

# Kinematika a Hydrodynamika

J. Klusoň

# 1 Základní principy

Hydrodynamika je teorií dynamiky tekutin. Tekutina je společný název pro následující fáze látky:

- Kapaliny
- Plyny

Další forma látky, *Plazma* se obecně odlišuje od neutrálních tekutin. Ukazuje se, že hydrodynamika je vhodnou makroskopickou teorií pouze v případě slabě magnetizovaného plazmatu. Pro makroskopický popis magnetizovaného plazmatu existuje vlastní teorie známá jako *magnetohydrodynamika*. Je také důležité poznamenat, že mikroskopické teorie neutrálních tekutin a plazmatu jsou velmi rozdílné, což vyplývá ze skutečnosti, že nabitě částice interagují pomocí dalekodosahových sil, zatím co v případě hydrodynamiky uvažujeme pouze kratkodosahové síly.

Mechanika tekutin se zabývá popisem dynamiky kapalin a plynů. Protože z definice mechanika tekutin poskytuje makroskopický popis, uvažujeme tekutinu jako spojité médium. Jinými slovy řečeno, mechanika tekutin může a má být definována bez ohledu na potenciální mikroskopickou strukturu látky. Na druhou stranu je užitečné vyjít z představy o mikroskopické struktuře látky, kdy předpokládáme, že libovolně malý element tekutiny je dostatečně velký, že obsahoval statisticky významný počet molekul. Jinými slovy řečeno, musíme hovořit o fyzikálním infinitizemálně malém objemu, který je malý vzhledem k charakteristickým rozměrům tělesa, ale dostatečně velký vzhledem k charakteristickým vzdálenostem mezi molekulami. Pojmy jako *částice kapaliny* a *bod v kapalině* by měly být chápány podobným způsobem. Například, když hovoříme o posunutí částice kapaliny, nemyslíme samozřejmě posun jedné individuální molekuly, ale to, že objemový element, který v hydrodynamickém popisu obsahuje mnoho molekul, by měl být uvažován jako bod.

Tyto pojmy jsou intuitivně jasné, protože kapaliny, jako například voda, či plyny, jako například vzduch, můžeme za normálních podmínek skutečně uvažovat jako kontinuum. Problém ovšem nastává v situacích, kdy máme velice řídký plyn, jako jsou například sluneční vítr či mezigalaktická hmota, která obsahuje několik částic na krychlový centimetr. Poté se můžeme ptát, jaké jsou nutné předpoklady pro platnost hypotézy kontinua? Ukazuje se,

že pro pochopení této myšlenky bychom měli být schopni odvodit rovnice hydrodynamiky z obecnější a fundamentálnější teorie.

## 1.1 Dynamické teorie

Jak již bylo řečeno, našim cílem je formulovat hydrodynamiku jako teorii dynamiky tekutin, kde **Dynamickou teorií** myslíme teorii, která popisuje časový vývoj systému. Příkladem takových dynamických teorií je například klasická mechanika, klasická elektrodynamika, či kvantová mechanika. Pro každou z těchto dynamických teorií je základní předpoklad nějakým způsobem charakterizovat **Stav systému**.

- Klasická dynamika: stav systému  $N$  částic je popsán jejich zobecněnými souřadnicemi  $q_i, i = 1, \dots, N$  a sdruženými impulsy.
- Klasická elektrodynamika: elektrické a magnetické pole  $\rightarrow E(\mathbf{x}), \rightarrow B(\mathbf{x})$ , kde  $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)$  a kde  $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3), \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ .
- Kvantová fyzika: Stav systému je popsán s pomocí vlnové funkce  $\psi(\mathbf{x})$ .

Dynamické teorie umožňují sledovat časový vývoj daného systému pomocí rovnic, které určují, jak se dané proměnné vyvíjejí v čase. Jinými slovy, jakmile známe stav systému v počátečním čase, jsme schopni s pomocí těchto rovnic určit stav systému v nějakém pozdějším čase. Tyto rovnice mají různou formu pro různé dynamické teorie:

- Klasická mechanika: Hamiltonovy či Lagrangeovy či Newtonovy pohybové rovnice
- Klasická elektrodynamika: Maxwellovy rovnice
- Kvantová mechanika: Schrödingerova rovnice

Tedy, naši otázkou je, jaké jsou vhodné proměnné, které charakterizují mechaniku tekutin a jaký je jejich časový vývoj. Ukazuje se, že odpověď na tuto otázku závisí na hloubce studia problému.

Ukážeme problematiku úrovní různých popisů na příkladu systému  $N$  kvantových částic, kde  $\log N \gg 1$ . Fundamentální popis, označme jej jako **Úroveň 0**, je dán pomocí kvantové mechaniky, kdy stav daného systému je

charakterizován vlnovou funkcí  $\psi(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$ , kde časový vývoj této vlnové funkce je dán Schrödingerovou rovnicí

$$i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} = \hat{H}\psi, \quad \hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial \mathbf{x}_i^2} + V(\{\mathbf{x}\}). \quad (1)$$

Druhá úroveň, označíme ji jako **Úroveň 1** je dán pomocí  $N$  klasických částic. Stav je popsán pomocí zobecněných souřadnic  $q_s$  a impulzů  $p^s$ , jejichž časový vývoj je dán Hamiltonovými rovnicemi.

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p^s}, \quad \dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s},$$

$$H(\{q_s, p^s\}, t) = \sum_s \dot{q}_s p^s - L, \quad L(\{q_s, \dot{q}_s, t\}, t) = T - V, \quad p^s = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}. \quad (2)$$

Kinetický popis částic je další úrovní popisu, kterou označíme jako **Úroveň 2**. V tomto případě je stav systému popsán pomocí rozdělovací funkce  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , která splňuje Boltzmannovu rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \dot{\mathbf{x}} \cdot \nabla f + \dot{\mathbf{v}} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C(f), \quad \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}, \quad \dot{\mathbf{v}} = \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)}{m}. \quad (3)$$

Od třetí úrovně již zbývá pouze poslední krok k popisu dané látky jako spojitého prostředí, což je mechanika kontinua. Označíme tuto úroveň jako **Úroveň 3**. Stav tohoto systému je popsán pomocí polí  $\rho(\mathbf{x}), T(\mathbf{x}), \mathbf{v}(\mathbf{x})$  a jejich dynamika je dána hydrodynamickými rovnicemi.

Pro plné pochopení hydrodynamiky je dobré nastínit, jakým způsobem přecházíme mezi různými úrovněmi.

## 1.2 Úroveň 0 $\rightarrow$ Úroveň 1

Je možné nahradit kvantový popis klasickým v případě, kdy hustota částic je dostatečně nízká tak, že kvantové interference jsou zanedbatelné. Uvažujme de Brogliho vlnovou délku

$$\lambda = \frac{h}{p}, \quad (4)$$

Na druhou stranu typická hybnost částice o hmotnosti  $m$  a při teplotě  $T$  je dána

$$E \sim k_B T \sim \frac{p^2}{m} \Rightarrow p \sim \sqrt{mk_B T}. \quad (5)$$

Na druhou stranu předpokládejme, že máme hustotu částic  $n$  definovanou jako  $n = N/V$ , kde  $V$  je objem, v kterém se dané částice nacházejí. Poté je jasné, že veličina, která charakterizuje vzdálenost částic, je  $\sim n^{-1/3}$  (Rozměr  $n$  je  $[m^{-3}]$ .) Tedy pokud platí

$$\lambda \ll n^{-1/3} \Rightarrow 1 \gg \frac{hn^{1/3}}{\sqrt{mk_B T}} \quad (6)$$

můžeme zanedbat kvantovou interferenci různých částic. Je jasné, že tato podmínka je splněna pro zředěné plyny. Otázka je, zda-li také platí pro hustější plyny. Pro vzduch při pokojové teplotě  $T = 273 \text{ K}$  a standardním tlaku je pravá strana nerovnosti rovna 0.015. Dá se ukázat, že pro vodu při teplotě  $T = 293 \text{ K}$  toto platí přibližně také.

Jestliže je tato podmínka splněna, pak vlnová klubka částic se šíří podle Schrödingerovy rovnice pro volnou částici

$$i\hbar \frac{\partial \psi_i(\mathbf{x}_i, t)}{\partial t} = \hat{H}_i \psi_i, \quad \hat{H}_i = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla_i^2 + V(\mathbf{x}_i). \quad (7)$$

Poté střední hodnoty  $\langle \hat{\mathbf{x}}_i \rangle(t)$  a  $\langle \hat{\mathbf{p}}_i \rangle(t)$  mají časový vývoj, který je určený klasickými pohybovými rovnicemi, což je známý Ehrenfestův teorém.

### 1.3 Od Úrovně 1 k Úrovní 2

Na úrovni 1 je stav systému  $N$  klasických částic popsán jejich souřadnicemi  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$  a rychlostmi  $(\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ . Jejich dynamika je určena Newtonovými pohybovými rovnicemi.

Fázový prostor  $\Gamma$  je  $6N$  dimensionální se souřadnicemi  $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_N)$ . Každý bod v prostoru  $\Gamma$  odpovídá rozdílnému stavu systému a zřejmě časový vývoj systému odpovídá křivce ve fázovém prostoru  $\Gamma$ . Pro velmi velké  $N$  je nemožné prakticky řešit  $6N$  pohybových rovnic, které jsou diferenciálními rovnicemi prvního řádu. Pro tyto systémy je právě vhodný statistický popis odpovídající úrovni 2. Na této úrovni zavedeme distribuční funkci  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , která udává hustotu částic v šesti dimensionálním  $\mu$ - prostoru  $(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ . Jedná se tedy o jedno-částicovou distribuční funkci, obecnější případ bude diskutován níže. Poté jediný bod v  $\Gamma$  prostoru je zobrazen do  $N$  bodů v  $\mu$  prostoru, kde každé částici odpovídá jeden bod odpovídající její souřadnici a rychlosti. Jinými slovy převedli jsme problém popisu časového vývoje  $N$  bodů na problém časového vývoje distribuční funkce, který je dán Boltzmannovou rovnicí.

Obecně hovoříme o  $N$ -částicové rozdělovací funkci.

Dynamika tekutin je popsána klasickou teorií pole, jejíž počátek sahá až do 19 století. Je pozoruhodné, že sdílí mnoho společného s Maxwellovou teorií elektromagnetického pole.

Je užitečné ukázat, proč je studium hydrodynamiky tak zajímavé i z hlediska dnešní moderní fyziky. Je podstatné, že mechanika tekutin může být odvozena z konkrétní mikroskopické teorie pomocí vhodného vystředování. Můžeme například uvažovat Boltzmannovu rovnici pro distribuční funkci  $f(\mathbf{X}, \mathbf{P}, t)$ , která splňuje rovnici

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{m} P_i \frac{\partial f}{\partial X_i} + F_i \frac{\partial f}{\partial P_i} = C(f) , \quad (8)$$

kde  $\mathbf{X} = (X_1, \dots, X_n)$  a  $\mathbf{P} = (P_1, \dots, P_n)$   $i = 1, \dots, d$  jsou fázové souřadnice jedné částice o hmotnosti  $m$  a kde  $F_i$  je vnější síla působící na tuto částici. Dále,  $C(f)$  je srážkový integrál, který vyjadřuje změnu distribuční funkce způsobenou srážkou s ostatními částicemi. Bezsrážkový případ odpovídá situaci, kdy  $C(f) = 0$ . V tomto případě Boltzmannova rovnice je rovnicí pro distribuční funkci částice, která splňuje klasické pohybové rovnice. Ukazuje se, že najít řešení Boltzmannovy rovnice je velmi obtížné. Obecně předpokládáme řešení ve formě  $f = f^{(0)} + f^{(1)} + \dots$  kde  $f^{(0)} = n_p$  je rovnovážná distribuční funkce, jejíž forma závisí na skutečnosti, zda se jedná o bosony či fermiony. Transportní koeficienty a pohybové rovnice kapaliny jsou poté určeny poruchovými opravami.

Je dobré zdůraznit, že tento popis vystihuje podstatu problému, jak získat rovnice hydrodynamiky z fundamentální mikroskopické teorie, na druhou stranu má svá podstatná omezení. První je to, že takto zjednodušená Boltzmannova rovnice určuje pouze distribuční funkci jedné částice a druhé je to, že popis je čistě klasický, nebere do úvahy kvantové jevy.

