphi)\\
Y_2^{-2}=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\exp(-2i\varphi) \quad Y_2^2=\sqrt{\frac{15}{32\pi}}\sin^2\theta\exp(2i\varphi)\\
Y_2^{-1}=\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\exp(-i\varphi) \quad Y_2^0=\sqrt{\frac{5}{16\pi}}\left(3\cos^2\theta-1\right) \quad Y_2^1=-\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\sin\theta\cos\theta\exp(i\varphi)
\end{gathered} \tag{2.45}$$

Velmi důležitým speciálním případem rozkladu (2.44) je vztah pro Legendreův polynom obecného úhlu mezi dvěma jednotkovými vektory $\vec{n}=\left(\sin\theta\cos\varphi,\sin\theta\sin\varphi,\cos\theta\right)$ a $\vec{n}^{/}=\left(\sin\alpha\cos\beta,\sin\alpha\sin\beta,\cos\alpha\right)$, tedy

$$\begin{aligned}
&\cos\gamma=\vec{n}\cdot\vec{n}^{/}=\cos\theta\cos\alpha+\sin\theta\sin\alpha\cos\left(\varphi-\beta\right) \quad ,\\
&P_l\left(\cos\gamma\right)=\frac{4\pi}{2l+1}\sum_{m=-l}^{m=l}Y_l^{m*}\left(\alpha,\beta\right)Y_l^m\left(\theta,\varphi\right) \quad .
\end{aligned} \tag{2.46}$$

2.6 Pole bodových nábojů ve vakuu

Víme, že pole bodového náboje ve vakuu je dáno Coulombovým potenciálem. Je-li náboj q umístěn mimo počátek souřadné soustavy, např. na ose z (v bodě $z=R$), je tento potenciál dán vztahem

$$\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[x^2+y^2+\left(z-R\right)^2\right]^{1/2}}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\left[r^2+R^2-2rR\cos\theta\right]^{1/2}} \quad . \tag{2.47}$$

Vztah (2.37) nám umožní zapsat potenciál (2.47) ve tvaru multipólového rozkladu

$$\begin{aligned}
&\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\theta\right)\left(\frac{r}{R}\right)^l \quad , \quad r\le R \quad ,\\
&\phi=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}\sum_{l=0}^{\infty}P_l\left(\cos\theta\right)\left(\frac{R}{r}\right)^l \quad , \quad r\ge R \quad .
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Pro $r\gg R$ převažuje rotačně souměrná (vzhledem k počátku souřadnic, nikoliv poloze náboje) složka $l=0$. Umístíme-li však na ose z ještě náboj opačné velikosti do $z=-R$, vyruší se identické příspěvky členů s $l=0$ a pro $r\gg R$ převažuje pak dipólová složka ($l=1$)

$$\phi_{dip}\approx\frac{2qR}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P_1\left(\cos\theta\right)}{r^2}=\frac{D}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\cos\theta}{r^2} \quad , \tag{2.49}$$

kde $D=2qR$ označuje dipólový moment. Podobně, umístíme-li v rovině $z=0$ náboje q ve vzdálenosti R od počátku na osu x a náboje $-q$ ve vzdálenosti R od počátku na osu y, vyruší se identické příspěvky členů s $l=0$ a $l=1$ (při výpočtu využíváme (2.46)) a pro $r\gg R$ převažuje pak kvadrupólová složka ($l=2$)

$$\phi_{quad}\approx-\frac{2qR^2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{P_2\left(\cos\theta\right)}{r^3}=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1-3\cos^2\theta}{r^3} \quad , \tag{2.50}$$

kde $Q=qR^2$ je kvadrupólový moment.

2.7 Dielektrická koule v homogenním poli

PŢvodnĿ nekoneļné homogenní prostŚedí s dielektrickou konstantou ε_1 s intenzitou elektrického pole $\vec{E} = -E\,\vec{e}_z$ je poruġeno umístĿním koule se stŚedem v poļátku a polomĿrem R. Koule má dielektrickou konstantu ε_2. Pro popis výsledného pole bude staļit dipólový ļlen elektrostatického potenciálu

$$\Phi = \left(A\,r + \frac{B}{r^2} \right) \cos\theta \quad . \tag{2.51}$$

Podmínky spojitosti na povrchu koule pro teļné sloģky intenzity $E_t = E_\theta$ a normálové sloģky indukce $D_n = \varepsilon\, E_r$ vedou pro

$$E_t = -\frac{1}{r}\frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \quad , \quad D_n = -\varepsilon \frac{\partial \Phi}{\partial r}$$

k rovnicím

$$\begin{gathered} \left(A_1 + \frac{B_1}{R^3} \right) \sin\theta = \left(A_2 + \frac{B_2}{R^3} \right) \sin\theta \quad , \\ -\varepsilon_1 \left(A_1 - \frac{2\,B_1}{R^3} \right) \cos\theta = -\varepsilon_2 \left(A_2 - \frac{2\,B_2}{R^3} \right) \cos\theta \quad . \end{gathered} \tag{2.52}$$

Pole v nekoneļnu musí nabývat pŢvodní hodnoty, je tedy $A_1 = E$. Pole v poļátku musí být koneļné, a to vyģaduje $B_2 = 0$. Zbývající rovnice pro B_1 a A_2 snadno vyŚeġíme, takģe máme

$$\Phi = \begin{cases} \left(1 + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \right) E\,r\cos\theta & 0 \le r \le R \\ \left(1 + \dfrac{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}{2\,\varepsilon_1 + \varepsilon_2} \dfrac{R^3}{r^3} \right) E\,r\cos\theta & R \le r < \infty \end{cases} \quad . \tag{2.53}$$

Zapíġeme teĽ pŚedchozí výsledek v obecnĿjġím tvaru

$$\Phi_1 = -\vec{E}\cdot\vec{r} + A\frac{\vec{E}\cdot\vec{r}}{r^3} \quad , \quad \Phi_2 = -B\,\vec{E}\cdot\vec{r} \quad . \tag{2.54}$$

Vylouļení konstanty A pomocí podmínek na rozhraní vede ke vztahu

$$\vec{D}_2 = \varepsilon_1\,\varepsilon_0 \left(3\,\vec{E} - 2\,\vec{E}_2 \right) \quad . \tag{2.55}$$

Protoģe se v tomto vztahu nevyskytuje dielektrická konstanta ε_2, platí tento vztah nejen pro libovolné prostŚedí koule, nejen tedy pro lineární a izotropní.

3. Magnetostatika

3.1 Analogie mezi elektrostatikou a magnetostatikou

Viděli jsme, že řešením Poissonovy rovnice (2.6) v elektrostatice je potenciál (2.19)

$$\phi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} \tag{3.1}$$

a tedy intensita

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \rho(\vec{r}^{\,\prime})\frac{\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} \quad . \tag{3.2}$$

řešením základní rovnice magnetostatiky (volíme kalibraci $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0$)

$$\Delta\vec{A} = -\mu_0\,\vec{j} \tag{3.3}$$

je analogicky

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|}\,\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} \quad . \tag{3.4}$$

Pro magnetickou indukci pak je

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)\times\left(\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}^{\,\prime}\right|^3}\,\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} \quad . \tag{3.5}$$

Pro bodový náboj napíšeme $\rho\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} = e\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}^{\,\prime}-\vec{r}_0\right)\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime}$ a z obecného vztahu (3.2) dostáváme Coulombovo pole

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^3} \quad . \tag{3.6}$$

Obdobně pro lineární vodič napíšeme $\vec{j}\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} = J\,\delta^{(2)}\left(\vec{r}^{\,\prime}_{\perp}-\vec{r}_0\right)\mathrm{d}^2\vec{r}_{0\perp}\,\mathrm{d}\vec{r}_{0\parallel}$ a z obecného vztahu (3.5) dostáváme Biotovo – Savartovo pole

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 J}{4\pi}\int \frac{\mathrm{d}\vec{r}_{0\parallel}\times\left(\vec{r}-\vec{r}_{0\parallel}\right)}{\left|\vec{r}-\vec{r}_{0\parallel}\right|^3} \quad . \tag{3.7}$$

Gaussova věta

$$\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{E}\,\mathrm{d}V = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0}\mathrm{d}V = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{3.8}$$

má analogii v Ampérově zákonu

$$\int_S \left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_\ell \vec{B}\cdot\vec{t}\,\mathrm{d}\ell = \mu_0 \int_S \vec{j}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \mu_0\, J \quad . \tag{3.9}$$

3.2 Magnetické pole kruhové smyļky

Do vztahu pro vektorový potenciál (3.4) dosadíme za proudovou hustotu $\vec{j}\left(\vec{r}^{\,\prime}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} = J\,\delta\left(\rho^\prime - a\right)\delta\left(z^\prime\right)\vec{e}_{\varphi^\prime}\,\rho^\prime\,\mathrm{d}\rho^\prime\,\mathrm{d}z^\prime\,\mathrm{d}\varphi^\prime$, kde $\vec{e}_{\varphi^\prime} = -\sin\left(\varphi^\prime - \varphi\right)\vec{e}_\rho + \cos\left(\varphi^\prime - \varphi\right)\vec{e}_\varphi$, a dostaneme

$$\vec{A}(\rho,z) = A_\varphi(\rho,z)\,\vec{e}_\varphi \quad , \quad A_\varphi(\rho,z) = \frac{\mu_0\, J}{2\pi}\int_0^\pi \frac{a\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi}{\left(a^2+\rho^2+z^2-2\,a\,\rho\cos\varphi\right)^{1/2}} \quad ,$$

$$A_\varphi(\rho,z) = \frac{\mu_0\, J}{\pi\, k}\left(\frac{a}{\rho}\right)^{1/2}\left[\left(1-\frac{k^2}{2}\right)K(k) - E(k)\right] \quad , \quad k^2 = \frac{4\,a\,\rho}{\left(a+\rho\right)^2 + z^2} \tag{3.10}$$

a $K(k)$ resp. $E(k)$ jsou eliptické integrály

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\xi}} \quad , \quad E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-k^2\sin^2\xi}\,\mathrm{d}\xi \quad . \tag{3.11}$$

PŚi výpoļtu indukce potŚebujeme derivace eliptických integrálŢ (výrazy získáme vhodnými úpravy integrandŢ derivovaných výrazŢ)

$$\frac{\partial E(k)}{\partial k} = \frac{E(k)-K(k)}{k} \quad , \quad \frac{\partial K(k)}{\partial k} = \frac{E(k)}{k\left(1-k^2\right)} - \frac{K(k)}{k} \quad . \tag{3.12}$$