Co se týká prvního bodu, můžeme uvažovat obecnou  $N$  částicovou Liouvillovu rovnici pro distribuční funkci  $\rho(X_n, P_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$ . Jednočásticová distribuční funkce je poté dána integrálem  $\int d\mu_{N-1} \rho(X_n, P_n)$ , dvoučásticová distribuční funkce je dána integrálem  $\int d\mu_{N-2} \rho(X_n, P_n)$  kde  $d\mu_N$  je objemový element  $N$ -dimensionálního fázového prostoru. Poté Liouvillova rovnice vede k hierarchii tzv. BBGKY (Bogoljubov-Born-Green-Kirkwood-Yvon) hierarchii, která zahrnuje korelační funkce vyšších řádů. Například pro jednočásticovou distribuční funkci dostáváme Boltzmannovu rovnici, kde ale kolizní integrál je určen dvoučásticovou distribuční funkcí. Je jasné, že výsledná teorie je velmi komplikovaná a většinou se omezuje právě na studium jednočásticové

rozdělovací funkce.

Co se týká problematiky fundamentální kvantové formulace hydrodynamiky, ukazuje se, že je opět v principu možné najít takovouto formulaci. Na druhou stranu abychom získali nějaké užitečné informace, je nutné přistoupit k semiklasické aproximaci, což opět vede k formalismu, jenž má limitovanou platnost.

I když předchozí diskuse odvození hydrodynamických rovnic z fundamentálních teorií vede k zjištění, že hydrodynamika by měla mít platná pouze pro klasický popis systémů, které jsou blízko termodynamické rovnováhy. Na druhou stranu hydrodynamické rovnice mohou být odvozeny z obecných principů, což nás vede k zjištění, že tyto rovnice mají širší oblast platnosti, a my ve skutečnosti používáme tyto rovnice v tomto širším smyslu. Toto je známé pod pojmem universalita mechaniky tekutin. Ukazuje se, že dynamika tekutin má své místo v současné moderní fyzice v případě popisu velkého množství jevů. O některých z nich pohovoříme v této přednášce podrobněji.

## 1.4 Od Úrovně 2 k Úrovní 3

Jedno-komponentový plyn v termodynamické rovnováze je plně popsán dvěma termodynamickými proměnnými. Obecně vzato tekutina jako celek není v termodynamické rovnováze jako celek. Na druhou stranu malý element tekutiny v jeho klidové souřadnicové soustavě můžeme chápat jako element v lokální termodynamické rovnováze. Stav elementu tekutiny je dán dvěma termodynamickými veličinami (hustotou  $\rho$  a teplotou  $T$ ) a rychlostí  $\mathbf{v}$ . Poté všechny elementy tekutiny tvoří kontinuum, kde nyní  $\rho(\mathbf{x})$ ,  $T(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  popisují celý systém.

Hydrodynamické rovnice poté určují časový vývoj těchto proměnných. Tyto rovnice mohou být odvozeny z Boltzmanovy rovnice.

## 1.5 Hamiltonovský popis Úrovně 1

Nyní přistoupíme k podrobnějšímu studiu přechodu od Úrovně 1 k Úrovní 2. Abychom toto plně pochopili, musíme stručně shrnout několik základních faktů týkajících se hamiltonovské formulace klasické mechaniky.

Uvažujme dynamický systém popsáný pomocí sdružených souřadnic  $(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$  a Hamiltonovou funkcí  $H(q_s, p^s, t)$ . Pak

$$\dot{p}_s = -\frac{\partial H}{\partial q_s}, \quad \dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p^s}. \quad (9)$$

Abychom uvedli nějaký příklad hamiltonovského systému, můžeme uvažovat konzervativní systém  $N$  stejných částic, kdy hamiltonian má tvar

$$H = T + V = \frac{1}{2m} \sum_s (p^s)^2 + V(q_s) . \quad (10)$$

Pro tuto Hamiltonovu funkci dostáváme z (53)

$$\begin{aligned} \dot{q}_s &= p^s/m \Rightarrow p^s = m\dot{q}_s , \\ \dot{p}_s &= -\frac{\partial H}{\partial q_s} = -\frac{\partial V}{\partial q_s} , \end{aligned} \quad (11)$$

kde první rovnice vyjadřuje známý vztah mezi impulsem dané částice a její rychlostí a kde druhá rovnice není nic jiného než Newtonova pohybová rovnice. Přesněji, s použitím první rovnice dostáváme

$$m\ddot{q}_s = -\frac{\partial V}{\partial q_s} . \quad (12)$$

### 1.5.1 Dynamická reverzibilita

Uvažujme systém, jehož hamiltonián je invariantní vůči změně směru času, tedy vůči záměně  $t \rightarrow -t$ . Nyní předpokládejme, že  $\{q(t), p(t)\}$  je trajektorie daného systému ve fázovém prostoru. Poté i  $\{q(-t), -p(-t)\}$  je řešením pohybových rovnic a tedy je také trajektorií ve fázovém prostoru.

Abychom dokázali toto tvrzení, výjdeme z Hamiltonových rovnic

$$\frac{dp^s}{dt} = -\frac{\partial H(t)}{\partial q_s} , \quad \frac{dq_s}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p^s} . \quad (13)$$

Pomocí  $t' = -t$  dostáváme

$$\frac{dp^s(t)}{dt'} = -\frac{dp^s}{dt} = \frac{\partial H(t)}{\partial q_s(t)} . \quad (14)$$

Když výjdeme z předpokladu, že  $H(-t) = H(t') = H(t)$  a zavedeme  $q_s(t) = q_s(-t) = q_s(t')$  a také  $p^s(-t) = p^s(t') = -p^s(t)$ , pak rovnice (14) má tvar

$$\frac{dp^s(t')}{dt'} = -\frac{\partial H(t')}{\partial q_s(t')} . \quad (15)$$



což je jedna z Hamiltonových rovnic. Stejným způsobem budeme postupovat i s druhou rovnicí

$$\begin{aligned} \frac{dq_s(t)}{dt} &= -\frac{dq_s(t)}{dt'} = \frac{\partial H(t)}{\partial p^s(t)} \Rightarrow \\ -\frac{dq_s(t')}{dt'} &= -\frac{\partial H(t')}{\partial p^s(t')} \Rightarrow \frac{dq_s(t')}{dt'} = \frac{\partial H(t')}{\partial p^s(t')} . \end{aligned} \quad (16)$$

Tímto způsobem jsme tedy dokázali, že  $\{q(-t), -p(-t)\}$  je řešením Hamiltonových rovnic a tudíž definuje trajektorii ve fázovém prostoru.

### 1.5.2 Kanonické transformace

Uvažujme transformaci souřadnic ve fázovém prostoru

$$q, p \rightarrow q', p' . \quad (17)$$

Aby tyto nové proměnné dávaly popis toho samého systému, pak musí zjevně platit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q, \dot{q}) = 0 , \quad \delta \int_{t_1}^{t_2} dt L(q', \dot{q}') = 0 . \quad (18)$$

V případě, že je tato podmínka splněna, pak nazýváme transformaci od nečárkovaných k čárkovaným proměnným (17) jako *kanonickou transformaci*. Je zřejmé, že rovnost variací daných v (18) je splněna, pokud existuje následující vztah mezi odpovídajícími lagrangiány

$$L(q, \dot{q}) = L(q', \dot{q}') + \frac{dG_1(q, q')}{dt} . \quad (19)$$

Abychom dokázali tento vztah, použijeme (19) v definici a akce. Následně provedeme její variaci a čímž dostáváme

$$\begin{aligned} \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}) dt &= 0 = \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q', \dot{q}') dt + \delta G_1(q, q')|_{t_2} - \delta G_1(q, q')|_{t_1} = \\ &= \delta \int_{t_1}^{t_2} L(q', \dot{q}') dt = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

kde jsme využili skutečnost, že při odvozování pohybových rovnic požaduje, aby variace souřadnic byly rovny nule v časech  $t_1$  a  $t_2$ .

Je užitečné přepsat vztah mezi lagrangiány pomocí odpovídající hamiltonovského formalismu formulace

$$L(q, \dot{q}) = \sum_s p^s \dot{q}_s - H(p, q) = \sum_s p'^s \dot{q}'_s - H'(p', q') + \frac{dG_1(q, q', t)}{dt} \quad (21)$$

což můžeme přepsat do ekvivalentního tvaru

$$\sum_s (p^s dq_s - p'^s dq'_s) - (H - H')dt = \sum_s \left( \frac{\partial G_1}{\partial q_s} dq_s + \frac{\partial G_1}{\partial q'_s} dq'_s \right) + \frac{\partial G_1}{\partial t} dt . \quad (22)$$

Z předchozí rovnice dostáváme následující důležité vztahy

$$p^s = \frac{\partial G_1}{\partial q_s} , \quad p'^s = -\frac{\partial G_1}{\partial q'_s} , \quad H - H' = -\frac{\partial G_1}{\partial t} . \quad (23)$$

Analyzujeme nyní strukturu těchto transformací podrobněji. Rovnice (23) budeme interpretovat jako vztah mezi  $(q_s, p^s)$  a  $(q'_s, p'^s)$ . Podrobněji, levá rovnice v (23) může být řešena pro  $q'_s = q'_s(q_k, p^k)$ . Samozřejmě, podmínka pro existenci tohoto řešení je

$$\det \frac{\partial^2 G_1}{\partial q_i \partial q'_k} \neq 0 . \quad (24)$$

Jakmile tedy najdeme  $q'_l = q'_l(q_k, p^k)$ , pak pravá rovnice v (23) dává  $p'^l = p'^l(q_k, p^k)$ .

Jako příklad spojitě funkce  $q, q'$  která negeneruje kanonické transformace, uvažujme

$$G_1(q, q') = f(q) + h(q') , \quad (25)$$

kde  $f$  and  $h$  jsou libovolné spojitě funkce. Je zřejmé, že tato funkce nespĺňuje (24) a tedy negeneruje kanonické transformace. Na druhou stranu uvažujme následující funkci

$$G_1(q, q') = -q_s \delta^{sr} q'_r . \quad (26)$$

Pro tuto funkci z rovnice (23) dostaneme

$$p^s = -\delta^{sr} q'_r , p'^s = \delta^{sr} q_s . \quad (27)$$

Vidíme, že souřadnice a impulsy si vyměnily role pomocí této generující funkce. Z toho důvodu se tato transformace nazývá transformace výměny.

Je dobré vědět, že můžeme najít další formy funkcí, které generují kanonické transformace. Pro naše účely je ale podstatné, že kanonické transformace jsou základem Liouvillova theoremu, který má fundamentální význam v kinetické teorii.

## 1.6 Kanonické invarianty

Kanonickým invariantem nazýváme dynamickou veličinu, která zůstává invariantní vůči kanonickým transformacím. Důležitým příkladem kanonického invariantu je Poissonova závorka mezi dvěma funkcemi  $A, B$ . Tedy, jestliže platí

$$\begin{aligned} A(p, q) &\xrightarrow{C} A'(q', p') \\ B(q, p) &\xrightarrow{C} B'(q', p') \end{aligned} \quad (28)$$

pak

$$\{A, B\}_{q,p} \xrightarrow{C} \{A', B'\}_{q',p'} = \{A, B\}_{q,p} \quad (29)$$

Uvažujme nyní případ, kdy  $B$  je Hamiltoniánem daného systému  $B = H$ . Pak definice časového vývoje fyzikální veličiny říká

$$\frac{dA(q, p)}{dt} = \{A, H\}_{q,p} . \quad (30)$$

Na druhou stranu (29) nám říká

$$\frac{dA(q, p)}{dt} = \{A, H\}_{q,p} = \{A'(q', p'), H(q', p')\} = \frac{dA'(q', p')}{dt} . \quad (31)$$

Jinými slovy časová změna proměnné  $A$  je nezávislá na souřadnicích, které jsou použity na popis daného systému.

## 1.7 Konstanty pohybu a symetrie

Zachovávající se veličiny mají úzký vztah k symetriím daného systému. Uvažujme systém, který je popsán souřadnicemi  $(q_1, q_2, \dots, q_n)$  a předpokládejme, že platí  $\frac{\partial H}{\partial q_j} = 0$ . Pak z pohybové rovnice dostáváme  $p_j = \text{const}$ . Jinými slovy, jestliže systém nezávisí na určité souřadnici, pak impuls sdružený s touto souřadnicí je konstantní. Takovéto souřadnice se nazývají *cyklické souřadnice*.

Invariance Hamiltoniánu vzhledem k určité souřadnici může být vyjádřena pomocí Hamiltonovských rovnic nebo pomocí Poissonových závorek. V tomto případě, jestliže  $H$  je nezávislý na souřadnici  $q_j$ , pak dostáváme

$$\frac{dp^j}{dt} = \{p_j, H\} = 0 \quad (32)$$

a tedy  $p^j$  je konstantní.