Potom máme pro sloģky indukce (azimutální sloģka je $B_\varphi = 0$)

$$B_\rho(\rho,z) = -\frac{\partial A_\varphi}{\partial z} = \frac{\mu_0\, J}{2\pi}\frac{z}{\rho\sqrt{\left(a+\rho\right)^2+z^2}}\left[-K(k) + \frac{a^2+\rho^2+z^2}{\left(a-\rho\right)^2+z^2}E(k)\right] \quad , \tag{3.13}$$

$$B_z(\rho,z) = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\,\rho A_\varphi}{\partial\rho} = \frac{\mu_0\, J}{2\pi}\frac{1}{\sqrt{\left(a+\rho\right)^2+z^2}}\left[K(k) + \frac{a^2-\rho^2-z^2}{\left(a-\rho\right)^2+z^2}E(k)\right] \quad . \tag{3.14}$$

Z definice (3.11) máme pro malé hodnoty k^2

$$K(k) \doteq \frac{\pi}{2}\left(1+\frac{k^2}{4}\right) \quad , \quad E(k) \doteq \frac{\pi}{2}\left(1-\frac{k^2}{4}\right) \quad , \tag{3.15}$$

takģe pro pole na ose dostáváme známé výrazy (které by ovģem ģly odvodit snadnĮji)

$$B_\rho(\rho=0,z) = 0 \quad , \quad B_z(\rho=0,z) = \frac{\mu_0\, J\, a^2}{2\left(a^2+z^2\right)^{3/2}} \quad . \tag{3.16}$$

Poznámka: Perioda matematického kyvadla délky l s maximální úhlovou výchylkou $\varphi_{\max}$ je dána výrazem

$$T = 4\sqrt{\frac{l}{g}}\,K\left(\sin\frac{\varphi_0}{2}\right) = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(1 + \frac{\varphi_0^2}{4} + \dots\right) \quad . \tag{3.17}$$

4. Kvasistacionární pole.

4.1 Skin-efekt.

Maxwellovy rovnice v přiblížení kvasistacionárního pole[7]

$$\begin{gathered} \vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla}\times\vec{B} = \mu_0\,\sigma\,\vec{E} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad . \end{gathered} \tag{4.1}$$

vedou na

$$\Delta\vec{E} = \mu_0\sigma\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \quad , \quad -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = \vec{\nabla}\times\vec{E} \quad . \tag{4.2}$$

Uvažujme nekonečný přímý drát kruhového průřezu. V důsledku symetrie má elektrické i magnetické pole jedinou složku

$$\vec{E} = E(r)\exp\{-i\,\omega\,t\}\,\vec{e}_z \quad , \quad \vec{B} = B(r)\exp\{-i\,\omega\,t\}\,\vec{e}_\varphi \tag{4.3}$$

a máme tedy

$$\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r}\right) + k^2E = 0 \quad , \quad i\,\omega\,B = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}r} \quad , \tag{4.4}$$

kde jsme označili

$$k = \frac{\sqrt{2i}}{\delta} = \frac{1+i}{\delta} \quad , \quad \delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0\,\omega\,\sigma}} \quad . \tag{4.5}$$

řešeními rovnic (4.4) konečnými na ose jsou

$$E(r) = K\,J_0(k\,r) \quad , \quad B(r) = -i\frac{k}{\omega}K\,J_1(k\,r) \quad . \tag{4.6}$$

Konstantu úměrnosti K získáme pomocí jedné nebo druhé následující podmínky (proud protékající drátem má danou hodnotu resp. tok magnetického pole plochou protínanou drátem musí mít danou hodnotu)

---

[7] Následující vztah můžeme chápat jako definici přiblížení kvasistacionárního pole: u proudů uvažujeme pouze proud daný Ohmovým zákonem.

$$2\pi\sigma\int_0^R E(r)\,r\,\mathrm{d}r = I \quad , \quad 2\pi R\,B(R) = \mu_0 I \quad . \tag{4.7}$$

Máme tedy uvnitŚvodiļe

$$E(r) = \frac{I}{\sigma\pi R^2}\frac{k R J_0(k r)}{2 J_1(k R)} \quad , \quad B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{J_1(k r)}{J_1(k R)} \quad . \tag{4.8}$$

Pro malé hodnoty frekvence je

$$E(r) \approx \frac{I}{\sigma\pi R^2} \quad , \quad B(r) \approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\frac{r}{R} \quad , \tag{4.9}$$

zatímco pro velké hodnoty máme v blízkosti $r \approx R$

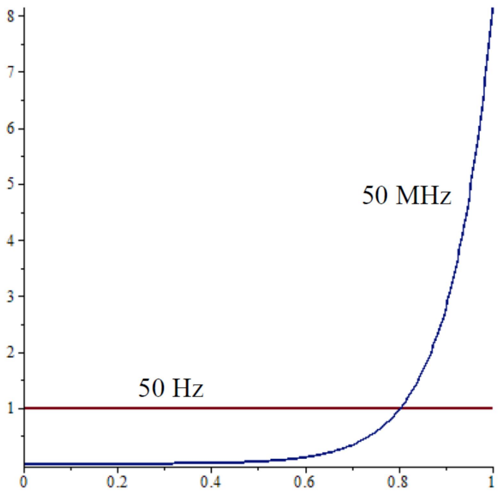
$$\begin{aligned} \vec{E} &\approx \frac{I}{\sqrt{2}\,\pi\sigma R\delta}\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{R-r}{\delta}\right\} \exp\left\{i\left(\frac{R-r}{\delta} - \frac{\pi}{4} - \omega t\right)\right\}\vec{e}_z \quad , \\ \vec{B} &\approx \frac{\mu_0 I}{2\pi R}\left(\frac{R}{r}\right)^{1/2} \exp\left\{-\frac{R-r}{\delta}\right\} \exp\left\{i\left(\frac{R-r}{\delta} - \omega t\right)\right\}\vec{e}_\varphi \quad . \end{aligned} \tag{4.10}$$

Vztahy (4.9) získáváme uģitím pouze prvního ļlenu v rozvoji Besselových funkcí

$$J_0(z) \approx 1 \quad , \quad J_1(z) \approx z \quad , \tag{4.11}$$

vztahy (4.10) pak získáváme z asymptotického rozvoje Besselových funkcí

$$J_\nu(z) \approx \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{1/2} \cos\left[z - \left(\nu + \frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}\right] \quad . \tag{4.12}$$



PrŢbĕh relativní hodnoty hustoty proudu pro mĕdĕný drát polomĕru 1 mm se specifickým odporem $1/\sigma = 1{,}555 \cdot 10^{-8}\ \Omega\,\mathrm{m}$ pŚi dvou rŢzných frekvencích ($f = 50\,\mathrm{Hz}$ a $f = 50\,\mathrm{MHz}$) je ukázán na obrázku. Je vidĕt, ģe pŚi síŠové frekvenci je skin-efekt zanedbatelný.

4.2 Vzájemná indukčnost a vlastní indukčnost.

Uvažujme dvě geometricky pevné cívky s proměnným proudem v cívce 2. Indukované napětí v cívce 1 vyvolané změnou pole buzeného cívkou 2 je[8]

$$U_1 = -\frac{\partial}{\partial t}\int_{(1)} \vec{B}_2\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}S_1 \quad , \quad \int_{(1)} \vec{B}_2\cdot\vec{n}_1\,\mathrm{d}S_1 = \oint_{(1)} \vec{A}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_1 \quad , \quad \vec{A}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi}\oint_{(2)}\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_2}{r_{12}} \quad . \tag{4.13}$$

Po dosazení dostáváme

$$U_1 = M_{12}\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \quad , \quad M_{12} = -\frac{\mu_0}{4\pi}\oint_{(1)}\oint_{(2)}\frac{\mathrm{d}\vec{\ell}_2\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}_1}{\left|\vec{r}_1-\vec{r}_2\right|} \quad . \tag{4.14}$$

Pokud by tekl proměnný proud cívkou 1, bylo by indukované napětí v cívce 2

$$U_2 = M_{21}\frac{d\,I_1}{d\,t} \quad , \quad M_{21} = M_{12} = M \quad . \tag{4.15}$$

Ale také změna magnetického toku cívkou 1 vytvoří indukované napětí v této cívce, stejné platí pro cívku 2. Obecně tedy můžeme psát

$$U_1 = -L_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + M\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \quad , \quad U_2 = M\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} - L_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} \quad . \tag{4.16}$$

Časová změna energie magnetického pole je rovna záporně vzaté práci

$$\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = -U_1 I_1 - U_2 I_2 = L_1 I_1\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} + L_2 I_2\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} - M\left(I_1\frac{\mathrm{d}I_2}{\mathrm{d}t} + I_2\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t}\right) \quad , \tag{4.17}$$

takže pro energii magnetického pole je

$$W = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 - M\,I_1 I_2 \quad , \quad L_1 L_2 \ge M^2 \quad . \tag{4.18}$$

Energii magnetického pole máme ovšem také vyjádřenu jako

$$W = \frac{1}{2}\int_V \vec{B}\cdot\vec{H}\,\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \vec{j}\cdot\vec{A}\,\mathrm{d}V \quad . \tag{4.19}$$

Při odvození rovnosti obou výrazů v (4.19) je postupně využito vztahů

$$\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{H}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - \vec{A}\cdot\left(\vec{\nabla}\times\vec{H}\right) = \vec{\nabla}\cdot\left(\vec{A}\times\vec{H}\right) \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H} = \vec{j} \quad . \tag{4.20}$$

Vztahu pro energii využijeme pro výpočet vlastní indukčnosti

---

[8] Poznámka: normála k ploše je dána pravidlem pravé ruky, tedy ve směru vektorového součinu tečny a vnitřní normály k orientované (proti směru hodinových ručiček) uzavřené křivce na ploše.

$$L = \frac{1}{\mu_0 I^2} \int_V B^2 \,\mathrm{d}V \quad . \tag{4.21}$$

Uvažujme dvě cívky ve tvaru solenoidu každou o N závitech těsně na sobě. Průřez cívek je S a jejich délka ℓ. Pole první a druhé cívky jsou tedy přibližně $B_1 \approx \mu_0 N I_1/\ell$, $B_2 \approx \mu_0 N I_2/\ell$ a pro indukčnosti máme $L_1 \approx L_2 \approx -M \approx \mu_0 N^2 S/\ell$. Pro energii magnetického pole pak

$$W \approx \frac{\mu_0 N^2 S}{2\ell} \left(I_1 + I_2\right)^2 \quad . \tag{4.22}$$

4.3 Komplexní odpor

Pro obvod s odporem, kondenzátorem a indukčností v sériovém zapojení máme

$$U = R I + \frac{Q}{C} + L \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \quad , \quad I = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{4.23}$$

tedy pro harmonický průběh

$$U = U_0 \exp\{-i\omega t\} \quad , \quad I = I_0 \exp\{-i\omega t\} \tag{4.24}$$

dostáváme vztah

$$U = Z I \quad , \quad Z = R - i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) \quad . \tag{4.25}$$