### 1.7.1 Liouvillův teorém

V jedné svoji formulaci Liouvillův teorém říká, že jakobián kanonických transformací je roven jedné. Pro systém o  $N$  stupních volnosti, máme

$$J \left( \begin{array}{c} q', p' \\ q, p \end{array} \right) = \frac{\partial(q', p')}{\partial(q, p)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial q'_1}{\partial q_1} & \frac{\partial q'_2}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p'^1}{\partial q_1} & \cdots & \frac{\partial p'^N}{\partial q_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \frac{\partial q'_1}{\partial p^N} & \frac{\partial q'_2}{\partial p^N} & \cdots & \frac{\partial p'^1}{\partial p^N} & \cdots & \frac{\partial p'^N}{\partial p^N} \end{vmatrix} = 1. \quad (33)$$

Na tomto místě je vhodné zdůraznit, že existuje celá řada formulací Liouvillova teorému. V této části naší přednášky dokážeme její čistě geometrický význam založený na vlastnostech kanonických transformací.

Liouvillův teorém má následující geometrický význam. Pro libovolnou transformaci  $(q, p) \rightarrow (q', p')$  se integrál ve fázovém prostoru transformuje takto

$$\int_{\Omega} dqdp = \int_{\Omega'} J \left( \begin{array}{c} (q, p) \\ (q', p') \end{array} \right) dq'dp' \quad (34)$$

kde  $\Omega$  značí objem ve fázovém prostoru, ve kterém provádíme danou transformaci. Nyní vidíme, že v případě kanonických transformací máme

$$\int_{\Omega} dqdp = \int_{\Omega'} dq'dp'. \quad (35)$$

Protože tyto veličiny nejsou nic jiného než objemové elementy ve fázovém prostoru dostáváme, že tyto objemové elementy fázového prostoru jsou invariantní vzhledem ke kanonickým transformacím.

### 1.7.2 Akce jako generátor kanonických transformací

Jedním z nejdůležitějších poznatků, které se týkají kanonických transformací je ten, že samotná akce může být uvažována jako generátor kanonických transformací.

Uvažujme akční integrál odpovídající pohybu v intervalu od  $t$  do  $t + T$

$$\begin{aligned} S(t, T) &= \int_t^{t+T} dt' L(q, \dot{q}) = \\ &= \int_0^{t+T} dt' [\sum_s p^s \dot{q}_s - H] - \int_0^t dt' [\sum_s p^s \dot{q}_s - H] . \end{aligned} \quad (36)$$

Jestliže nyní provedeme derivaci vzhledem k  $t$  dostáváme

$$\frac{dS(t, T)}{dt} = \sum_s (p'^s \dot{q}'_s - p^s \dot{q}_s) + (H - H') , \quad (37)$$

kde jsme zavedli značení

$$q'_s = q_s(t + T) , \quad p'^s = p^s(t + T) . \quad (38)$$

Jestliže budeme předpokládat, že  $H$  je integrál pohybu, tedy  $H(t+T) = H(t)$ , pak dostáváme

$$dS = \sum_s (p'^s dq'_s - p^s dq_s) . \quad (39)$$

Tento výsledek nám říká, že akce je generátor kanonických transformací. Jinými slovy řečeno časový vývoj systému může být uvažován jako kanonická transformace. Skutečnost, že časový vývoj systému ve fázovém prostoru, jenž je určen pohybovými rovnicemi, je jedna z forem kanonické transformace, je fundamentální předpoklad pro určení Liouvillových rovnic.

## 1.8 Ansambl a fázový prostor

Jak již víme, stav systému je reprezentován bodem ve fázovém prostoru. Tak, jak se systém vyvíjí s časem, tento bod se pohybuje po trajektorii  $(q_1(t), \dots, q_N(t), p^1(t), \dots, p^N(t))$  kde nyní předpokládáme systém tvořený z  $N$  částic pohybujících se v jednom rozměru. Zobecnění na případ pohybu ve třech a vyšších dimenzích provedeme později.

Ansámbl je definován jako množina kopií téhož systému, které jsou identické ve všech svých vlastnostech až na to, že odpovídají rozdílným stavům systému v určitém časovém okamžiku. Z této definice je zřejmé, že každý prvek Ansámblu může být reprezentován bodem ve fázovém prostoru  $\Gamma$  v

určitém časovém okamžiku a jejich časový vývoj je reprezentován určitou trajektorií v tomto fázovém prostoru. Jinými slovy řečeno, když budeme předpokládat, že máme  $\mathcal{N}$  kopií daného systému v Ansamblu, pak stav tohoto Ansamblu v čase  $t = 0$  je reprezentován  $\mathcal{N}$  body v prostoru  $\Gamma$ . Necht' uvažujeme funkci  $\rho_{ans} = \rho_{ans}(q_s, p^s, t)$  a uvažujme následující číslo

$$\rho_{ans}(q_s, p^s, t) d^N q d^N p \quad (40)$$

které budeme interpretovat jako počet bodů ansámblu v elementu fázového prostoru  $d^N q d^N p$  v okolí bodu  $(q_1, \dots, q_N, p_1, \dots, p_N)$ . Pak můžeme definovat  $\rho_{ans}$  jako

$$\rho_{ans}(q_s, p^s, t) = \frac{d\mathcal{N}}{d^N q d^N p} . \quad (41)$$

Samozřejmě je dobré předpokládat, že body Ansamblu jsou hustě a spojitě distribuovány ve fázovém prostoru  $\Gamma$ , což umožňuje předpokládat, že  $\rho_{ans}$  je spojitá funkce na fázovém prostoru.

Jako příklad uvažujme systém  $N$  volných harmonických jedno-dimensionálních oscilátorů. Tento systém má Hamiltonian

$$H = \sum_{s=1}^N H_s , \quad H_s = \frac{1}{2m}(p^s)^2 + \frac{m\omega_0}{2}q_s^2 = E_s \quad (42)$$

Díky tomu, že tyto oscilátory jsou volné, každý oscilátor se nachází ve stavu se zachovávající se energií  $E_s$ . Mikrostav systému, je neznám. Na druhou stranu statisticky reprezentativní ansambl tohoto systému má hustotu bodů danou jako

$$\rho_{ans}(q_s, p^s, t) = \left(\frac{\omega_0}{2\pi}\right)^N \prod_{s=1}^N \delta(H_s(q_s, p^s) - E_s) , \quad (43)$$

která je normalizovaná jako

$$\int \prod_s dq_s dp^s \rho_{ans} = 1 . \quad (44)$$

Nyní můžeme interpretovat  $\rho_{ans}$  jako *hustotu pravděpodobnosti, že najdeme daný systém v daném bodě fázového prostoru  $\Gamma$ , tedy v daném bodě mikrostavu  $(q_s, p^s)$ .*

## 1.9 Liouvilleův theorem

Louvilleův theorem říká, že fázová distribuční funkce se zachovává podél fázové trajektorie systému. Jak již bylo řečeno,  $\rho_{ans}(q, p, t)d^N q d^N p$  udává počet prvků Ansamblu, které se nacházejí v elementu fázového prostoru  $d^N q d^N p$ .

Důležitou vlastností Ansamblu je to, že trajektorie jeho prvků se nikdy nekříží, což vyplývá ze skutečnosti, že pro systém o  $N$  stupních volnosti je jeho trajektorie jednoznačně určena  $2N$  počátečními podmínkami  $[q_1(0), \dots, q_N(0), p^1(0), \dots, p^N(0)]$ .

Uvažujme, že v určitém časovém okamžiku body Ansamblu obsažené v diferenciálním objemovém elementu fázového prostoru jsou ohraničeny uzavřenou plochou. Díky tomu, že rozdílné trajektorie se nemohou křížit dostáváme, že vnitřní body v daném objemu zůstanou vnitřními body, tak jako každý hraniční bod zůstane hraničním bodem. Jestliže tedy označíme počet bodů v daném objemu jako  $d\mathcal{N}$ , pak dostáváme

$$d\mathcal{N} = d\mathcal{N}' . \quad (45)$$

Označme  $d\Omega$  malý element fázového prostoru, v kterém se nacházejí dané prvky Ansamblu. Nyní použijeme důležitou skutečnost odvozenou v předchozí části, která říká, že časový vývoj systému, který je určen Hamiltonovými rovnicemi, odpovídá kanonické transformaci. Protože ale při kanonických transformacích se zachovává objemový element fázového prostoru, pak dostáváme

$$d\Omega = d\Omega' . \quad (46)$$

Kombinací (45) a (46) dostáváme důležitý výsledek

$$\frac{d\mathcal{N}'}{d\Omega'} = \frac{d\mathcal{N}}{d\Omega} , \quad (47)$$

který nám říká, že

$$\rho_{ans}(p, q, t) = \rho_{ans}(p', q', t') . \quad (48)$$

Jinými slovy řečeno, Liouvilleův theorem má tvar

$$\frac{D\rho_{ans}}{Dt} = 0 , \quad (49)$$

kde  $\frac{D}{Dt}$  označuje časovou derivaci podél trajektorie ve fázovém prostoru, což má explicitní tvar

$$\frac{D\rho_{ans}}{Dt} = \frac{\partial\rho_{ans}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial\rho_{ans}}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial\rho_{ans}}{\partial p^s} \dot{p}^s \right) , \quad (50)$$

kde časové derivace fázových proměnných jsou určeny Hamiltonovými rovnicemi.

Tento výsledek může být zapsán v následujícím elegantním tvaru. Je známo, že časový vývoj libovolné fázové funkce  $u(p, q, t)$  může být vyjádřen pomocí Poissnovy závorky

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \{u, H\} , \quad (51)$$

kde Poissnova závorka je definována jako

$$\{f, g\} = \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial f}{\partial q_s} \frac{\partial g}{\partial p^s} - \frac{\partial f}{\partial p^s} \frac{\partial g}{\partial q_s} \right) . \quad (52)$$

Vstah (51) vychází ze skutečnosti, že Hamiltonovy rovnice mají tvar

$$\dot{q}_s = \frac{\partial H}{\partial p^s} , \quad \dot{p}^s = -\frac{\partial H}{\partial q_s} . \quad (53)$$

Jestliže nyní použijeme (53) v definici (51) dostaneme

$$\frac{Du}{Dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial u}{\partial q_s} \dot{q}_s + \frac{\partial u}{\partial p^s} \dot{p}_s \right) . \quad (54)$$

Pak je zřejmé, že Liouvilova rovnice má tvar

$$\frac{\partial \rho_{ans}}{\partial t} + \{\rho_{ans}, H\} = 0 . \quad (55)$$

### 1.9.1 Obecné řešení Liouvilovy rovnice

Zde bychom rádi ukázali, jakým způsobem je možné najít nejobecnější řešení Liouvilovy rovnice.

Nechť  $g(p, q, t)$  je zachováající se veličina, t.j.

$$\frac{Dg}{Dt} = \frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} = 0 \quad (56)$$

a tedy  $g$  je řešením Liouvilovy rovnice.

Na druhou stranu předpokládejme, že  $g$  je řešením Liouvilovy rovnice

$$\frac{\partial g}{\partial t} + \{g, H\} = 0 . \quad (57)$$



Na druhou stranu víme, že levá strana této rovnice má tvar  $\frac{Dg}{Dt} = 0$  a tedy libovolné řešení Liouvillový rovnice je také integrálem pohybu. Z tohoto výsledku dostáváme, že nejobecnějším řešením Liouvillový rovnice je libovolná funkce všech zachovávajících se veličin, tedy

$$\rho_s = \rho_s(g_1, \dots, g_{2N}) . \quad (58)$$

Jinými slovy řečeno, znalost nejobecnějšího řešení Liouvillový rovnice je ekvivalentní znalosti všech zachovávajících se veličin

$$\begin{aligned} g_1 &= g_1(p, q, t) \\ g_2 &= g_2(p, q, t) \\ &\vdots \\ g_{2N} &= g_{2N}(q, p, t) \end{aligned} \quad (59)$$

### 1.9.2 Druhé odvození Liouvillový rovnice

Rádi bychom ukázali druhý způsob odvození Liouvillový rovnice.