Vezmeme-li reálnou část (4.25), dostáváme

$$I = \frac{U_0 \cos\left(\omega t - \varphi\right)}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} \quad , \quad \mathrm{tg}\,\varphi = \frac{\omega L}{R} - \frac{1}{\omega R C} \quad . \tag{4.26}$$

Pro soustavu induktivně vázaných obvodů má zobecnění rovnice (4.23) tvar

$$U_a = R_a I_a + \frac{Q_a}{C_a} + \sum_b L_{ab} \frac{\mathrm{d}I_b}{\mathrm{d}t} \quad , \quad I_a = \frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t} \quad , \tag{4.27}$$

který pro periodické děje dává

$$U_a = \sum_b Z_{ab} I_b \quad , \quad Z_{ab} = \left(R_a + \frac{i}{\omega C_a}\right)\delta_{ab} - i\,\omega L_{ab} \quad . \tag{4.28}$$

Vlastní frekvence dostaneme z podmínky řešitelnosti soustavy rovnic pro proudy při všech $U_a = 0$, tedy

$$\det\left(Z_{ab}\right) = 0 \quad . \tag{4.29}$$

Rovnice (4.27) lze formálně získat dosazením lagrangiánu $\mathfrak{L}$ a disipativní funkce $\mathfrak{R}$

$$\mathfrak{L} = \sum_{a,b} \frac{1}{2} L_{ab} \frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}Q_b}{\mathrm{d}t} - \sum_a \frac{1}{2}\frac{Q_a^2}{C_a} + \sum_a Q_a U_a \quad , \quad \mathfrak{R} = \sum_a \frac{1}{2} R_a \left(\frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t}\right)^2 \tag{4.30}$$

do obecného vztahu

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t}} - \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q_a} = -\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial \frac{\mathrm{d}Q_a}{\mathrm{d}t}} \quad . \tag{4.31}$$

Jde tedy o analogii k souboru tlumených harmonických oscilátorů buzených vnější silou.

5. Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí

5.1 Mikroskopické Maxwellovy rovnice

Náboje a proudy rozdělíme na ty, kterou jsou vázané na prostředí a na vnější náboje a proudy. Mikroskopické Maxwellovy rovnice v materiálovém prostředí tedy budou

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{e} = \frac{\rho + \rho_{ext}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{e} = -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \quad , \\ &\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{h} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{e}}{\partial t} + \rho\vec{v} + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{h} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{5.1}$$

Vytvoříme střední hodnoty[9] a dostaneme

$$\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = \frac{\langle\rho\rangle + \rho_{ext}}{\varepsilon_0} \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad , \\ &\frac{1}{\mu_0}\vec{\nabla}\times\vec{B} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \langle\rho\vec{v}\rangle + \vec{j}_{ext} \quad , \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \end{aligned} \tag{5.2}$$

kde jsme označili

$$\langle \vec{e}\rangle = \vec{E} \quad , \quad \langle \vec{h}\rangle = \vec{B} \quad . \tag{5.3}$$

Celkový náboj vázaný na prostředí, plně uzavřené uvnitř oblasti V je roven nule

$$\int_V \langle\rho\rangle \mathrm{d}V = 0 \quad \Rightarrow \quad \langle\rho\rangle = -\vec{\nabla}\cdot\vec{P} \quad , \tag{5.4}$$

přičemž $\vec{P} = 0$ vně materiálu. Potom je totiž z Gaussovy věty nulovost celkového náboje zaručena

$$\int_V \langle\rho\rangle \mathrm{d}V = -\int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{P}\,\mathrm{d}V = \int_S \vec{P}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = 0 \quad . \tag{5.5}$$

---

[9] Je to obdoba situace v mechanice kontinuity: středujeme přes malý objem, který sice obsahuje dostatek atomů či molekul pro vyhlazení mikroskopických fluktuací, ale stále jej můžeme z makroskopického hlediska považovat za „bod“ prostředí.

Uvaģujme dipólový moment

$$\int_V \vec{r}\left\langle\rho\right\rangle \mathrm{d}V = -\int_V \vec{r}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{P}\right)\mathrm{d}V = -\int_S \vec{r}\left(\vec{n}\cdot\vec{P}\right)\mathrm{d}S + \int_V \left(\vec{P}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{r}\,\mathrm{d}V = \int_V \vec{P}\,\mathrm{d}V \quad . \tag{5.6}$$

Zavedeme-li vektor indukce elektrického pole $\vec{D} = \varepsilon_0\,\vec{E} + \vec{P}$, odvodili jsme jiģ rovnici

$$\mathrm{div}\vec{D} = \rho_{ext} \quad . \tag{5.7}$$

ProveŅme nyní Śez materiálem tak, aby byl plnĚ uzavŚen uvnitŚ nĚjaké plochy *S*. Celkový proud touto plochou vázaný na prostŚedí je dán celkovou hodnotou ļasové zmĚny prŢmĚru vektoru polarizace

$$\int_S \left\langle\rho\vec{v}\right\rangle\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \int_S \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad\Rightarrow\quad \left\langle\rho\vec{v}\right\rangle = \vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \quad , \tag{5.8}$$

pŚiļemģ $\vec{M} = 0$ vnĚ materiálu. PŚi této volbĚ je prŢmĚrná hodnota proudu Śezem rovna nule:

$$\begin{aligned} &\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\int_S\left(\vec{\nabla}\times\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\,\mathrm{d}t = \\ &\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int_0^T\int_\ell \vec{M}\cdot\mathrm{d}\vec{\ell}\,\mathrm{d}t + \int_S\left[\vec{P}(T)-\vec{P}(0)\right]\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S\right\} = 0 \quad . \end{aligned} \tag{5.9}$$

Uvaģujme magnetický moment

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\int_V \vec{r}\times\left\langle\rho\vec{v}\right\rangle\mathrm{d}V = \frac{1}{2}\int_V \vec{r}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{M}\right)\mathrm{d}V = \\ &\frac{1}{2}\int_S \vec{r}\times\left(\vec{n}\times\vec{M}\right)\mathrm{d}S - \frac{1}{2}\int_V\left(\vec{M}\times\vec{\nabla}\right)\times\vec{r}\,\mathrm{d}V = \int_V \vec{M}\,\mathrm{d}V \quad . \end{aligned} \tag{5.10}$$

StŚední hodnotu $\left\langle\rho\vec{v}\right\rangle$ mŢģeme vyjádŚit také následujícím zpŢsobem: derivujeme rovnici (5.7) parciálnĚ podle ļasu a s vyuģitím rovnice kontinuity pro vnĚjší náboje dostáváme

$$\mathrm{div}\left(\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{ext}\right) = 0 \quad\Rightarrow\quad \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} + \vec{j}_{ext} = \mathrm{rot}\vec{H} \quad , \tag{5.11}$$

kde $\vec{H}$ je (zatím neurļený) vektor intenzity magnetického pole. Dosazením za $\vec{j}_{ext}$ do (5.2) pak máme

$$\left\langle\rho\vec{v}\right\rangle = \frac{1}{\mu_0}\mathrm{rot}\vec{M} + \frac{\partial\vec{P}}{\partial t} \quad , \tag{5.12}$$

kde jsme oznaļili $\vec{M} = \vec{B} - \mu_0\,\vec{H}$. Definice vektorŢ polarizace $\vec{P}$ a magnetizace $\vec{M}$ pomocí momentŢ je dŢleģitá pro jednoznaļnost, jinak by vyhovovaly také $\vec{P} + \vec{\nabla}\times\vec{f}$ a $\vec{M} + \vec{\nabla} f$. PovģimnĚme si, ģe spojení rovnic (5.4) a (5.8) dává rovnici kontinuity i pro vnitŚní náboje

$$\frac{\partial\langle\rho\rangle}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\langle\rho\vec{v}\rangle=0 \quad . \tag{5.13}$$

Vynecháme-li teď indexy „ext" u vnějších nábojů, dostáváme konečný tvar Maxwellových rovnic (1.4)

$$\begin{aligned}\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}=-\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad , \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j} \quad .\end{aligned} \tag{5.14}$$

Materiálové vztahy jsou pak

$$\vec{D}=\varepsilon_0\,\vec{E}+\vec{P} \quad , \quad \vec{H}=\frac{1}{\mu_0}\left(\vec{B}-\vec{M}\right) \quad . \tag{5.15}$$

V kovových materiálech pokládáme

$$\vec{j}=\sigma\,\vec{E} \quad . \tag{5.16}$$

5.2 Maxwellovy rovnice pro prostředí s triviálními materiálovými vztahy

V homogenním izotropním lineárním prostředí bez disperse máme jednoduché materiálové vztahy

$$\vec{D}=\varepsilon_r\,\varepsilon_0\,\vec{E} \quad , \quad \vec{H}=\frac{1}{\mu_r\,\mu_0}\vec{B} \quad . \tag{5.17}$$

Zavedeme-li pro popis elektromagnetického pole vektorový a skalární potenciál

$$\vec{B}=\vec{\nabla}\times\vec{A} \quad , \quad \vec{E}=-\vec{\nabla}\phi-\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \tag{5.18}$$

máme po dosazení do Maxwellových rovnic

$$\begin{aligned}\Delta\phi+\frac{\partial}{\partial t}\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=-\frac{\rho}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} \quad , \\ \Delta\vec{A}-\varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}-\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}\right)=-\mu_r\,\mu_0\,\vec{j} \quad .\end{aligned} \tag{5.19}$$

S využitím kalibrační transformace

$$\vec{A}\to\vec{A}+\vec{\nabla}\psi \quad , \quad \phi\to\phi-\frac{\partial\psi}{\partial t} \tag{5.20}$$

můžeme mít

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A}+\varepsilon_r\,\mu_r\,\varepsilon_0\,\mu_0\frac{\partial\phi}{\partial t}=0 \tag{5.21}$$

a dostáváme tak pro potenciály nehomogenní vlnovou rovnici

$$\Delta\phi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_r\,\varepsilon_0} \quad ,$$
$$\Delta\vec{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_r\,\mu_0\,\vec{j} \quad . \tag{5.22}$$

Označili jsme rychlost světla ve vakuu *c* a index lomu *n*

$$c = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_0\,\mu_0}} \quad , \quad n^2 = \varepsilon_r\,\mu_r \quad . \tag{5.23}$$