Tento důkaz je založen na faktu, že Liouvillova rovnice může být zapsána ve tvaru

$$\frac{\partial \rho_{ans}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial(\rho_{ans} \dot{q}_s)}{\partial q_s} + \frac{\partial(\rho \dot{p}^s)}{\partial p^s} \right) = 0 \quad (60)$$

což má formu rovnice spojitosti, kde tok hustoty je dán  $2N$ -dimensionálním vektorem ve fázovém prostoru

$$\mathbf{j}_{ans} = (\rho_{ans} \dot{q}_1, \dots, \rho_{ans} \dot{q}_N, \rho_{ans} \dot{p}^1, \dots, \rho_{ans} \dot{p}^N) \quad (61)$$

Poznamenejme, že rozdíl mezi (50) a (60) je dán výrazem

$$\sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial \dot{q}_s}{\partial q_s} + \frac{\partial \dot{p}_s}{\partial p^s} \right) = \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p^s} - \frac{\partial^2 H}{\partial q_s \partial p^s} \right) = 0 \quad (62)$$

kde  $H$  je hamiltonián daného systému a kde jsme vyšli z faktu, že systém splňuje Hamiltonovy rovnice.

Protože Liouvillova rovnice má tvar rovnice spojitosti, můžeme ji odvodit následovně. Základním bodem je předpoklad, že počet členů daného ansamblu se zachovává. Nyní uvažujme určitou oblast fázového prostoru  $V_\Gamma$ . Pak

zjevně časová změna počtu členu ansamblu v daném objemu je rovna toku hranicí daného objemu  $\partial V_\Gamma$

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_\Gamma} \rho_{ans} dV = - \int_{\partial V_\Gamma} j_{ans}^i dS_i \quad (63)$$

kde  $dS_i \equiv n_i dS$  je povrchový element, jehož normovaný normálový vektor  $n_i$ ,  $n_i n^i = 1$  směřuje ven z daného objemu. Poté s pomocí Gaussovy věty

$$\int_{\partial V} F^i dS_i = \int_V \partial_i F^i \quad (64)$$

můžeme přepsat rovnici (63) do tvaru

$$\int_{V_\Gamma} \left( \frac{\partial \rho_{ans}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial(\rho_{ans} \dot{q}_s)}{q_s} + \frac{\partial(\rho_{ans} \dot{p}^s)}{\partial p_s} \right) = 0 . \quad (65)$$

Protože tato rovnice musí platit pro libovolné  $V_\Gamma$ , pak zjevně musí platit

$$\frac{\partial \rho_{ans}}{\partial t} + \sum_{s=1}^N \frac{\partial(\rho_{ans} \dot{q}_s)}{q_s} + \frac{\partial(\rho_{ans} \dot{p}^s)}{\partial p_s} = 0 . \quad (66)$$

Tato rovnice, s použitím Hamiltonových rovnic, dává Liouvillovu rovnici (50).

### 1.9.3 Druhá interpretace distribuční funkce

Uvažujeme izolovaný systém o  $N$  stupních volnosti s hamiltoniánem

$$H(p, q) = E = \text{const} . \quad (67)$$

Je jasné, že systém se nachází na podprostoru fázového prostoru  $\Omega$ , který je vymezen podmínkou (67). V předchozí diskusi jsme zavedli počet bodů Ansamblu  $\mathcal{N}$  a  $\rho_{ans}$  jako funkci, která udává hustotu bodů v Ansamblu. Celkový počet bodů v Ansamblu je dán výrazem

$$\mathcal{N} = \int_{\Omega} \rho_{ans} d^N q d^N p . \quad (68)$$

Zřejmě v objemu  $\Delta\Omega \in \Omega$  je počet bodů dán intergálem

$$\Delta\mathcal{N} = \int_{\Delta\Omega} \rho_{ans} d^N q d^N p . \quad (69)$$

Podělením těchto dvou výrazů dostáváme

$$\frac{\Delta \mathcal{N}}{\mathcal{N}} \quad (70)$$

což můžeme intepretovat jako pravděpodobnost, že libovolný stav je obsažen v  $\Delta\Omega$ . Označíme tuto veličinu jako

$$\int_{\Delta\Omega} f_N d^N q d^N p \quad (71)$$

a tedy můžeme psát

$$\int_{\Delta\Omega} f_N d^N q d^N p = \frac{\int_{\Delta\Omega} \rho_{ans} d^N q d^N p}{\int_{\Omega} \rho_{ans} d^N q d^N p} . \quad (72)$$

Vidíme, že můžeme psát

$$f_N(p, q, t) = C \rho_{ans}(p, q, t) \quad (73)$$

kde  $C$  je konstanta. Jinými slovy řečeno je zde jednoznačná souvislost mezi funkcemi  $\rho_{ans}$  a  $f_N$ . Přesněji řečeno, můžeme položit otázku, co znamená, že  $f_N(q, p) d^N q d^N p$  je pravděpodobnost, že stav daného systému se nachází v objemovém elementu v okolí bodu  $(q, p)$  kde nyní používáme konvenci, kde  $(q, p) \equiv (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N)$ , kde  $\mathbf{x} \equiv (x^1, \dots, x^D)$  a kde  $\mathbf{p} \equiv (p_1, \dots, p_N)$  Explicitně, jestliže stav  $(q, p)$  je obsažen, pak to znamená, že částice 1 je v objemovém elementu v okolí bodu  $\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1$ , druhá částice je v objemovém elementu  $d\mathbf{x}_2 d\mathbf{p}_2$  v okolí  $(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2)$  atd. Jinými slovy  $f_N$  je *hustota pravděpodobnosti* pro  $N$ - částicový systém, zatím co  $\rho_{ans}$  je veličina spojená s Ansámblem různých systému,  $f_N(q, p, t)$  je veličina spojená s jedním konkrétním systémem. Je také důležité připomenout, že  $f_N$  je normovaná jako

$$\int_{\Omega} f_N dq dp = 1 , \quad (74)$$

kde se integrace provádí přes celý dosažitelný fázový prostor. Jinými slovy je to prostor vymezený podmínkou konstantní energie. Jestliže nyní  $G(q, p, t)$  je libovolná dynamická veličina, pak s pomocí známé hustoty pravděpodobnosti  $f_N$  můžeme definovat následující střední hodnotu dané veličiny

$$\langle G \rangle = \int f_N G dq dp . \quad (75)$$

### 1.9.4 Řešení Liouvillových rovnic s počáteční podmínkou

Nyní se zaměříme na určité možnosti, jak řešit Liouvillovu rovnici s určitou počáteční podmínkou.

#### 1. Taylorův rozvoj

Předpokládejme, že známe počáteční formu distribuční funkce  $f_N$

$$f_N(q, p, 0) \equiv f_N^0(q, p) . \quad (76)$$

Nyní provedeme Taylorův rozvoj  $f_N(q, p, t)$  v okolí bodu  $t = 0$  při pevných  $q$  a  $p$

$$f_N(q, p, \Delta t) = f_N(q, p, 0) + \frac{\partial f_N}{\partial t}(0, q, p)\Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f_N}{\partial t^2}(0, q, p)(\Delta t)^2 + \dots \quad (77)$$

Víme, že  $f_N$  splňuje Liouvillovu rovnici a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_N}{\partial t} &= \{H, f_N\} , \\ \frac{\partial^2 f_N}{\partial t^2} &= \frac{\partial}{\partial t} \{H, f_N\} = \left\{ H, \frac{\partial f_N}{\partial t} \right\} = \\ &= \{H, \{H, f_N\}\} , \end{aligned} \quad (78)$$

kde předpokládáme, že  $H$  nezávisí explicitně na čase. S použitím těchto vztahů dostaneme

$$\begin{aligned} f_N(q, p, \Delta t) &= f_N(q, p, 0) + \Delta t \{H, f_N(q, p, 0)\} + \frac{1}{2}(\Delta t)^2 \{H, \{H, f_N(q, p, 0)\}\} + \dots = \\ &= \left( 1 + \Delta t \{H, \} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{H, \{H, \}\} + \dots \right) f_N(q, p, 0) . \end{aligned} \quad (79)$$

Geometricky si můžeme představit jako časový vývoj funkce  $f_N$  v pevném bodě  $q, p$ . Poznamenejme, že pro konečný časový interval můžeme tento vztah přepsat do formy

$$f_N(q, p, \Delta t) = f_N(q, p, 0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\Delta t)^n}{n!} \overbrace{\{H, \dots, \{H, \{H, f_N(q, p, 0)\}\}\}}^n . \quad (80)$$

#### Případ 2: Liouvillovův operátor

Z předchozího popisu je zřejmé, že výraz  $\{H, \}$  má formu operátoru působící na  $f_N$ . Proto je užitečné přepsat Liouvillovu rovnici do tvaru

$$i \frac{\partial f_N}{\partial t} = i \{H, f_N\} \equiv \hat{\Lambda} f_N \quad (81)$$

kde

$$i \hat{\Lambda} = i \{H, \} = i \sum_{s=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial q_s} \frac{\partial}{\partial p^s} - \frac{\partial H}{\partial p^s} \frac{\partial}{\partial q_s} \right) . \quad (82)$$

Je možné ukázat, že  $\hat{\Lambda}$  je Hermiteovský operátor v prostoru spojitých normovaných funkcí na fázovém prostoru tak, že pro tuto funkci platí

$$\|\psi\|^2 = \int \psi^* \psi d^N q d^N p < \infty . \quad (83)$$

Operátor je Hermiteovský, když platí  $\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}^\dagger$ , kde  $\hat{\Lambda}^\dagger$  je Hermiteovsky sdružený operátor. Z toho dostaneme, že vlastní hodnoty  $\hat{\Lambda}$  jsou reálné a že vlastní vektory daného operátoru jsou ortogonální. Je důležité, že tyto vlastnosti jsou zcela obecné a nezávisí na druhu interakce mezi molekulami. Další důležitá vlastnost je ta, že vlastní hodnoty  $\hat{\Lambda}$  jsou reálné, pak vlastní hodnoty  $\{H, \} = -i \hat{\Lambda}$  jsou imaginární, což má za následek, že mohou existovat řešení Liouvillových rovnic, které oscilují v čase.

Pomocí operátoru  $\hat{\Lambda}$  přejdeme k dalšímu způsobu řešení počáteční podmínky u Liouvillových rovnic. Přepíšeme Liouvillovu rovnici do tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \exp i \int_0^t dt' \hat{\Lambda} \right) D(t) \right] = 0 \quad (84)$$

Abychom viděli, že tato rovnice je ekvivalentní Liouvillově rovnici, provedeme derivaci vzhledem k  $t$

$$\begin{aligned} i \hat{\Lambda}(t) D(t) \exp(i \int_0^t dt' \hat{\Lambda}) + \exp(i \int_0^t dt' \hat{\Lambda}) \frac{\partial}{\partial t} D(t) = 0 \Rightarrow \\ i \exp(i \int_0^t dt' \hat{\Lambda}) (\hat{\Lambda}(t) D(t) - \frac{\partial}{\partial t} D(t)) = 0 \end{aligned} \quad (85)$$

a ekvivalence s Liouvillovou rovnicí je zřejmá. Nyní, jestliže zintegrujeme rovnici (84) dostaneme řešení ve tvaru

$$D(p, q, t) = e^{-i \int_0^t dt' \hat{\Lambda}} D(q, p, 0) , \quad (86)$$

kde opět je nutné zdůraznit, že uvažujeme pevné  $p, q$ , jinými slovy, můžeme si představit, že  $p, q, t$  jsou nezávislé souřadnice na  $6N + 1$  dimensionálním prostoru.

Pro mále intervaly opět máme

$$\int_0^{\Delta t} dt' \hat{\Lambda} \simeq \Delta t \hat{\Lambda} \quad (87)$$

a tedy (86) může být přepsána do tvaru

$$\begin{aligned} D(p, q, t) &= [1 - i\Delta t \hat{\Lambda} + \frac{1}{2}(-i\Delta t \hat{\Lambda})^2 + \dots] D(q, p, t) = \\ &= \left[ 1 + \Delta t \{H, \} + \frac{(\Delta t)^2}{2} \{H, \{H, \}\} + \dots \right] D(q, p, 0) \end{aligned} \quad (88)$$

což souhlasí s Taylorovým rozvojem, který byl nalezen v předchozí kapitole.