6. Časově proměnná elektromagnetická pole ve vakuu

6.1 Rovinná a kulová vlna

Vlnová rovnice v jednorozměrném případě a vlnová rovnice pro sféricky symetrické řešení v trojrozměrném případě jsou

$$\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial t^2} = 0 \quad ,$$
$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial\psi(r,t)}{\partial r}\right] - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi(r,t)}{\partial t^2} = 0 \quad . \tag{6.1}$$

Obecné řešení těchto rovnic je

$$\psi(x,t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right) + g\left(t + \frac{x}{c}\right) \quad ,$$
$$\psi(r,t) = \frac{1}{r}f\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{1}{r}g\left(t + \frac{r}{c}\right) \quad . \tag{6.2}$$

Vhodnou volbou funkcí f a g dostaneme rovinnou vlnu jdoucí ve směru nebo proti směru osy *x* respektive rozbíhavou nebo sbíhavou kulovou vlnu

$$\psi(x,t) = A\exp\left[i\,\omega\left(t \mp \frac{x}{c}\right)\right] \quad , \quad \psi(r,t) = \frac{A}{r}\exp\left[i\,\omega\left(t \mp \frac{r}{c}\right)\right] \quad . \tag{6.3}$$

6.2 Obecné řešení nehomogenní rovnice pro potenciály

První řešení z řešení (6.2) se sférickou symetrii je velmi důležité, neboť nám umožní zapsat obecně zpožděné potenciály, způsobené zadaným rozložením náboje a proudu. Připomeňme si, že platí

$$\Delta\frac{1}{r} = -4\pi\,\delta^{(3)}(\vec{r}) \quad . \tag{6.4}$$

Obecné řešení nehomogenních rovnic pro potenciály

$$\Delta\phi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \quad ,$$
$$\Delta\vec{A} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2} = -\mu_0\vec{j} \tag{6.5}$$

můžeme tedy získat jako

$$\phi(\vec{r}_1, t) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\rho\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}}\,\mathrm{d}^3\vec{r}_2 \tag{6.6}$$

a

$$\vec{A}(\vec{r}_1, t) = \frac{\mu_0}{4\pi}\int \frac{\vec{j}\left(\vec{r}_2, t - \frac{r_{12}}{c}\right)}{r_{12}}\,\mathrm{d}^3\vec{r}_2 \quad , \tag{6.7}$$

kde $r_{12} = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$. Po derivování a integraci dá čitatel integrandu pravou stranu nehomogenní rovnice, jmenovatel je funkce, která je řešením homogenní vlnové rovnice.

6.3 Pole časově proměnného dipólu

Uvažujme všechny náboje soustředěny kolem počátku souřadnic. Pak můžeme pro vektorový potenciál psát

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\int \vec{j}\left(\vec{r}^{\,\prime}, t - \frac{r}{c}\right)\mathrm{d}^3\vec{r}^{\,\prime} = \frac{\mu_0}{4\pi r}\sum_a e_a\,\vec{v}_a\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{6.8}$$

neboli

$$\vec{A}(\vec{r}, t) \approx \frac{\mu_0}{4\pi r}\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) \quad , \quad \vec{p}(t) = \sum_a e_a\,\vec{r}_a(t) \quad . \tag{6.9}$$

Skalární potenciál spočteme integrací kalibračního vztahu

$$\frac{\partial\phi}{\partial t} = -c^2\,\vec{\nabla}\cdot\vec{A} \quad . \tag{6.10}$$

Jednoduchými úpravami dostaneme

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{r}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad ,$$
$$\vec{\nabla}\times\vec{A} = -\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\vec{r}\times\left[\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right) + \frac{r}{c}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{p}\left(t - \frac{r}{c}\right)\right] \quad . \tag{6.11}$$

Skalární potenciál je tedy

$$\phi(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}}{r^3}\cdot\left[\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\frac{\partial}{\partial t}\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)\right] \quad . \tag{6.12}$$

Pro intenzity dostaneme

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 r^3}\left[\frac{3}{r^2}\left(\tilde{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)\cdot\vec{r}\right)\vec{r}-\tilde{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial^2\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}\times\vec{r}\right)\times\vec{r}\right] \quad ,$$

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi r^3}\frac{\partial\tilde{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t}\times\vec{r} \quad , \quad \tilde{\vec{p}}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)+\frac{r}{c}\frac{\partial\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t} \quad . \tag{6.13}$$

Dostatečně daleko od dipólu máme

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 c^2}\frac{1}{r}\vec{D}\left(t-\frac{r}{c}\right)\times\vec{n} \quad , \quad \vec{B}(\vec{r},t)=\frac{\mu_0}{4\pi c}\frac{1}{r}\vec{D}\left(t-\frac{r}{c}\right) \quad , \tag{6.14}$$

kde jsme označili

$$\vec{D}\left(t-\frac{r}{c}\right)=\frac{\partial^2\vec{p}\left(t-\frac{r}{c}\right)}{\partial t^2}\times\vec{n} \quad , \quad \vec{n}=\frac{\vec{r}}{r} \quad . \tag{6.15}$$

Pro hustotu energie máme

$$W=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2+\frac{1}{\mu_0}B^2\right)=\frac{1}{16\pi^2 c^4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}D^2 \tag{6.16}$$

a Poyntingův vektor je

$$\vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B}=\frac{1}{16\pi^2 c^3\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}D^2\vec{n} \quad . \tag{6.17}$$

Platí přirozeně

$$\frac{\vec{S}}{W}=c\,\vec{n} \quad . \tag{6.18}$$

Příklad: Vezměme rozložení proudu ve tvaru

$$\vec{j}(\vec{r},t)=J\,\delta(x)\,\delta(y)\sin\left(\frac{\pi z}{L}\right)\cos(\omega t)\,\vec{e}_z \quad , \quad 0\le z\le L \quad . \tag{6.19}$$

Podle (6.8) a (6.9) spočteme snadno

$$\vec{p}(t)=\frac{2LJ}{\pi\omega}\sin(\omega t)\,\vec{e}_z \tag{6.20}$$

a podle (6.15)

$$\vec{D}\left(t-\frac{r}{c}\right)=-\frac{2LJ\omega}{\pi}\sin\theta\sin\omega\left(t-\frac{r}{c}\right)\vec{e}_\varphi \quad . \tag{6.21}$$

Příklad: V kvantové teorii vezmeme místo integrálu z proudové hustoty maticový element operátoru proudu mezi počátečním a koncovým stavem elektronu v atomu. Ze Schrödingerovy rovnice

$$i\hbar\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\right)\psi_i \quad , \quad -i\hbar\frac{\partial\psi_f^*}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta+V\right)\psi_f^* \tag{6.22}$$

dostaneme po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi_i\,\psi_f^*\right)+\frac{\hbar}{2mi}\vec{\nabla}\cdot\left(\psi_f^*\,\vec{\nabla}\psi_i-\psi_i\,\vec{\nabla}\psi_f^*\right)=0 \quad . \tag{6.23}$$

Vztah (6.23) umožňuje zapsat „rovnici kontinuity“

$$\frac{\partial\rho_{fi}}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{j}_{fi}=0 \quad , \tag{6.24}$$

kde hustota náboje a hustota proudu odpovídající přechodu $i\to f$ jsou

$$\rho_{fi}=e\psi_i\,\psi_f^* \quad , \quad \vec{j}_{fi}=\frac{e\hbar}{2mi}\psi_f^*\,\vec{\nabla}\psi_i-\psi_i\,\vec{\nabla}\psi_f^* \quad . \tag{6.25}$$

Vynásobení (6.24) vektorem $\vec{r}$ a malou úpravou získáme vztah

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{r}\,\psi_i\,\psi_f^*\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left[\vec{r}\left(j_{fi}\right)_x\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\vec{r}\left(j_{fi}\right)_y\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left[\vec{r}\left(j_{fi}\right)_z\right]=\vec{j}_{fi} \quad . \tag{6.26}$$

Dosadíme $\vec{j}_{fi}$ dané tímto vztahem do (6.8). Integrály s derivacemi podle prostorových souřadnic dají nulu, takže zbude jen první člen s derivací podle času. Porovnání s (6.9) vede k výrazu pro dipólový moment. Vezmeme přitom v úvahu, že pro stacionární stavy

$$\psi_i\left(\vec{r},t\right)=u_i\left(\vec{r}\right)\exp\left(-\frac{i}{\hbar}E_i\,t\right) \quad , \quad \psi_f^*\left(\vec{r},t\right)=u_f^*\left(\vec{r}\right)\exp\left(\frac{i}{\hbar}E_f\,t\right) \quad . \tag{6.27}$$

S označením $\omega_{fi}=\left(E_f-E_i\right)/\hbar$ můžeme psát pro dipólový moment vyvolaný elektronovým přechodem $i\to f$

$$\vec{p}_{fi}\left(t\right)=\exp\left(i\,\omega_{fi}\,t\right)e\int\vec{r}\,u_f^*\left(\vec{r}\right)u_i\left(\vec{r}\right)d^3\vec{r} \quad . \tag{6.28}$$

6.4 Lienardův - Wiechertův potenciál

Ať se nabitá částice pohybuje po zadané trajektorii $\vec{r}=\vec{r}_0\left(t\right)$. Hustota náboje je pak

$$\rho\left(\vec{r},t\right)=e\,\delta^{(3)}\left(\vec{r}-\vec{r}_0\left(t\right)\right) \quad . \tag{6.29}$$

Vzorec pro skalární potenciál přepíšeme jako

$$\phi(\vec r,t)=\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int\frac{\rho\left(\vec r^{\,/},t^{/}\right)}{\left|\vec r-\vec r^{\,/}\right|}\,\delta\left(t^{/}-t+\frac{\left|\vec r-\vec r^{\,/}\right|}{c}\right)\mathrm{d}t^{/}\,\mathrm{d}^3\vec r^{\,/}=$$
$$\frac{1}{4\pi\,\varepsilon_0}\int\frac{1}{R\left(t^{/}\right)}\,\delta\left(t^{/}-t+\frac{\left|\vec r-\vec r^{\,/}\right|}{c}\right)\mathrm{d}t^{/}\quad, \tag{6.30}$$

kde jsme označili $\vec R\left(t^{/}\right)=\vec r-\vec r_0\left(t^{/}\right)$, $R\left(t^{/}\right)=\left|\vec R\left(t^{/}\right)\right|$. S pomocí vztahu

$$\delta\left(t^{/}-t+\frac{R\left(t^{/}\right)}{c}\right)=\frac{\delta\left(t^{/}-t_r\right)}{1-\dfrac{\vec R\left(t_r\right)\cdot\vec v\left(t_r\right)}{c\,R\left(t_r\right)}}\quad,\quad t_r=t-\frac{R\left(t_r\right)}{c} \tag{6.31}$$

napíšeme výraz pro skalární potenciál jako

$$\phi(\vec r,t)=\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{R\left(t_r\right)-\dfrac{\vec R\left(t_r\right)\cdot\vec v\left(t_r\right)}{c}}\quad,\quad t_r=t-\frac{R\left(t_r\right)}{c}\quad. \tag{6.32}$$