Nyní přistoupíme k analýze s použitím vlastních vektorů a vlastních hodnot operátoru  $\hat{\Lambda}$ . Opět musíme předpokládat, že počáteční forma rozdělovací funkce  $f_N$  je známa  $f_N(q, p, 0) \equiv f_N^0(q, p)$ . Dále musíme předpokládat, že známe vlastní vektory a vlastní hodnoty operátoru  $\hat{\Lambda}$ , kdy budeme předpokládat časově nezávislé  $\hat{\Lambda}$

$$\hat{\Lambda} \psi_n = \omega_n \psi_n . \quad (89)$$

Jestliže předpokládáme, že  $\psi_n$  tvoří bázi Hilbertova prostoru, můžeme psát počáteční rozdělovací funkci ve tvaru

$$f_N^0(q, p) = \sum_{\forall n} D_n \psi_n \quad (90)$$

kde koeficienty  $D_n$  je možné určit s pomocí předpokládáme ortogonalitu vektorů  $\psi_n$

$$\begin{aligned} D_n &= \langle \psi_n | f_N^0(q, p) \rangle = \int d^N q d^N p \psi_n^*(q, p) f_N^0(q, p) , \\ \int d^N q d^N p \psi_n^*(q, p) \psi_m(q, p) &= \delta_{nm} . \end{aligned} \quad (91)$$

Pak zřejmě dostáváme

$$f_N(q, p, t) = e^{-it\hat{\Lambda}} \sum_{\forall n} D_n \psi_n . \quad (92)$$

Tato rovnice, s použitím faktu, že  $\psi_n$  je vlastním vektorem  $\hat{L}$ , má řešení ve tvaru

$$f_N(q, p, t) = \sum_{\forall n} D_n e^{-it\omega_n} \psi_n . \quad (93)$$

### 1.9.5 Rozdělovací funkce ideálního plynu

Uvažujme ideální plyn, který je dán  $N$  neinteragujícími molekulami a jenž je obsažen v krychli o velikosti hrany  $L$ . V tomto případě Hamiltonián je dán ve tvaru

$$H = \sum_{s=1}^N \frac{p_s^2}{2m} , \quad 0 \leq x_s^{(i)} \leq L \quad (94)$$

Víme, že časový vývoj rozdělovací funkce má formu

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} = - \sum_s \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_s} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_s} = - \sum_s \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_s} . \quad (95)$$

Pak zřejmě operátor  $\hat{\Lambda}$  má tvar

$$\hat{\Lambda}_0 = -i \sum_{s=1}^N \frac{\mathbf{p}_s}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} . \quad (96)$$

Vlastní vektory operátoru splňují rovnici

$$\hat{\Lambda}_0 \psi(\mathbf{k}) = \omega(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) , \quad (97)$$

kde  $(\mathbf{k})$  je posloupnost vlastních vektorů

$$(\mathbf{k}) \equiv (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N) . \quad (98)$$

Pak dostáváme

$$\hat{\Lambda}_0 \psi(\mathbf{k}) = -i \sum_{s=1}^N \frac{\mathbf{p}_s}{m} \cdot \frac{\partial \psi(\mathbf{k})}{\partial \mathbf{x}_s} = \omega(\mathbf{k}) \psi(\mathbf{k}) . \quad (99)$$

Budeme předpokládat řešení ve tvaru

$$\psi(\mathbf{k}) = A \exp \left( i \sum_{s=1}^N \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x}_s \right) \quad (100)$$

pak po jeho vložení do předchozí rovnice dostaneme

$$\omega_{(\mathbf{k})} = \sum_{s=1}^N \frac{\mathbf{p}_s}{m} \cdot \mathbf{k}_s . \quad (101)$$

Dále, hraniční podmínky nám dávají

$$\mathbf{k}_s = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}_s , \quad (102)$$

kde komponenty vektoru  $\mathbf{n}$  jsou celá čísla. Konečně, konstanta  $A$  je zafixována normalizací a tedy dostáváme

$$\psi_{(\mathbf{k})} = \frac{1}{L^{3N/2}} \exp \left( i \sum_{s=1}^N \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x}_s \right) . \quad (103)$$

Pak je zřejmé, že obecná forma  $N$ -částicové rozdělovací funkce má tvar

$$f(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N) = \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) \psi_{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^N) e^{-i\omega_{(\mathbf{k})}t} . \quad (104)$$

Abychom určili konečný tvar rozdělovací funkce  $f_0$ , musíme určit koeficienty  $D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N)$ . Označíme si hodnotu rozdělovací funkce  $f$  v čase  $t = 0$  jako  $f_0$

$$f_0(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N) = \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) \psi_{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^N) . \quad (105)$$

Protože vektory  $\psi_{(\mathbf{k})}$  jsou ortogonální, dostáváme

$$D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}) = \frac{1}{L^{3N/2}} \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i [\exp(-i \sum_s \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x}_s)] f_0(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N) \quad (106)$$

Tedy ze známe počáteční hodnoty distribuční funkce dostaneme obecné řešení Liouvilovy rovnice pro ideální plyn ve tvaru

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{L^{3N/2}} \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) e^{i \sum_{s=1}^N \mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{x}_s - \frac{\mathbf{p}_s}{m} t)} . \quad (107)$$

Je užitečné poznamenat, že rozdělovací funkce závisí na  $6 \times N$  integrálech pohybu

$$\left( \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, \mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{p}_1}{m}t, \mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{p}_2}{m}t, \dots, \mathbf{x}_N - \frac{\mathbf{p}_N}{m}t \right) \quad (108)$$



což je přesně v souladu s předchocí diskusí obecného řešení Liouvillový rovnic. Explicitně, je jasné, že  $\mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N$  jsou integrály pohybu pro systém definovaný hamiltoniánem (94). Dále ukážeme, že  $g_i \equiv \mathbf{x}_i - \frac{\mathbf{p}_i}{m}t$  splňuje rovnici zachování

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_i}{\partial t} + \{g_i, H\} &= -\frac{\mathbf{p}_i}{m} + \sum_{s=1}^N \left( \frac{\delta \mathbf{x}_s}{\delta \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}_s} - \frac{1}{m} \frac{\delta(-\mathbf{p}_i)}{\delta \mathbf{p}_s} \frac{\delta H}{\delta \mathbf{x}_s} \right) = \\ &= -\frac{\mathbf{p}_i}{m} + \sum_{s=1}^N \delta_i^s \frac{\delta H}{\delta \mathbf{p}_s} = 0 \end{aligned} \quad (109)$$

Je také užitečné poznamenat, že v případě ideálního plynu, můžeme operátor  $\hat{\Lambda}_0$  napsat jako  $\hat{\Lambda}_0 = \sum_{s=1}^N \hat{\Lambda}_0^s$ , kde  $\{\hat{\Lambda}_0^i, \hat{\Lambda}_0^j\} = 0$ . Pak je zřejmé, že můžeme hledat řešení Liouvillový rovnic ve tvaru  $f_N = \prod_{s=1}^N f_1(\mathbf{x}_s, \mathbf{p}_s, t)$ , kde  $f_1$  je jednočásticová rozdělovací funkce, která v případě ideálního plynu je dána výrazem

$$f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, t) = \exp\left(-t \frac{\mathbf{p}_1}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right) f_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, 0). \quad (110)$$

## 1.10 Redukované distribuční funkce

Pro jednoduchost zápisu zavedeme následující konvenci

$$d1 \equiv d\mathbf{x}_1 d\mathbf{p}_1, d2 \equiv d\mathbf{x}_2 d\mathbf{p}_2, \dots \quad (111)$$

která odpovídá částicím  $1, 2, \dots$

Uvažujme nyní systém  $N$  stejných částic a zaměřme se na subsystém, který je tvořen  $s < N$  částicemi. Pravděpodobnost, že najdeme subsystém ve fázovém prostoru  $d1d2 \dots ds$  v okolí stavu  $(1, 2, \dots, s)$  je

$$f_s(1, \dots, s) d1 \dots ds. \quad (112)$$

Je zřejmé, že můžeme očekávat vztah mezi  $f_s$  a  $f_N$ . Poznamenejme, že  $f_N$  udává pravděpodobnost, že se systém nachází v okolí bodu  $(1, \dots, s, s+1, \dots, N)$ . Poté je zřejmé, že jestliže se nazačímáme o situaci v okolí bodů  $s+1, \dots, N$ , musíme provést součet pravděpodobností, že je systém v daných bodech. Explicitně dostáváme

$$f_s(1, \dots, s) = \int f_N(1, \dots, N) d(s+1) \dots dN \quad (113)$$

## 1.11 s-násobná distribuční funkce

Tuto distribuční funkci, kterou si označíme jako  $F_s(1, \dots, s)$  definujeme následujícím způsobem. Výraz

$$F_s(1, \dots, s) d1 \dots ds \quad (114)$$

reprezentuje pravděpodobnost, že jedna z částic je ve fázovém prostoru  $d1$  v okolí bodu 1, jiná je ve fázovém prostoru  $d2$  v okolí bodu 2 atd v daném časovém okamžiku. Je zde důležitý rozdíl vzhledem k distribuční funkci  $f_s$ , protože  $F_s$  nerozlišuje, která konkrétní částice se nachází v okolí bodu 1 atd. Podrobněji,  $f_s$  určuje  $s$ -částicový stav specifické skupiny částic. Na druhou stranu  $F_s$  také odpovídá stejnému specifickému stavu, ale je nezávislá na tom, které částice se nacházejí v tomto stavu. Například,  $f_2(1, 2)$  udává pravděpodobnost, že částice 1 je ve stavu 1 a částice 2 ve stavu 2, na druhou stranu  $F_2(1, 2)$  udává počet dvojic částic, které se nacházejí v daném stavu. Abychom našli vztah mezi  $F_s$  a  $f_s$  musíme znát počet způsobů, jakým můžeme vybrat  $s$  částic z celkových  $N$

$$\binom{N}{s} = \frac{N!}{s!(N-s)!} \quad (115)$$

Jestliže předpokládáme, že dané částice jsou identické, pak každý takový výběr dává stejnou funkci  $f_s$ . Pak dostáváme

$$\bar{F}_s = \binom{N}{s} f_s, \quad (116)$$

kde čára nad  $F_s$  dává, že daný  $s$ -částicový stav byl započítán pouze 1. Je zřejmé, že musíme vzít do úvahy fakt, že  $s$ -částic můžeme distribuovat  $s!$  způsoby tak, že stále dávají  $s$ -částicový stav. Tento fakt dává konečný výsledek

$$F_s = s! \bar{F}_s = s! \binom{N}{s} f_s = \frac{N!}{(N-s)!} f_s \quad (117)$$

## 2 Analýza Liouvillový rovnice

V této kapitole odvodíme posloupnost rovnic známou jako BBKGY rovnice. Toto jsou rovnice pro redukované distribuce a hrají klíčovou roli v kinetické teorii plynů a tekutin. Začneme s Liouvillovou rovnicí pro  $N$ -částicovou distribuční funkci

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \{f_N, H\} = 0 \quad (118)$$

a přepíšeme ji do tvaru

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} - \hat{L}_N f_N = 0, \quad (119)$$

kde

$$\hat{L}_N = \{H, \} \quad (120)$$

což explicitně dává

$$\hat{L}_N = \sum_{l=1}^N \left( \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l} - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} \right), \quad (121)$$

kde

$$\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l} \equiv \frac{\partial H}{\partial x_{(l)}^i} \cdot \frac{\partial}{\partial p_i^{(l)}} \quad (122)$$

kde  $x_{(l)}^i$  je  $i$ -tá komponenta polohového vektoru  $l$ -té částice a  $p_i^{(l)}$  je  $i$ -tá komponenta sdružené hybnosti. Hamiltonian  $H$  má tvar

$$H = \sum_{i=1}^N \frac{p_i^2}{2m} + \sum_{i<j}^N \sum \Phi_{ij}, \quad (123)$$

kde

$$\Phi_{ij} \equiv \Phi(|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|) \quad (124)$$

je dvoučásticový interakční potenciál. Poté dostaneme

$$\hat{L} = - \sum_{l=1}^N \frac{\mathbf{p}_l}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} + \sum_{i<j}^N \sum_{l=1}^N \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l}. \quad (125)$$

Uvažujme nyní operátor

$$\hat{O}_{ij} \equiv \sum_l \frac{\partial \Phi_{ij}}{\partial \mathbf{x}_l} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_l}. \quad (126)$$

Z definice potenciálu je zřejmé, že tento výraz je nenulový pouze v případě, když  $l = i$  nebo  $l = j$ . Tedy dostáváme

$$\hat{O}_{ij} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Phi_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \Phi_{ij} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j}. \quad (127)$$

Protože potenciál  $\Phi_{ij}$  závisí na  $|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|$  zřejmě dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Phi_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_j} \Phi_{ij} . \quad (128)$$

Pak můžeme psát

$$\hat{O}_{ij} = -\mathbf{G}_{ij} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right) , \quad (129)$$

kde jsme definovali

$$\mathbf{G}_{ij} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Phi_{ij} \quad (130)$$

což je síla působící na  $i$ -tou částici způsobenou interakcí s  $j$ -tou částicí. Pomocí těchto definicí můžeme přepsat  $\hat{L}_N$  do tvaru

$$\hat{L}_N = -\sum_{l=1}^N \frac{\mathbf{p}_l}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} + \sum_{i<j}^N \sum \hat{O}_{ij} \quad (131)$$

nebo ekvivalentně

$$\hat{L}_N = -\sum_{l=1}^n \hat{K}_l + \sum_{i<j}^N \sum \hat{O}_{ij} \quad (132)$$

kde jsme definovali  $\hat{K}_l$  jako kinetický operátor. Protože se zajímáme o rovnici pro distribuční funkci  $f_s$ , rozdělíme  $\hat{L}_N$  následujícím způsobem

$$\hat{L}_N = \hat{L}_s + \hat{L}_{N,s+1} , \quad (133)$$

kde  $s$ -částicový Liovillův operátor  $\hat{L}_s$  je dán

$$\hat{L}_s = -\sum_{l=1}^s \hat{K}_l + \sum_{i<j}^s \sum \hat{O}_{ij} . \quad (134)$$

Zbytkový operátor  $\hat{L}_{N,s+1}$  je dán předpisem

$$\hat{L}_{N,s+1} = -\sum_{l=s+1}^N \hat{K}_l + \hat{R}_{N,s+1} \quad (135)$$

a kde  $\hat{R}_{N,s+1}$  můžeme lehce odvodit z definice  $\hat{L}_N$

$$\hat{R}_{N,s+1} = \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \hat{O}_{ij} + \sum_{i=s+1}^N \sum_{j=s+1, (i<j)}^N \hat{O}_{ij} . \quad (136)$$

## 2.1 Redukce Liouvilovy rovnice

S pomocí takto definovaných operátorů můžeme přistoupit k integraci Liouvilovy rovnice (119). Je jasné, že můžeme provést integraci přes  $s+1, \dots, N$  v rovnici (119), kde zřejmě můžeme zaměnit integraci přes  $s+1, \dots, N$  a působení operátoru  $\hat{L}_s$ . Konkrétně

$$\begin{aligned} \int d(s+1) \dots dN \frac{\partial}{\partial t} f_N &= \frac{\partial}{\partial t} \int d(s+1) \dots dN f_N = \frac{\partial}{\partial t} f_s, \\ \int d(s+1) \dots dN \hat{L}_s f_N &= \hat{L}_s \int d(s+1) \dots dN f_N = \hat{L}_s f_s, \end{aligned} \quad (137)$$

a tedy (119) má tvar

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s &= \int d(s+1) \dots dN \hat{L}_{N,s+1} f_N = \\ &= \int d(s+1) \dots dN \left( - \sum_{l=s+1}^N \hat{K}_l + \hat{R}_{N,s+1} \right) f_N. \end{aligned} \quad (138)$$

Budeme se podrobně věnovat pravé straně rovnice (138)

$$\int d(s+1) \dots dN \left( - \sum_{l=s+1}^N \frac{\mathbf{p}_l}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} + \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \hat{O}_{ij} + \sum_{i=s+1, (i < j)}^N \sum_{j=s+1}^N \hat{O}_{ij} \right) f_N \quad (139)$$

První člen dává pouze povrchové integrály a z definice rozdělovací funkce musí být rovny nule. To vyplývá z faktu, že

$$\int d\mathbf{x}_1 \int d\mathbf{p}_l \frac{\mathbf{p}_l}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} f_N \sim \int d\mathbf{p}_l \frac{\mathbf{p}_l}{m} f_N(\mathbf{x}_l = \infty) - f_N(\mathbf{x}_l = -\infty) = 0 \quad (140)$$

Stejným způsobem budeme analyzovat třetí příspěvek

$$\begin{aligned}
& \int d(s+1) \dots dN \hat{O}_{ij} f_N = - \int d(s+1) \dots dN \mathbf{G}_{ij} \left( \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_j} \right) = \\
& = \int d^3 \mathbf{x}_{(s+1)} d^3 \mathbf{p}_{(s+1)} \dots d^3 \mathbf{p}_{(i-1)} d^3 \mathbf{x}_i \dots d^3 \mathbf{x}_j d^3 \mathbf{p}_{(j+1)} \dots d^3 \mathbf{x}_N d^3 \mathbf{p}_N \mathbf{G}_{ij} \times \\
& \quad \times (f_N(\mathbf{p}_i = \infty) - f_N(\mathbf{p}_i = -\infty) - f_N(\mathbf{p}_j = \infty) - f_N(\mathbf{p}_j = -\infty)) = 0
\end{aligned} \tag{141}$$

Výsledkem dostáváme

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s = \int d(s+1) \dots dN \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N \hat{O}_{ij} f_N . \tag{142}$$

S použitím explicitní formy  $\hat{O}_{ij}$  dostáváme, že pravá strana rovnice má tvar

$$\text{P.S.R(142)} = - \int d(s+1) \dots dN \sum_{i=1}^s \sum_{j=s+1}^N N \mathbf{G}_{ij} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right) f_N \tag{143}$$

Opět vidíme, že derivace v proměnné  $\mathbf{p}_j, j \geq s+1$  dávají, při současné integraci, povrchové příspěvky a tudíž jsou rovny nule. Výsledkem dostáváme

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s = - \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \int d(s+1) \dots dN \sum_{j=s+1}^N \mathbf{G}_{ij} f_N . \tag{144}$$

Toto je klíčová rovnice určující časový vývoj redukované distribuční funkce. Vidíme, že dynamika distribuční funkce  $f_s(1, \dots, s)$  se zbývajícími částicemi v tekutině je dán pravou stranou rovnice (144).

Abychom pokročili dále ve zjednodušení rovnice (144) musíme zavést předpoklad, že částice v tekutině jsou identické a tedy  $f_s(1, 2, \dots, s)$  je symetrická při výměně jednodlivých stavů částic. Jinými slovy předpokládáme, že

$$f_3(1, 2, 3) = f_3(1, 3, 2) = f_3(3, 2, 1) = f_3(3, 1, 2) = f_3(2, 3, 1) = f_3(2, 1, 3) . \tag{145}$$

Abychom ukázali ekvivalenci integrálů, když provádíme sumaci přes  $j$ , musí například platit

$$\int d2d3 \dots \mathbf{G}_{12} f_N(1, 2, 3, \dots) = \int d2d3 \dots \mathbf{G}_{13} f_N(1, 2, 3, \dots) \tag{146}$$

což můžeme, při provedení integrace přes  $4, \dots, N$  psát jako

$$\int d2d3\mathbf{G}_{12}f_3(1, 2, 3) = \int d2d3\mathbf{G}_{13}f_3(1, 2, 3) . \quad (147)$$

Jestliže nyní provedeme na levé straně integraci přes  $d3$  a pravou stranu přes  $d2$  dostaneme (kde jsme využili předpoklad (145), tedy  $f_3(1, 2, 3) = f_3(1, 3, 2)$ )

$$\int d2\mathbf{G}_{12}f_2(1, 2) = \int d3\mathbf{G}_{13}f_2(1, 3) . \quad (148)$$

Jestliže nyní nahradíme integrační proměnnou na pravé straně 3 proměnnou 2 dostaneme rovnost. Pak tedy vidíme, že každý člen v  $(N - 1)j$  sumě dává identický příspěvek a tedy dostáváme

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s + (N - s) \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \int d(s+1) \dots dN \mathbf{G}_{i,s+1} f_N = 0 . \quad (149)$$

Nyní vidíme, že při integraci přes  $d(s+2) \dots dN$  dostaneme  $f_{s+1}$ , což nám dává fundamentální rovnici

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s + (N - s) \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \int d(s+1) \mathbf{G}_{i,s+1} f_{s+1} = 0 , 1 \leq s \leq N . \quad (150)$$

Tento systém  $N$  vázaných rovnic se nazývá BBKGY rovnice podle jejich autorů, kterými jsou N.N. Bogoliubov, M. Born, G. Kirkwood, H. S. Green and J. Yvon. Tyto rovnice se nazývají hierarchie. V následující diskuzi použijeme notaci  $BY_s$ , abychom označili  $s$ -tou rovnici v této hierarchii. Nechť uvedeme následující vlastnosti tohoto systému

- Toto je systém  $N$  rovnic, kde  $N$ -tá z nich je Liouvillova rovnice pro  $f_N$ .
- Definujeme

$$\frac{Df_s}{Dt} \equiv \frac{\partial f_s}{\partial t} - \hat{L}_s f_s \quad (151)$$

pak z (150) dostaneme pro podskupinu  $s$  částic, kde  $s < N$

$$\frac{Df_s}{Dt} \neq 0 . \quad (152)$$

Jinými slovy,  $f_s(1, 2, \dots, s)$  není konstantní podél trajektorie ve fázovém prostoru podprostoru odpovídajícímu  $s$ -částicím, což je důsledek interakce mezi  $s$ -částicemi a zbývajícími částicemi v souboru  $N$  částic.

- Třetí vlastnost má speciální význam pro kinematiku, která nás speciálně zajímá. Týká se první rovnice v daném systému  $BY_1$ . Tato rovnice je obecnou formou všech kinetických rovnic. *Kinetická rovnice* je uzavřená rovnice pro  $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ . Abychom viděli původ této rovnice uvažujme první rovnici v (150), kterou přepíšeme do formy

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} f_1 = -\hat{A}_1 f_2(1, 2) \quad (153)$$

kde  $\hat{A}_1$  vyplývá z (150). Kinetickou rovnicí dostaneme, jestliže budeme schopni provést následující operaci

$$\hat{A}_1 f_2(1, 2) = \hat{J}(f_1) , \quad (154)$$

kde  $\hat{J}$  se typicky nazývá kolizním integrálem, zobrazuje funkci na funkci. Nejjednodušší způsob, jak takový integrál zavést, je předpokládat, že  $f_2(1, 2)$  je funkcí  $f_1(1)$ . Například, ve Vlasovově aproximaci uvažujeme  $f_2(1, 2) = f_1(1)f_1(2)$ . V případě obecnějšího Bogoliubovova ansatzu máme  $f_s(1, 2) = f_2[1, 2, f_1]$ .

## 2.2 Vlasovova aproximace

Uvažujme  $BY_s$  rovnici v limitě, kdy  $N \gg s$

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s \right) f_s = \hat{I}_s f_{s+1} , \quad (155)$$

kde

$$\hat{I}_s \equiv -N \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \int d(s+1) \mathbf{G}_{i,s+1} . \quad (156)$$

Předpokládejme, že tekutina je tvořena z  $N$  částic, které jsou obsaženy v objemu  $N$ . Pak je možné zavést charakteristický počet částic

$$n_0 \equiv \frac{N}{V} . \quad (157)$$

Dále předpokládejme, že můžeme zavést střední teplotní rychlost,  $C$ , a odpovídající teplotu  $T$  v tekutině, tak že

$$mC^2 \equiv k_B T , \quad (158)$$



kde  $k_B$  je Boltzmanova konstanta. Síla potenciálu a charakteristická délková škála  $r_0$  jsou definovány jako

$$G_{ij} = \frac{\Phi_0}{r_0} \bar{G}_{ij} , \quad (159)$$

kde  $\bar{G}_{ij}$  je bezrozměrná veličina. Dále provedeme renormalizaci funkce  $f_s$ , tak že

$$F_s \equiv V^s f_s \quad (160)$$

V případě prostorově homogenního plynu dostaneme, že

$$f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{V} F_1(\mathbf{p}) . \quad (161)$$

Jestliže víme, že  $f_1(\mathbf{x}, \mathbf{p})$  udává pravděpodobnost, že jedna částice se nachází ve fázovém objemu v okolí bodu  $\mathbf{x}, \mathbf{p}$  o velikosti  $d^3\mathbf{x}, d^3\mathbf{p}$ , pak je jasné, že hustota počtu částic v bodě  $\mathbf{x}$ , kterou označíme jako  $n(\mathbf{x}, t)$  je dána výrazem

$$n(\mathbf{x}, t) = N \int f_1 d^3\mathbf{p} = n_0 \int F_1 d^3\mathbf{p} \quad (162)$$

Abychom dostali rovnici pro  $F_s$ , vynásobíme obě strany rovnice (155)  $V^s$  a dostaneme