Výraz pro vektorový potenciál je pak obdobně

$$\vec A(\vec r,t)=\frac{e\,\mu_0}{4\pi}\,\frac{\vec v\left(t_r\right)}{R\left(t_r\right)-\dfrac{\vec R\left(t_r\right)\cdot\vec v\left(t_r\right)}{c}}\quad,\quad t_r=t-\frac{R\left(t_r\right)}{c}\quad. \tag{6.33}$$

Vezměme teď jednoduchý případ pohybu s konstantní rychlostí podél osy *x*. Podmínku pro nalezení časového zpoždění přepíšeme na

$$c^2\left(t-t_r\right)^2=\left(x-v\,t_r\right)^2+y^2+z^2\quad, \tag{6.34}$$

odkud

$$\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t_r=t-\frac{v\,x}{c^2}-\frac{1}{c}\left[\left(x-v\,t\right)^2+\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)\left(y^2+z^2\right)\right]^{1/2}\quad. \tag{6.35}$$

Jmenovatel výrazů (6.32) a (6.33) pro potenciály můžeme psát jako

$$c\left(t-t_r\right)-\frac{v\left(x-v\,t_r\right)}{c}=c\left[t-\frac{v\,x}{c^2}-\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)t_r\right]\quad. \tag{6.36}$$

Po malé úpravě pak dostáváme

$$\phi(\vec r,t)=\frac{e}{4\pi\,\varepsilon_0}\,\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\,\frac{1}{r^*} \tag{6.37}$$

pro skalární potenciál a

$$\vec A(\vec r,t)=\left(A_x\left(\vec r,t\right),0,0\right)\quad,\quad A_x\left(\vec r,t\right)=\frac{e\,\mu_0}{4\pi}\,\frac{1}{\left(1-\beta^2\right)^{1/2}}\,\frac{v}{r^*} \tag{6.38}$$

pro vektorový potenciál, kde jsme označili

$$r^* = \left[\frac{(x - vt)^2}{1 - \beta^2} + y^2 + z^2 \right]^{1/2} \quad . \tag{6.39}$$

Vektor intenzity elektrického pole je

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}} \frac{1}{r^{*3}} (x - vt, y, z) \tag{6.40}$$

a vektor indukce magnetického pole je

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{e\mu_0}{4\pi} \frac{1}{\left(1 - \beta^2\right)^{1/2}} \frac{v}{r^{*3}} (0, -z, y) \quad . \tag{6.41}$$

Pro vektor hustoty impulsu pole $\vec{G} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ dostáváme

$$\vec{G}(\vec{r}, t) = \frac{e^2 \mu_0}{16\pi^2} \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{v}{r^{*6}} \left(y^2 + z^2, -y(x - vt), -z(x - vt) \right) \tag{6.42}$$

a pro hustotu energie $W = \left(\varepsilon_0 E^2 + B^2/\mu_0\right)/2$ výraz

$$W(\vec{r}, t) = \frac{e^2}{32\pi^2 \varepsilon_0} \frac{1}{1 - \beta^2} \frac{(x - vt)^2 + \left(1 + \beta^2\right)\left(y^2 + z^2\right)}{r^{*6}} \quad . \tag{6.43}$$

6.5 Ztráta energie zářením

Pro Poyntingův vektor dipólového elektromagnetického pole jsme měli výrazy (6.15) a (6.17). Pro jednu nerelativistickou částici s nábojem e, která se pohybuje se zrychlením $\vec{w}$ je pak

$$\vec{D} = e\,\vec{w} \times \vec{n} \tag{6.44}$$

a intenzita záření vychází jako

$$\mathrm{d}I = \vec{S} \cdot \vec{n}\, r^2\, \mathrm{d}\Omega = \frac{e^2}{16\pi^2 \varepsilon_0 c^3} w^2 \sin^2\theta\, \mathrm{d}\Omega \quad . \tag{6.45}$$

Po integraci přes celý prostorový úhel dostaneme pro vyzařovanou intenzitu ($\mathfrak{E}$ je energie částice)

$$I = \frac{\mathrm{d}\mathfrak{E}}{\mathrm{d}t} = \frac{e^2}{6\pi\varepsilon_0 c^3} w^2 \quad . \tag{6.46}$$

7. Rozptyl záření volnými náboji.

7.1 Thomsonův vzorec

Budeme popisovat rozptyl záření, které dopadá na soustavu nabitých částic. Zavedeme proto pojem účinného průřezu. Ať $\mathrm{d}I$ značí intenzitu záření, tj. střední hodnotu energie vyzařované soustavou za jednotku času do elementu prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$ a $\overline{S}$ je střední hodnota velikosti Poyntingova vektoru (střední hodnota toku energie) dopadajícího záření. Potom je definován diferenciální účinný průřez (účinný průřez rozptylu do elementu prostorového úhlu $\mathrm{d}\Omega$) jako veličina rozměru elementu plochy

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{\mathrm{d}I}{\overline{S}} \quad . \tag{7.1}$$

Uvažujme teď rozptyl elektromagnetické vlny jedním volným nábojem. Budeme předpokládat, že rychlost získaná nábojem bude malá a že vlnová délka dopadající vlny je mnohem větší než amplituda vyvolaných kmitů náboje okolo původní polohy (do této polohy umístíme počátek souřadnic), tedy můžeme psát

$$m\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} = e\vec{E}_0\cos\left(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega t+\alpha\right) \approx e\vec{E}_0\cos\left(\omega t-\alpha\right) \quad . \tag{7.2}$$

Pro intenzitu dipólového záření kmitajícího náboje máme podle (6.46)

$$\mathrm{d}I = \frac{e^4}{16\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}\left|\vec{E}_0\times\vec{n}\right|^2\overline{\cos^2\left(\omega t-\alpha\right)}\mathrm{d}\Omega = \frac{e^4}{32\pi^2\varepsilon_0 m^2 c^3}E_0^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega \tag{7.3}$$

a pro střední hodnotu Poyntingova vektoru dopadající vlny

$$\overline{S} = c\,\varepsilon_0 E_0^2\,\overline{\cos^2\left(\omega t-\alpha\right)} = \frac{1}{2}c\,\varepsilon_0 E_0^2 \quad , \tag{7.4}$$

takže diferenciální účinný průřez je

$$\mathrm{d}\sigma = \left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}\right)^2\sin^2\theta\,\mathrm{d}\Omega \quad . \tag{7.5}$$

Celkový účinný průřez je pak dán Thomsonovým vzorcem

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m c^2}\right)^2 = \frac{8}{3}\pi r_e^2 \quad . \tag{7.6}$$

Veličina r_e označuje tzv. klasický poloměr elektronu. Vztah pro poloměr získáme tak, že položíme elektrostatickou energii elektronu „poloměru“ r_e rovnu klidové energii

$$\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_e} = mc^2 \quad . \tag{7.7}$$

Poznámka o „poloměrech“: Za základ vezmeme redukovanou (tj. podělenou 2π) Comptonovu vlnovou délku elektronu a (bezrozměrnou) konstantu jemné struktury α

$$\bar{\lambda} = \frac{\lambda_C}{2\pi} = \frac{\hbar}{m\,c} \quad , \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar\,c} \quad . \tag{7.8}$$

Bohrův poloměr dostaneme jako podíl, klasický poloměr jako součin těchto veličin

$$a_B = \frac{\bar{\lambda}}{\alpha} = \frac{4\pi\,\varepsilon_0\,\hbar^2}{m\,e^2} \quad , \quad r_e = \bar{\lambda}\,\alpha = \frac{e^2}{4\pi\,\varepsilon_0\,m\,c^2} \quad . \tag{7.9}$$

7.2 Modifikace Thomsonova vzorce

Uvažujme nyní nikoliv volný náboj, ale tlumený oscilátor, tedy

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_0\cos\omega t \quad . \tag{7.10}$$

Pro dipólový moment $\vec{p} = e\,\vec{r}$ odsud dostáváme

$$\vec{p} = \frac{e^2}{m}\frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)\cos\omega t + \gamma\,\omega\sin\omega t}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\,\omega^2}\vec{E}_0 \quad . \tag{7.11}$$

Celkový účinný průřez je v tomto případě

$$\sigma = \frac{8\pi}{3}r_e^2\frac{\omega^4}{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\,\omega^2} \quad . \tag{7.12}$$

7.3 Index lomu

Definujeme polarizovatelnost $\alpha(\omega)$ jako konstantu úměrnosti ve vztahu mezi (lokálním) elektrickým polem $\vec{E}_{loc}$ a dipólovým momentem $\vec{p}$. Vyjdeme z komplexního zápisu (7.10)

$$\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{d}t^2} + \gamma\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2\,\vec{r} = \frac{e}{m}\vec{E}_{loc}\exp\left(-i\,\omega t\right) \quad . \tag{7.13}$$

Potom

$$\vec{p} = \varepsilon_0\,\alpha\left(\omega\right)\vec{E}_{loc} \quad , \quad \alpha\left(\omega\right) = \frac{e^2}{\varepsilon_0\,m}\frac{1}{\omega_0^2 - i\,\gamma\,\omega - \omega^2} \quad . \tag{7.14}$$

Polarizace je pak $\vec{P} = N\,\vec{p}$. Musíme ovšem uvážit, jaké pole působí na náboj. Připomeňme z elektrostatiky, že je-li v dielektriku s homogenním polem dutina, je lokální pole rovno

$$\vec{E}_{loc} = \vec{E} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{\varepsilon_0}\vec{P} \quad , \quad \vec{E}_{loc} = \vec{E} + \frac{1}{3\varepsilon_0}\vec{P} \quad , \tag{7.15}$$

podle toho, jde-li o štěrbinu podél nebo napříč pole nebo o kulovou dutinu. Pro úplnost poznamenejme, že pro magnetické pole máme v podobné situaci

$$\vec{B}_{loc} = \vec{B} - \vec{M} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} \quad , \quad \vec{B}_{loc} = \vec{B} - \frac{2}{3}\vec{M} \quad . \tag{7.16}$$