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_l \hat{K}_l - \sum_{i < j} \sum \hat{O}_{ij} \right) F_s = \frac{1}{V} \hat{I}_s F_{s+1} . \quad (163)$$

V následujícím kroku zavedeme bezrozměrné veličiny, které označíme pruhem nad daným symbolem

$$\begin{aligned} x &= r_0 \bar{x} , p = mC \bar{p} , \\ t &= \frac{r_0}{C} \bar{t} , \quad F_s = (mC)^{-3s} \bar{F}_s . \end{aligned} \quad (164)$$

Poznamenejme, že je zde velmi mnoho možností volby charakteristických škál pro danou analýzu. Můžeme položit  $r_0$ , aby bylo rovno charakteristické délce silového působení, či můžeme definovat  $r_0$  jako

$$r_0 = n_0^{-1/3} \quad (165)$$

nebo

$$r_0 = V^{1/3} . \quad (166)$$

Pomocí bezrozměrných veličin dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial C}{\partial \bar{t} r_0}, \\ \hat{K} &= \sum_l \frac{\mathbf{p}_l}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_l} = \sum_l \frac{C}{r_0} \bar{\mathbf{p}}_l \cdot \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{x}}_l} = \frac{C}{r_0} \hat{K} \\ \hat{O}_{ij} &= \mathbf{G}_{ij} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right) = \frac{\Phi_0}{r_0 C} \bar{\mathbf{G}}_{ij} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{p}}_i} - \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{p}}_j} \right) \equiv \frac{\Phi_0}{m r_0 C} \bar{\hat{O}}_{ij}, \end{aligned} \quad (167)$$

a konečně máme

$$\begin{aligned} \hat{I}_s &= -N \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \int d^3 \mathbf{x}_{s+1} d^3 \mathbf{p}_{s+1} \mathbf{G}_{i,s+1} = \\ &= -n_0 V \frac{1}{mC} \frac{\Phi_0}{r_0} r_0^3 (mC)^3 \sum_{i=1}^s \frac{\partial}{\partial \bar{\mathbf{p}}_i} \cdot \int d^3 \bar{\mathbf{x}}_{s+1} d^3 \bar{\mathbf{p}}_{s+1} \bar{\mathbf{G}}_{i,s+1} = \Phi_0 r_0^2 (mC)^2 \bar{\hat{I}}_s. \end{aligned} \quad (168)$$

Nyní vložíme tyto výrazy do (163) a dostaneme

$$\begin{aligned} &\frac{C_0}{r_0} \left( \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \sum_l \hat{K}_l - \frac{\Phi_0}{mC^2} \sum_{i<j} \hat{O}_{ij} \right) (mC)^{-3s} \bar{F}_s = \\ &= \frac{1}{V} n_0 V \Phi_0 r_0^2 (mC)^2 \bar{\hat{I}}_s (mC)^{-3(s+1)} \bar{F}_{s+1} \Rightarrow \\ &\left( \frac{\partial}{\partial \bar{t}} + \sum_l \hat{K}_l - \frac{\Phi_0}{mC^2} \sum_{i<j} \hat{O}_{ij} \right) \bar{F}_s = (n_0 r_0^3) \left( \frac{\Phi_0}{mC^2} \right) \hat{I}_s \bar{F}_{s+1}. \end{aligned} \quad (169)$$

Nyní definujeme parametry

$$\alpha \equiv \frac{\Phi_0}{mC^2} = \frac{\Phi_0}{k_B T}, \gamma^{-1} \equiv n_0 r_0^3. \quad (170)$$

Poté berzorměrná rovnice (169), když nebudeme psát čárku nad symboly, má tvar

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \sum_{l=1}^s \hat{K}_l - \alpha \sum_{i<j}^s \hat{O}_{ij} \right) F_s = \frac{\alpha}{\gamma} \hat{I}_s F_{s+1}. \quad (171)$$

Uvažujme nyní koeficient

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{n_0 r_0^3 \Phi_0}{k_B T} . \quad (172)$$

Jesliže nyní zvolíme, že  $r_0$  odpovídá charakteristické škále interakce, je vhodné zavést veličinu  $\mathcal{N}_0$  následujícím způsobem

$$\mathcal{N}_0 = n_0 r_0^3 , \quad (173)$$

která udává počet částic ve sféře dosahu dané interakce. Pak dostaneme

$$\frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\mathcal{N}_0^2 \Phi_0}{\mathcal{N}_0 k_B T} \simeq \frac{\langle E_\Phi \rangle}{\langle E_k \rangle} , \quad (174)$$

kde  $\langle E_\Phi \rangle$  reprezentuje střední interakční energii na jednotku dosahu dané interakce, zatímco veličina  $\langle E_k \rangle$  reprezentuje termální energii obsaženou v daném objemu. Je zřejmé, že můžeme jejich podíl interpretovat jako míru průměrné potenciální a kinetické energie v dané tekutině. Poté je přirozené definovat jako *silně interagující tekutinu*, jestliže platí  $\alpha/\gamma \geq 1$ , pak hovoříme o slabě interagujícím tekutině, jestliže platí  $\alpha/\gamma \ll 1$ .

Nyní přistoupíme k diskusi důležitého pojmu, jakým je statistická nezávislost částic v tekutině. Intuitivně je zřejmé, že částice jsou statisticky nezávislé, jesliže jsou nekorelované. Podrobněji, definujeme korelační funkci mezi dvěma částicemi pomocí relace

$$f_2(1, 2) = f_1(1)f_1(2) + C_2(1, 2) . \quad (175)$$

Jinými slovy, v případě, že neexistuje korelace mezi dvěma částicemi, to jest  $C_2(1, 2) = 0$ , pak dané částice jsou statisticky nezávislé a tudíž pravděpodobnost, že najdeme 1 částici v určitém bodě fázového prostoru a 2 částici v dalším bodě fázového prostoru, reprezentovanou funkcí  $f_2(1, 2)$ , je dána součinem pravděpodobnosti  $f_1(1)f_1(2)$ . Jestliže budeme pokračovat dále, dostaneme vztah

$$(f_1, f_2, \dots, f_N) \rightarrow (f_1, C_2, C_3, \dots, C_N) . \quad (176)$$

kde opakováním předchozí iterace dostaneme

$$\begin{aligned} f_2(1, 2) &= f_1(1)f_1(2) + C_2(1, 2) , \\ f_3(1, 2, 3) &= f_2(1, 2)f_1(3) + f_2(1, 3)f_1(2) + f_2(2, 3)f_1(1) + C_3(1, 2, 3) = \\ &= f_1(1)f_1(2)f_1(3) + \sum_{P(1,2,3)} f_1(1)C_2(2, 3) + C_3(1, 2, 3) \end{aligned} \quad (177)$$

Pomocí těchto pojmů můžeme přistoupit k definování tzv. Vlasovovy limity, kdy předpokládáme, že  $\Phi_0/k_B T \ll 1$  a zároveň předpokládáme dalekodosahové interakce, kdy zjevně i dosah daných interakcí je velký, což nám říká, že  $r_0$  je velké a tedy  $n_0 r_0^3 \gg 1$ . Jinými slovy řečeno, Vlasovova limita odpovídá případu

$$\alpha = \frac{\Phi_0}{k_B T} \ll 1, \quad \gamma^{-1} = n_0 r_0^3 \gg 1. \quad (178)$$

Je užitečné zavést parametr malosti  $\epsilon \ll 1$  s tím, že definujeme Vlasovovu limitu následujícím způsobem

$$\alpha \rightarrow \epsilon \alpha, \quad \gamma^{-1} \rightarrow \frac{1}{\epsilon} \gamma^{-1}. \quad (179)$$

Zjevně také máme  $\alpha/\gamma = \mathcal{O}(1)$ . V případě, kdy  $k_B T \gg \Phi_0$  můžeme očekávat, že korelace mezi částicemi v tekutině jsou malé. Matematicky můžeme toto vyjádřit tím, že vložíme faktor  $\epsilon$  ke každé korelační funkci. Explicitně máme

$$\begin{aligned} f_2 &= f_1 f_1 + \epsilon C_2, \\ f_3 &= f_1 f_1 f_1 + \epsilon \sum_P f_1 C_2 + \epsilon^2 C_3 \end{aligned} \quad (180)$$

kde předpokládáme, že tyto rozdělovací funkce jsou bezrozměrné a tedy  $f_s = F_s$ . Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\kappa}_1 \right) F_1 &= \frac{\alpha}{\gamma} \hat{I}_1 [F_1(1)F_2(2) + \epsilon C_2(1, 2)], \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\kappa}_2 - \epsilon \alpha \hat{O}_{12} \right) [F_1(1)F_2(2) + \epsilon C_2(1, 2)] &= \\ &= \frac{\alpha}{\gamma} \hat{I}_2 [F_1(1)F_1(2)F_1(3) + \epsilon F_1(1)C_2(2, 3) + \\ &\quad + \epsilon F_1(2)C_2(3, 1) + \epsilon F_1(3)C_2(1, 2)] \\ &\quad \vdots \end{aligned} \quad (181)$$

kde

$$\hat{\kappa}_s \equiv \sum_{i=1}^s \hat{K}_i. \quad (182)$$

Porovnáním členů stejného řádu v  $\epsilon$  a když se omezíme na členy nejnižších řádů, dostaneme

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\kappa}_1\right) F_1(1) &= \frac{\alpha}{\gamma} \hat{I}_1 F_1(1) F_1(2) , \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} + \hat{\kappa}_2\right) F_1(1) F_2(2) &= \frac{\alpha}{\gamma} \hat{I}_2 F_1(1) F_1(2) F_1(3) , \\ &\vdots \end{aligned} \tag{183}$$

Ukazuje se, že obecně dostaneme  $N$  rovnic pro jednu neznámou funkci  $F_1$ , což nám logicky dává, že  $N$  těchto rovnic musí být redundantní. Dá se ukázat, že tomu je skutečně tak, neboli jestliže  $F_1(1)$  splňuje první rovnici v (181), pak všechny další rovnice jsou také splněny. Nyní přepíšeme tedy tuto první rovnici do plného tvaru s přesně danými rozměry fyzikálních veličin

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}}\right) F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = -\frac{n_0}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{v}' \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) F_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) . \tag{184}$$

kde jsme použili rovnost  $F_1(\mathbf{p}) d^3 \mathbf{p} = F_1(\mathbf{v}) d^3 \mathbf{v}$ . Tato rovnice se nazývá *Vlasovovou rovnicí*. Abychom získali větší fyzikální náhled na tuto rovnici, je vhodné použít hustoty počtu částic

$$n(\mathbf{x}', t) = N \int d^3 \mathbf{p}' f_1(\mathbf{x}', \mathbf{p}', t) = \frac{N}{V} \int d^3 \mathbf{v} F_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}, t) . \tag{185}$$

Poté zavedeme střední hodnotu síly

$$\mathbf{G}(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{x}' n(\mathbf{x}', t) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') . \tag{186}$$

což můžeme fyzikálně interpretovat jako sílu od všech částic v daném objemu působící na částici v bodě  $\mathbf{x}$ . Pak integrál v (184) má tvar

$$\begin{aligned} &\frac{n_0}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \int d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{v}' \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) F_1(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \int d^3 \mathbf{x}' n(\mathbf{x}', t) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) \cdot \mathbf{G}(\mathbf{x}, t) . \end{aligned} \tag{187}$$

Vidíme tedy, že Vlasovovu rovnici (184) můžeme přepsat do tvaru

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{G}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \right) F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = 0 . \quad (188)$$

Fyzikální interpretace této rovnice je následující. Časový vývoj  $F_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  je ovlivněn silovým polem, které je dány okamžitým působením všech částic v dané tekutině. Je velice zajímavé, že Vlasovova rovnice (184) je velmi podobná jednočásticové *Liouvillově rovnici*, která odpovídá částici pohybující se ve vnějším silovém poli. Hamiltonian pro tuto částici má tvar

$$H = \frac{p^2}{2m} + \Phi(\mathbf{x}) \quad (189)$$

kde  $\tilde{\mathbf{G}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \Phi(\mathbf{x})$  je vnější síla. Liouvillova rovnice pro tento system má tvar

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} \cdot \tilde{\mathbf{G}} = 0 \end{aligned} \quad (190)$$

Je lehké dokázat, že řešení jednočásticové Liouvillovy rovnice má tvar

$$F = F\left[\frac{p^2}{2m} + \Phi(\mathbf{x})\right] \quad (191)$$

neboť

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbf{p}} = F' \frac{\mathbf{p}}{m}, \quad \frac{\partial F}{\partial \mathbf{x}} = -F' \tilde{\mathbf{G}}, \quad (192)$$

kde samozřejmě je nutné poznamenat, že  $\Phi$  je potenciál vnější síly, zatím co v případě Vlasovovy rovnice máme

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \mathbf{x}} = -n_0 \int F(\mathbf{x}', \mathbf{v}', t) \mathbf{G}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}' d^3 \mathbf{v}' \quad (193)$$

což znamená, že je možné určit  $\Phi$  za předpokladu, že známe funkci  $F$ .