Pro dielektrika uvažujeme o vázaných nábojích uvnitř kulové dutiny, můžeme tedy psát

$$\vec{P} = \frac{N\,\alpha}{1 - \frac{1}{3} N\,\alpha}\,\varepsilon_0\,\vec{E} \tag{7.17}$$

a pro index lomu (za velmi častého předpokladu $\mu(\omega) = \mu_0$)

$$n^2 = 1 + \frac{N\,\alpha}{1 - \frac{1}{3} N\,\alpha} \quad . \tag{7.18}$$

Obvyklá forma tohoto vztahu je (Clausius - Mossotti)

$$3\frac{n^2 - 1}{n^2 + 2} = N\,\alpha \quad . \tag{7.19}$$

Ve vodiči uvažujeme o téměř volných elektronech (nevázaných k atomu, tedy $\omega_0 = 0$) a dále máme pro konstantu γ (ze dvou různých vyjádření proudu a zápisu změny hybnosti za dobu mezi srážkami)

$$j = \sigma E \quad , \quad j = N\,e\,v_d \quad , \quad m\,v_d\,\gamma = e\,E \quad \Rightarrow \quad \gamma = \frac{N\,e^2}{m\,\sigma} \quad . \tag{7.20}$$

Také lokální pole je rovno vnějšímu, opět díky neustálému pohybu téměř volných elektronů. Odtud máme pro index lomu v kovu

$$n^2 = 1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2 + i\,\omega\,\omega_p^2 \frac{\varepsilon_0}{\sigma}} \quad , \quad \omega_p^2 = \frac{N\,e^2}{m\,\varepsilon_0} \quad . \tag{7.21}$$

8. Elektromagnetické pole v dispersním prostředí.

8.1 Maxwellovy rovnice

Maxwellovy rovnice pro Fourierovy složky (píšeme obecně bez vyznačení prostorové proměnné) počítané jako

$$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\omega)\exp(-i\,\omega\,t)\,\mathrm{d}\omega \tag{8.1}$$

jsou

$$\begin{gathered} \vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\omega) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}(\omega) = -i\,\omega\,\vec{D}(\omega) \quad , \\ \vec{\nabla}\cdot\vec{D}(\omega) = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\omega) = i\,\omega\,\vec{B}(\omega) \quad . \end{gathered} \tag{8.2}$$

Předpoklad lineárního a příčinného vztahu mezi intenzitou a indukcí elektrického pole připouští následující vztah

$$\vec{D}(t)=\varepsilon_0\left(\vec{E}(t)+\int_0^\infty \chi_e(\tau)\vec{E}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \quad . \tag{8.3}$$

Podobně pro magnetické veličiny

$$\vec{B}(t)=\mu_0\left(\vec{H}(t)+\int_0^\infty \chi_m(\tau)\vec{H}(t-\tau)\,\mathrm{d}\tau\right) \quad . \tag{8.4}$$

Fourierova transformace (8.3) a (8.4) vede k výrazům

$$\vec{D}(\omega)=\varepsilon_0\,\varepsilon(\omega)\vec{E}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega)=\mu_0\,\mu(\omega)\vec{H}(\omega) \quad , \tag{8.5}$$

kde

$$\varepsilon(\omega)=1+\int_0^\infty \chi_e(\tau)\exp(i\,\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad , \quad \mu(\omega)=1+\int_0^\infty \chi_m(\tau)\exp(i\,\omega\tau)\,\mathrm{d}\tau \quad . \tag{8.6}$$

Z tohoto vyjádření máme hned

$$\varepsilon(-\omega)=\varepsilon^*(\omega) \quad , \quad \mu(-\omega)=\mu^*(\omega) \tag{8.7}$$

a

$$\lim_{\omega\to\infty}\varepsilon(\omega)=1 \quad , \quad \lim_{\omega\to\infty}\mu(\omega)=1 \quad . \tag{8.8}$$

Komplexní veličiny $\varepsilon(\omega)$ a $\mu(\omega)$ je zvykem značit pomocí reálných a imaginárních částí jako

$$\varepsilon(\omega)=\varepsilon'(\omega)+i\,\varepsilon''(\omega) \quad , \quad \mu(\omega)=\mu'(\omega)+i\,\mu''(\omega) \quad . \tag{8.9}$$

Pro dielektrika nabývá $\varepsilon(\omega)$ při $\omega\to 0$ konečnou hodnotu statické relativní permitivity. Pro kovy je chování zajímavější. Z porovnání dvou tvarů $\left(\nabla\times\vec{H}\right)(\omega\to 0)$ dostáváme

$$-i\,\omega\,\varepsilon(\omega\to 0)\vec{E}(\omega\to 0)\to\sigma\vec{E}(\omega\to 0) \quad \Rightarrow \quad \varepsilon(\omega\to 0)\to\frac{i\,\sigma}{\omega} \quad . \tag{8.10}$$

S využitím vztahů (8.5) můžeme Maxwellovy rovnice (8.2) přepsat na

$$\begin{aligned}&\vec{\nabla}\cdot\vec{B}(\omega)=0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{B}(\omega)=-i\,\omega\frac{n^2(\omega)}{c^2}\vec{E}(\omega) \quad ,\\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{E}(\omega)=0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E}(\omega)=i\,\omega\vec{B}(\omega) \quad ,\end{aligned} \tag{8.11}$$

kde

$$\varepsilon_0\,\mu_0=\frac{1}{c^2} \quad , \quad \varepsilon(\omega)\mu(\omega)=n^2(\omega) \quad . \tag{8.12}$$

Vhodnou volbou kalibrace potenciálů je $\phi(\omega)=0$, $\vec{\nabla}\cdot\vec{A}(\omega)=0$, takže

$$\vec{E}(\omega)=i\,\omega\,\vec{A}(\omega) \quad , \quad \vec{B}(\omega)=\vec{\nabla}\times\vec{A}(\omega) \tag{8.13}$$

a pro vektorový potenciál máme Helmholtzovu rovnici

$$\Delta\,\vec{A}(\omega)+\frac{\omega^2\,n^2(\omega)}{c^2}\,\vec{A}(\omega)=0 \quad . \tag{8.14}$$

8.2 Disipace energie

Vezměme nyní výraz (1.9)

$$-\vec{\nabla}\cdot\vec{S}=\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} \quad . \tag{8.15}$$

Uvažujme monochromatickou elektromagnetickou vlnu. Poněvadž pravá strana (8.15) obsahuje kvadratické výrazy, musíme pracovat s reálnými reprezentacemi pole, tj. dosazovat

$$\begin{aligned}\vec{E}&=\frac{1}{2}\left[\vec{E}(\omega)\exp(-i\,\omega\,t)+\vec{E}^*(\omega)\exp(i\,\omega\,t)\right] \quad ,\\ \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}&=\frac{i\,\omega\,\varepsilon_0}{2}\left[-\varepsilon(\omega)\,\vec{E}(\omega)\exp(-i\,\omega\,t)+\varepsilon^*(\omega)\,\vec{E}^*(\omega)\exp(i\,\omega\,t)\right]\end{aligned} \tag{8.16}$$

a

$$\begin{aligned}\vec{H}&=\frac{1}{2}\left[\vec{H}(\omega)\exp(-i\,\omega\,t)+\vec{H}^*(\omega)\exp(i\,\omega\,t)\right] \quad ,\\ \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}&=\frac{i\,\omega\,\mu_0}{2}\left[-\mu(\omega)\,\vec{H}(\omega)\exp(-i\,\omega\,t)+\mu^*(\omega)\,\vec{H}^*(\omega)\exp(i\,\omega\,t)\right] \quad .\end{aligned} \tag{8.17}$$

Pro časovou střední hodnotu Poyntingova vektoru

$$\overline{\vec{S}(\omega)}=\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\vec{S}(\omega,t)\,\mathrm{d}t \tag{8.18}$$

dostáváme ze vztahu (8.15) dosazením z (8.16) a (8.17)

$$-\vec{\nabla}\cdot\overline{\vec{S}(\omega)}=\frac{\omega}{2}\left[\varepsilon_0\,\varepsilon''(\omega)\left|\vec{E}(\omega)\right|^2+\mu_0\,\mu''(\omega)\left|\vec{H}(\omega)\right|^2\right] \quad . \tag{8.19}$$

Energie přidávaná do jednotky objemu prostředí přicházející elektromagnetickou vlnou je proměňována na teplo. Podle druhé věty termodynamické musí být toto teplo při disipaci energie vytvářeno, musí tedy být

$$\omega\,\varepsilon''(\omega)>0 \quad , \quad \omega\,\mu''(\omega)>0 \quad . \tag{8.20}$$

8.3 Fázová a grupová rychlost

Uvažujme šíření vlny ve směru osy z. Předpokládejme, že prostředí má jen slabou dispersi, tedy kvadrát indexu lomu bude součinem reálných částí permitivity a permeability (čárky vynecháváme) a vlnu napíšeme jako

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} a(\omega - \omega_0) \exp\left[i \left(\frac{\omega n(\omega)}{c} z - \omega t \right) \right] \mathrm{d}\omega \quad . \tag{8.21}$$

Amplitudová funkce je soustředěna kolem centrální frekvence ω_0, takže podstatnou roli bude hrát jen malá „grupa" vln s blízkými frekvencemi. Provedeme rozvoj fáze kolem centrální frekvence

$$\frac{\omega n(\omega)}{c} z - \omega t = \frac{\omega_0 \, n(\omega_0)}{c} z - \omega_0 \, t + \left\{ \frac{z}{c} \left. \frac{\mathrm{d}\left[\omega n(\omega)\right]}{\mathrm{d}\omega} \right|_{\omega=\omega_0} - t \right\} (\omega - \omega_0) + \ldots$$

Vlnu (8.21) aproximujeme výrazem

$$A = \exp\left[i \, \omega_0 \left(\frac{z}{v_f} - t \right) \right] \int_{-\infty}^{\infty} a(\xi) \exp\left[i \, \xi \left(\frac{z}{v_g} - t \right) \right] \mathrm{d}\xi \quad , \tag{8.22}$$

kde jsme označili fázovou rychlost

$$v_f = \frac{c}{n(\omega_0)} \tag{8.23}$$

a grupovou rychlost

$$v_g = \frac{c}{\left. \dfrac{\mathrm{d}\left[\omega n(\omega)\right]}{\mathrm{d}\omega} \right|_{\omega=\omega_0}} \quad . \tag{8.24}$$

Pokud je index lomu menší než jedna, může nabývat fázová rychlost hodnot vyšších jak rychlost světla ve vakuu. Fázová rychlost je však jen abstraktní veličina. Zato grupová rychlost vystupuje například jako rychlost přenosu energie, měla by tedy podle Einsteinovy teorie být vždy menší než c. Proto musí být splněna podmínka (index 0 u frekvencí už vynecháváme)

$$\frac{\mathrm{d}\left[\omega n(\omega)\right]}{\mathrm{d}\omega} > 1 \quad . \tag{8.25}$$

Není triviální to ukázat, ale podmínka skutečně splněna je.

9. Rovnice elektromagnetického pole ve čtyřrozměrném zápisu

9.1 Čtyřrozměrný vektor proudu, rovnice kontinuity

Hustotu náboje píšeme jako

$$\mathrm{d}Q = \rho\,\mathrm{d}V \quad , \quad \rho = \sum_a e_a\,\delta^{(3)}\left(\vec{r} - \vec{r}_a\right) \quad . \tag{9.1}$$

Ze vztahu

$$\mathrm{d}Q\,\mathrm{d}x^i = \rho\,\mathrm{d}V\,\mathrm{d}x^i = \rho\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t = \frac{1}{c}\rho\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}\Omega \tag{9.2}$$

porovnáním geometrických vlastností (dva skaláry $\mathrm{d}Q$ – element náboje a $\mathrm{d}\Omega$ – element čtyřobjemu a jeden čtyřvektor $\mathrm{d}x^i$) vyplývá, že musíme definovat další čtyřvektor (proudu)

$$j^i = \rho\frac{\mathrm{d}x^i}{\mathrm{d}t} = \left(c\,\rho, \rho\vec{v}\right) = \left(c\,\rho, \vec{j}\right) \quad . \tag{9.3}$$

Ve výrazu pro účinek můžeme pak psát při přechodu ke spojitému rozdělení náboje

$$e\int A_i\,\mathrm{d}x^i = \int \rho\,A_i\,\mathrm{d}x^i\,\mathrm{d}V = \frac{1}{c}\int A_i\,j^i\,\mathrm{d}\Omega \quad . \tag{9.4}$$

Náboj, který ubude v nějakém objemu, můžeme zapsat dvojím způsobem

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int \rho\,\mathrm{d}V = \oint \vec{j}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S \quad . \tag{9.5}$$

S pomocí Gaussovy věty pak z (9.5) plyne

$$\int\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t}\right)\mathrm{d}V = 0 \quad , \tag{9.6}$$

tedy (objem je libovolný) rovnice kontinuity

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{j} + \frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad . \tag{9.7}$$

Zákon zachování náboje (rovnice kontinuity) zaručuje, že při kalibrační transformací se účinek změní pouze o divergenci

$$\frac{\partial j^i}{\partial x^i} = 0 \quad \Rightarrow \quad \int A_i\,j^i\,\mathrm{d}\Omega \quad \to \quad \int\left(A_i + \frac{\partial\chi}{\partial x^i}\right)j^i\,\mathrm{d}\Omega = \int A_i\,j^i\,\mathrm{d}\Omega + \int\frac{\partial\left(\chi\,j^i\right)}{\partial x^i}\mathrm{d}\Omega \quad . \tag{9.8}$$

9.2 Náboj v elektromagnetickém poli

Účinek pro nabitou částici v elektromagnetickém poli, který je invariantní a má „minimální interakci“, můžeme zvolit jako

$$S = -m\,c\int_a^b ds - e\int_a^b A_i\,dx^i \quad , \quad A^i = \left(\frac{\phi}{c}, \vec{A}\right) \quad . \tag{9.9}$$

Lagrangeova funkce a zobecněná hybnost jsou

$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + e\vec{A}\cdot\vec{v} - e\,\phi \quad , \quad \vec{P} = \frac{\partial L}{\partial \vec{v}} = \frac{m\vec{v}}{\sqrt{1-\beta^2}} + e\vec{A} = \vec{p} + e\vec{A} \quad . \tag{9.10}$$

Je pak[10]

$$\begin{gathered} \frac{\partial L}{\partial \vec{r}} = e\vec{\nabla}\left(\vec{A}\cdot\vec{v}\right) - e\vec{\nabla}\phi = e\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} + e\vec{v}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{A}\right) - e\vec{\nabla}\phi \quad , \\ \frac{d}{dt}\left(\vec{p}+e\vec{A}\right) = \frac{d\vec{p}}{dt} + e\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} + e\left(\vec{v}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{A} \quad . \end{gathered} \tag{9.11}$$

Lagrangeova rovnice je tedy

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = e\left(\vec{E} + \vec{v}\times\vec{B}\right) \quad , \tag{9.12}$$

kde jsme označili

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{\partial\vec{A}}{\partial t} \quad , \quad \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \quad . \tag{9.13}$$

Ve čtyřrozměrné notaci

$$\begin{gathered} \delta S = \delta\left(-mc\int_a^b \mathrm{d}s - e\int_a^b A_i\,\mathrm{d}x^i\right) = \\ \int_a^b\left(mc\,\delta x^i\,\mathrm{d}u_i + e\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^i\,\mathrm{d}x^k - e\frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k\,\mathrm{d}x^i\right) - \left(mcu_i + eA_i\right)\delta x^i\Big|_a^b \quad . \end{gathered} \tag{9.14}$$

Použili jsme při odvození integraci per partes a vztahy

$$\delta\mathrm{d}s = u_i\,\mathrm{d}\delta x^i \quad , \quad \delta A_i = \frac{\partial A_i}{\partial x^k}\delta x^k \quad . \tag{9.15}$$

Obvyklým postupem dostáváme výraz pro zobecněnou hybnost

$$P^i = mcu^i + eA^i \tag{9.16}$$

a pohybovou rovnici

$$mc\frac{du_i}{ds} = eF_{ik}u^k \quad , \quad F_{ik} = \frac{\partial A_k}{\partial x^i} - \frac{\partial A_i}{\partial x^k} \quad . \tag{9.17}$$

9.3 Tenzor elektromagnetického pole

Ve vztahu (9.17) jsme zavedli tenzor elektromagnetického pole

---

[10] Při úpravě použijeme identitu známou z vektorové analýzy $\vec{\nabla}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right) = \left(\vec{a}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{b} + \left(\vec{b}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{a} + \vec{b}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{a}\right) + \vec{a}\times\left(\vec{\nabla}\times\vec{b}\right)$.

$$F_{ik}=\begin{pmatrix} 0 & E_x/c & E_y/c & E_z/c \\ -E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ -E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ -E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} \quad , \quad F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & -E_x/c & -E_y/c & -E_z/c \\ E_x/c & 0 & -B_z & B_y \\ E_y/c & B_z & 0 & -B_x \\ E_z/c & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix} . \qquad (9.18)$$

PŚi LorentzovĎ transformaci se tenzor elektromagnetického pole transformuje podle vztahu

$$F^{ik}=\Lambda^i_m\,\Lambda^k_n\,F'^{mn} \quad . \qquad (9.19)$$

Oznaļíme-li $\gamma=1\big/\sqrt{1-\beta^2}$, dostáváme pŚi transformaci

$$x^0=\gamma\left(x'^0+\beta\,x'^1\right) \quad , \quad x^1=\gamma\left(x'^1+\beta\,x'^0\right) \quad , \quad x^2=x'^2 \quad , \quad x^3=x'^3 \quad , \qquad (9.20)$$

neboli v maticovém zápisu

$$x^i=\Lambda^i_k\,x'^k \quad , \quad \Lambda^i_k=\begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma & 0 & 0 \\ \beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (9.21)$$

transformaļní vztah pro tensor pole

$$F^{ik}=\begin{pmatrix} 0 & F'^{01} & \gamma\left(F'^{02}+\beta F'^{12}\right) & \gamma\left(F'^{03}+\beta F'^{13}\right) \\ F'^{10} & 0 & \gamma\left(F'^{12}+\beta F'^{02}\right) & \gamma\left(F'^{13}+\beta F'^{03}\right) \\ \gamma\left(F'^{20}+\beta F'^{21}\right) & \gamma\left(F'^{21}+\beta F'^{20}\right) & 0 & F'^{23} \\ \gamma\left(F'^{30}+\beta F'^{31}\right) & \gamma\left(F'^{31}+\beta F'^{30}\right) & F'^{32} & 0 \end{pmatrix} . \qquad (9.22)$$

PŚevedeno do vektorŢ intenzity a indukce

$$\begin{aligned} &E_x=E'_x \quad , \quad E_y=\gamma\left(E'_y+V\,B'_z\right) \quad , \quad E_z=\gamma\left(E'_z-V\,B'_y\right) \quad , \\ &B_x=B'_x \quad , \quad B_y=\gamma\left(B'_y-\frac{V}{c^2}E'_z\right) \quad , \quad B_z=\gamma\left(B'_z+\frac{V}{c^2}E'_y\right) \quad . \end{aligned} \qquad (9.23)$$

V nerelativistickém pŚiblíģení ($V/c\to 0$) pŚechází (9.23) na

$$\vec{E}\doteq\vec{E}'-\vec{V}\times\vec{B}' \quad , \quad \vec{B}\doteq\vec{B}' \quad . \qquad (9.24)$$

Invarianty pole mŢģeme zkonstruovat z tenzoru pole. PonĎvadģ je antisymetrický, zúģení nedává nic a máme aģ kvadratické výrazy

$$g^{im}\,g^{kn}\,F_{ik}\,F_{mn}=F_{ik}\,F^{ik}=\mathrm{inv} \quad , \quad \varepsilon^{ikmn}\,F_{ik}\,F_{mn}=F_{ik}\,{}^*F^{ik}=\mathrm{inv} \quad . \qquad (9.25)$$

Duální tenzor vyjádŚený pomocí intenzity elektrického pole a indukce magnetického pole má tvar

$$
{}^{*}F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & -B_x & -B_y & -B_z \\ B_x & 0 & -E_z/c & E_y/c \\ B_y & E_z/c & 0 & -E_x/c \\ B_z & -E_y/c & E_x/c & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{9.26}
$$

Invarianty mají pak vyjádření

$$
F_{ik}\,F^{ik} = -2\left(\frac{\vec{E}^2}{c^2} - \vec{B}^2\right) \quad , \quad F_{ik}\,{}^{*}F^{ik} = 4\,\frac{\vec{E}\cdot\vec{B}}{c} \quad . \tag{9.27}
$$

9.4 První pár Maxwellových rovnic

Z vyjádření tensoru elektromagnetického pole pomocí potenciálu snadno odvodíme platnost vztahu

$$
\frac{\partial F_{ik}}{\partial x^l} + \frac{\partial F_{kl}}{\partial x^i} + \frac{\partial F_{li}}{\partial x^k} = 0 \quad . \tag{9.28}
$$

Na levé straně je úplně antisymetrický tensor třetího řádu, představuje pouze čtyři různé rovnice. Zřetelněji je to vidět, užijeme-li zápis pomocí duálního (pseudo)vektoru

$$
\varepsilon^{iklm}\,\frac{\partial F_{lm}}{\partial x^k} = \frac{\partial\,{}^{*}F^{ik}}{\partial x^k} = 0 \quad . \tag{9.29}
$$

Nultá komponenta dává tvrzení o nezřídlovém charakteru magnetického pole, další tři komponenty Faradayův indukční zákon

$$
\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \quad . \tag{9.30}
$$

9.5 Druhý pár Maxwellových rovnic

Druhý pár Maxwellových rovnic odvodíme z variačního principu. Za Lagrangeovu funkci elektromagnetického pole zvolíme přirozeně známý invariant s vhodnou konstantou

$$
\begin{aligned}
S &= -\frac{1}{c}\int\left(A_i\,j^i + \frac{1}{4\,\mu_0}F_{ik}\,F^{ik}\right)\mathrm{d}\Omega \\
&= \int\left(\frac{\varepsilon_0}{2}\vec{E}^2 - \rho\phi - \frac{1}{2\,\mu_0}\vec{B}^2 + \vec{j}\cdot\vec{A}\right)\mathrm{d}V\,\mathrm{d}t \quad .
\end{aligned} \tag{9.31}
$$

S uvážením $F^{ik}\,\delta F_{ik} = F_{ik}\,\delta F^{ik}$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
\delta S = -\frac{1}{c}\int\left(j^i\,\delta A_i + \frac{1}{2\,\mu_0}F^{ik}\,\delta F_{ik}\right)\mathrm{d}\Omega = \\
-\frac{1}{c}\int\left(j^i\,\delta A_i + \frac{1}{2\,\mu_0}F^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\delta A_k - \frac{1}{2\,\mu_0}F^{ik}\,\frac{\partial}{\partial x^k}\delta A_i\right)\mathrm{d}\Omega \quad .
\end{aligned} \tag{9.32}
$$

Po integraci per partes ve (9.32)

$$\delta S=-\frac{1}{c\,\mu_0}\int\left(\mu_0\, j^i+\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}\right)\delta A_i\,\mathrm{d}\Omega-\frac{1}{c\,\mu_0}\int F^{ik}\,\delta A_i\,\mathrm{d}S_k \quad . \tag{9.33}$$

Druhý pár Maxwellových rovnic je tedy

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=-\mu_0\, j^i \quad . \tag{9.34}$$

Nultá komponenta je rovnice pro divergenci indukce elektrického pole (zobecnění Gaussovy věty elektrostatiky), zbývající tři pro rotaci intenzity magnetického pole (Ampérův zákon doplněný Maxwellovým posuvným proudem)

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{D}=\rho \quad , \quad \vec{\nabla}\times\vec{H}=\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}+\vec{j} \quad . \tag{9.35}$$

9.6 Tensor energie – hybnosti

Tensor energie – hybnosti dostaneme z teorému Noetherové při transformaci, odpovídající translaci souřadnic

$$X^i_j=\delta^i_j \quad , \quad Q^A_j=0 \quad , \quad \overline{T}^i_j(x)=q^A{}_{,j}\,\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,i}}-L\,\delta^i_j \quad . \tag{9.36}$$

Tady je index j vlastně indexem „náhodně“ tensorovým. Takto získaný tensor energie – hybnosti T^{ik} není obecně symetrický. Pro Lagrangeovu funkci elektromagnetického pole je

$$\frac{\partial L}{\partial q^A{}_{,i}}=\frac{\partial L}{\partial A_{j,i}}=-\frac{1}{\mu_0}F^{ij} \tag{9.37}$$

a tensor energie – hybnosti vychází nesymetrický

$$\overline{T}^{ik}=-\frac{1}{\mu_0}\left(g^{ij}\,g_{lm}\,\frac{\partial A^l}{\partial x^j}F^{km}-\frac{1}{4}g^{ik}\,F_{lm}\,F^{lm}\right) \quad . \tag{9.38}$$

K výrazu pro $\overline{T}^{ik}$ můžeme ovšem přidat člen, zaručující symetrii, který přitom neovlivní celkovou hybnost

$$\overline{T}^{ik} \quad\rightarrow\quad T^{ik}=\overline{T}^{ik}+\frac{\partial\tau^{ikl}}{\partial x^l} \quad , \quad \tau^{ikl}=-\tau^{ilk} \quad . \tag{9.39}$$

Požadavek symetrie se objevuje proto, aby byl splněn i zákon zachování momentu hybnosti, definovaného vztahem $M^{ikl}=x^i\,T^{kl}-x^k\,T^{il}$, tedy

$$\frac{\partial M^{ikl}}{\partial x^l}=0 \quad\Leftrightarrow\quad T^{ik}=T^{ki} \quad . \tag{9.40}$$

Pro elektromagnetické pole tensor τ^{ikl} snadno najdeme jako

$$\tau^{ikl}=\frac{1}{\mu_0}A^i\,F^{kl} \quad , \tag{9.41}$$

takže výsledný tensor energie a hybnosti bude

$$T^{ik}=\frac{1}{\mu_0}\left(-g_{lm}\,F^{il}\,F^{km}+\frac{1}{4}g^{ik}\,F_{lm}\,F^{lm}\right)\quad . \tag{9.42}$$

Zapsáno pomocí čtyřrozměrných veličin

$$T^{ik}=\begin{pmatrix} W & \frac{1}{c}S_\beta \\ \frac{1}{c}S_\alpha & -\sigma_{\alpha\beta}\end{pmatrix}\quad , \tag{9.43}$$

kde

$$W=\frac{1}{2}\left(\varepsilon_0\,\vec{E}^2+\frac{1}{\mu_0}\vec{B}^2\right)\quad ,\quad \vec{S}=\frac{1}{\mu_0}\vec{E}\times\vec{B} \tag{9.44}$$

jsou hustota energie a Poyntingův vektor a

$$\sigma_{\alpha\beta}=\varepsilon_0\,E_\alpha\,E_\beta+\frac{1}{\mu_0}B_\alpha\,B_\beta-W\,\delta_{\alpha\beta} \tag{9.45}$$

je Maxwellův tensor napětí.

9.7 Vlnová rovnice a rovinné vlny

Vezmeme druhý pár Maxwellových rovnic (ve vakuu) a dosadíme vyjádření pole pomocí potenciálů

$$\frac{\partial F^{ik}}{\partial x^k}=0\quad ,\quad F^{ik}=g^{ij}\,g^{kl}\left(\frac{\partial A_l}{\partial x^j}-\frac{\partial A_j}{\partial x^l}\right)\quad ,$$
$$g^{ij}\,\frac{\partial^2 A^k}{\partial x^j\,\partial x^k}-g^{kl}\,\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\,\partial x^l}=0\quad . \tag{9.46}$$

Lorentzova kalibrační podmínka zjednoduší (9.46) na vlnovou rovnici

$$\frac{\partial A^k}{\partial x^k}=0\quad ,\quad -g^{kl}\,\frac{\partial^2 A^i}{\partial x^k\,\partial x^l}=0\quad . \tag{9.47}$$

Pomocí d'Alembertova operátoru

$$\Box=\Delta-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \tag{9.48}$$

máme pak ve čtyřrozměrném zápisu

$$\frac{\partial\phi}{\partial t}+\vec{\nabla}\cdot\vec{A}=0\quad ,\quad \Box\phi=0\quad ,\quad \Box\vec{A}=0\quad . \tag{9.49}$$

Hledáme-li řešení ve tvaru rovinné vlny, jde vlastně o konstantní čtyřvektor násobený komplexní jednotkou. Je pak

$$A^i = \mathrm{Re}\left\{a^i \exp\left(i\,k_j\,x^j\right)\right\} \quad , \quad k_i\,k^i = 0 \quad , \quad k_i\,a^i = 0 \quad . \tag{9.50}$$

Poslední vztah ve (9.50) je dán Lorentzovou kalibrační podmínkou. Čtyřvektor hybnosti zapisujeme jako

$$k^i = \left(\frac{\omega}{c}, \vec{k}\right) \quad , \quad \vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n} \quad , \quad \vec{n}^2 = 1 \quad . \tag{9.51}$$

Velmi jednoduše popíšeme pomocí charakteristik rovinné monochromatické vlny Dopplerův jev. Mějme zdroj světla, který je v klidu v soustavě $K_{(0)}$. Soustava $K_{(0)}$ se pohybuje vzhledem k laboratorní soustavě K rychlostí V. Ať je úhel mezi směrem pohybu zdroje a směrem šíření světla α. Potom platí

$$\begin{gathered}
k^0_{(0)} = \frac{k^0 - \beta\,k^1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad k^0_{(0)} = \frac{\omega_{(0)}}{c} \quad , \quad k^0 = \frac{\omega}{c} \quad , \\
k^1_{(0)} = \frac{k^1 - \beta\,k^0}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad , \quad k^1_{(0)} = \frac{\omega_{(0)}}{c}\cos\alpha_{(0)} \quad , \quad k^1 = \frac{\omega}{c}\cos\alpha
\end{gathered} \tag{9.52}$$

a odtud

$$\omega = \omega_{(0)}\,\frac{\sqrt{1-\beta^2}}{1-\beta\cos\alpha} \quad . \tag{9.53}$$

Pro rychlosti malé ve srovnání s rychlostí světla máme

$$\omega \approx \omega_{(0)}\left(1 + \frac{V}{c}\cos\alpha + \frac{1}{2}\frac{V^2}{c^2}\cos 2\,\alpha\right) \quad . \tag{9.54}$$

Tensor energie a hybnosti je

$$T^{ik} = \frac{c^2}{\omega^2} W\,k^i\,k^k \quad , \quad W = \frac{1}{2\,\mu_0}\left[a^i\,a_i^* + \mathrm{Re}\left\{a^i\,a_i \exp\left(2\,i\,k_j\,x^j\right)\right\}\right] \quad . \tag{9.55}$$

Ve střední hodnotě podle času je druhý člen ve výrazu pro hustotu energie roven nule. Oba invarianty (9.27) jsou rovny nule. Se speciální volbou kalibrace (spojené ovšem s jednou určitou inerciální souřadnou soustavou) máme

$$\begin{aligned}
A^i = \left(0, \vec{A}\right) \quad , \quad \vec{A} &= a_y \cos\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right)\vec{e}_y + a_z \sin\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right)\vec{e}_z \quad , \\
\vec{E} &= \omega\,a_y \sin\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right)\vec{e}_y - \omega\,a_z \cos\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right)\vec{e}_z \quad , \\
\vec{B} &= k\,a_z \cos\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right)\vec{e}_y + k\,a_y \sin\left(\omega\,t - k\,x + \alpha\right)\vec{e}_z \quad .
\end{aligned} \tag{9.56}$$

Eliptická polarizace takové vlny je vidět ze vztahu

$$\frac{E_y^2}{\omega^2\,a_y^2} + \frac{E_z^2}{\omega^2\,a_z^2} = 1 \quad , \quad \frac{B_y^2}{k^2\,a_z^2} + \frac{B_z^2}{k^2\,a_y^2} = 1 \quad . \tag{9.57}$$