### 2.3 Prigoginova analýza

V této kapitole stručně nastíníme princip poruchové techniky řešení Liouvillovy rovnice. Jednou z důležitých aplikací této metody je odvození Boltzmanovy rovnice.

### 2.3.1 Poruchy Liouvillova operátoru

Uvažujme opět Liouvillov operátor

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} = \hat{L}_N f_N \quad (194)$$

kde

$$\hat{L}_N = \{H, \} \quad (195)$$

nebo explicitně

$$\hat{L}_N = \sum_l \hat{K}_l + \sum_{i < j} \sum_{i < j}^N \hat{O}_{ij} . \quad (196)$$

Nyní přepíšeme tento operátor do tvaru

$$\hat{L}_N = \hat{L}_0 + \delta\hat{L} , \quad (197)$$

kde  $\hat{L}_0$  je kinetický operátor volných částic a kde

$$\delta\hat{L} = \sum_{i < j} \sum_{i < j} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \Phi_{ij} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right] \quad (198)$$

je porucha  $\hat{L}_0$ .

Nyní se zaměříme na kinetický operátor volných částic, které jsou obsaženy v krychli o velikosti  $L$ . V tomto případě máme

$$\hat{K} = - \sum_{s=1}^N \frac{\mathbf{p}_s}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_s} , 0 \leq x_s^{(i)} \leq L . \quad (199)$$

Vlastní vektory daného operátoru jsou

$$\begin{aligned} \hat{K}\psi(\mathbf{k}) &= -i\omega(\mathbf{k})\psi(\mathbf{k}) , \\ \psi(\mathbf{k}) &= L^{-3N/2} \exp[i \sum \mathbf{k}_l \mathbf{x}_l] \equiv |(\mathbf{k})\rangle \\ \omega(\mathbf{k}) &= \sum \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{v}_l \end{aligned} \quad (200)$$

kde  $\mathbf{v}_l = \frac{\mathbf{p}_l}{m}$  a kde  $(\mathbf{k}) = (\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_N)$ . Poznamenejme, že periodické hraniční podmínky dávají

$$\mathbf{k}_i = \frac{2\pi}{L} \mathbf{n}_i , \quad (201)$$

kde  $\mathbf{n}_i$  jsou celá čísla. Nyní použijeme tuto bázi pro hledání řešení obecné Liouvillový rovnice, kde předpokládáme řešení ve tvaru

$$f_N(1, \dots, N) = \sum_{(\mathbf{k})} a_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N, t) \psi_{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^N) e^{-i\omega_{(\mathbf{k})}t}. \quad (202)$$

Nyní ukážeme, že toto řešení může být přepsáno do vhodného tvaru, kde koeficienty mají speciální fyzikální význam. Tento přepis má tvar

$$\begin{aligned} f_N = & \frac{1}{V^N} \left[ a_0(\mathbf{p}_j | \dots, t) + \frac{1}{\bar{V}} \sum_{j=1}^N \sum'_{\mathbf{k}_j} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_j, t) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}_j} e^{-i\omega_j t} + \right. \\ & + \frac{1}{\bar{V}^2} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sum'_{\mathbf{k}'_j} \sum'_{\mathbf{k}_l, \mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l \neq 0} \times \times a_{\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l}(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l | 0, t) e^{i[\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}_j + \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}_l]} e^{-i\omega_{jl} t} + \\ & \left. + \frac{1}{\bar{V}} \sum_{j=1}^N \sum_{l=1}^N \sum'_{\mathbf{k}} a_{\mathbf{k}, -\mathbf{k}}(\mathbf{p}_j, \mathbf{p}_l | 0, t) e^{i\mathbf{k}(\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_l)} + \dots \right] \end{aligned} \quad (203)$$

kde čárka nad sumačním symbolem znamená, že provádíme sumu, kde dané vektory jsou nenulové, v opačném případě by tento koeficient měl být započítán do předchozího řádu. Koeficienty v tomto rozvoji mají tu důležitou vlastnost, že  $a_{\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n}(\mathbf{p}^N, t)$  obsahují  $n$  nenulových vektorů, například  $a_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2}$  obsahuje 2 nenulové vektory. Dále, hybnosti, na kterých závisí daná Fourierova komponenta, se rozdělují na dvě skupiny, rozdělené vertikální čarou. Vektory na levo od čárky odpovídají částicím, jejichž vlnové vektory jsou nenulové a na pravo od čárky jsou uvedené všechny ostatní hybnosti. Konečně, objem  $\bar{V}$  je definován jako  $\bar{V} \equiv V/(2\pi)^3$ .

Členy v druhé sumě, kdy  $\mathbf{k}_j + \mathbf{k}_l = 0$  jsou důležité při tzv. limitě homogenity, která nám říká, že systém je homogenní, pak  $f_N$  je invariantní při posunu souřadnic

$$(\mathbf{x}_l) \rightarrow (\mathbf{x}'_l) = (\mathbf{x}_l + \mathbf{b}) \quad (204)$$

pak dostáváme

$$\sum_{(\mathbf{k})} a_{(\mathbf{k})} e^{i \sum \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}_l} = \sum_{(\mathbf{k})} a_{(\mathbf{k})} e^{i \sum \mathbf{k}_l \cdot \mathbf{x}_l} e^{i \mathbf{b} \cdot \sum \mathbf{k}_l} \quad (205)$$

Tato rovnost je splněna pro všechna  $\mathbf{k}_l$  a  $\mathbf{x}_l$  za předpokladu, že  $\sum \mathbf{k}_l = 0$  pro všechny  $(\mathbf{k})$  sequence.



Nyní můžeme přistoupit k interpretaci koeficientů, které vystupují v (203)  
Nejdříve provedeme integraci přes  $\mathbf{x}_1 \dots \mathbf{x}_N$

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{x}_1 \dots d^3\mathbf{x}_N f_N = \\ & = \frac{1}{V^N} \int d^3\mathbf{x}_1 \dots d^3\mathbf{x}_N \left[ a_0(\mathbf{p}^N, t) + \frac{1}{V} \sum_j \sum_{\mathbf{k}_j} a_1(\mathbf{k}_j, \mathbf{p}^N, t) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}_j} e^{-i\omega_j t} + \dots \right] \end{aligned} \quad (206)$$

Nyní v limitě velkého objemu můžeme nahradit sumu integrací

$$\frac{1}{V} \sum_{\mathbf{k}} \rightarrow \int d^3\mathbf{k} \quad (207)$$

což také dává

$$\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{x} = \delta(\mathbf{k}) . \quad (208)$$

což nám říká, že druhý člen v (206) dává  $\delta(\mathbf{k})$  při integraci přes  $d\mathbf{x}^N$ . Pak dostáváme, že všechny další příspěvky při integraci dávají nulu Jinými slovy

$$\int d^3\mathbf{x}_1 \dots d^3\mathbf{x}_N f_N = a_0(\mathbf{p}^N, t) \quad (209)$$

kde z definice normování funkce  $f_N$  platí

$$\int d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N a_0(\mathbf{p}^N, t) = 1 . \quad (210)$$

Vidíme tedy, že  $a_0(\mathbf{p}^N, t)$  je distribuční funkce rozložení hybnosti pro  $N$  částic.

Hustota počtu částic je dána integrálem

$$n_1(\mathbf{x}) = n_1(\mathbf{x}_l) = N \int f_N d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 \dots d^3\mathbf{x}_{l-1} d^3\mathbf{x}_{l+1} \dots d^3\mathbf{x}_N \quad (211)$$

zatím co distribuce dvojic je dána integrálem

$$\begin{aligned} n_2(\mathbf{x}, \mathbf{x}') &= n_2(\mathbf{x}_s, \mathbf{x}_n) = \\ &= \frac{N(N-1)}{2} \int f_N d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N d^3\mathbf{x}_1 \dots d^3\mathbf{x}_{s-1} d^3\mathbf{x}_{s+1} \dots d^3\mathbf{x}_{n-1} d^3\mathbf{x}_{n+1} \dots d^3\mathbf{x}_N . \end{aligned} \quad (212)$$

Nyní určíme hodnoty těchto funkcí pro  $f_N$  danou (203)

$$n_1(\mathbf{x}_s) = \frac{N}{V^N} \int d^3\mathbf{p}_1 \dots d^3\mathbf{p}_N \prod_{i \neq s} d^3\mathbf{x}_i \cdot \left[ a_0(\mathbf{p}, t) + \frac{1}{V} \sum_{j=1}^N \sum_{\mathbf{k}_j} a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p}_j | 0, t) e^{i\mathbf{k}_j \cdot \mathbf{x}_j - i\omega_j t} + \dots \right] \quad (213)$$

V limitě velkého integrálu při integraci přes  $\mathbf{x}_i, i \neq s$  dostáváme  $\delta(\mathbf{k}_i)$ , což nám dává  $\mathbf{k}_i = 0, i \neq s$ . Pak tedy všechny členy, pro které platí, že  $j \neq s$  jsou rovny nule, protože z definice máme  $a_1(0, \mathbf{p}, t) = 0$ . Dále, každý člen v sumě, která obsahuje  $a_2(\mathbf{k}_j, \mathbf{k}_l, \mathbf{p}, t)$  obsahují buď  $\delta(\mathbf{k}_j)$  nebo  $\delta(\mathbf{k}_l)$  jako důsledek integrace  $\int d^3\mathbf{x}_j$  nebo  $\int d^3\mathbf{x}_l$ . Pak dostáváme, že všechny členy v dané sumě jsou rovny nule díky tomu, že z definice máme

$$a_2(0, \mathbf{k}_l) = a_2(\mathbf{k}_j, 0) = 0. \quad (214)$$

Stejně argumenty můžeme použít pro členy vyšších řádu v rozvoji (203). Výsledkem dostaneme

$$n_1(\mathbf{x}) = \frac{N}{V} \left[ 1 + \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{p}_i a_{\mathbf{k}}(\mathbf{p} | \dots, t) e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} d^3\mathbf{k} \right]. \quad (215)$$

V limitě prostorové homogenity dostaneme  $\mathbf{k} = 0, a_{\mathbf{k}}(0, \mathbf{p}, t) = 0$  a tedy

$$n_1 = \frac{N}{V}. \quad (216)$$

### 2.3.2 Pohybové rovnice pro koeficienty $a_{(\mathbf{k})}$

Nyní přejdeme k odvození pohybové rovnice pro koeficienty  $\mathbf{a}_{(\mathbf{k})}$ . Jestliže vložíme (203) do Liouvillovy rovnice dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \sum_{(\mathbf{k}')} a_{(\mathbf{k}')} e^{-i\omega_{(\mathbf{k}')} t} |(\mathbf{k}')\rangle = (\hat{L}_0 + \delta\hat{L}) \sum_{(\mathbf{k}')} \langle(\mathbf{k}')| a_{(\mathbf{k}')} e^{-i\omega_{(\mathbf{k}')} t}. \quad (217)$$

Provedeme derivaci vzhledem k času na levé straně rovnice, poté ji vynásobíme zleva vektorem  $\langle(\mathbf{k})|$  a s užitím ortogonality vektorů dostaneme pohybovou

rovnici pro  $a$  ve tvaru

$$\frac{\partial}{\partial t} a_{(\mathbf{k})} = \sum_{(\mathbf{k}')} e^{i\omega_{(\mathbf{k})}t} \langle (\mathbf{k}) | \delta \hat{L} | (\mathbf{k}') \rangle e^{i\omega_{(\mathbf{k}')}t} a_{(\mathbf{k}')} . \quad (218)$$

Další analýza této rovnice probíhá podobným způsobem jako v případě poruchového počtu v kvantové mechanice. Ukazuje se, že různé členy v poruchovém rozvoji mohou být reprezentovány graficky podobným způsobem, jako Feynmanovy diagramy. Tato analýza je ovšem velice složitá a nemůže být obsažena v této přednášce, pro podrobnější popis odkazují na I. Prigogine, *Non-equilibrium Statistical Mechanics*.

## 2.4 Bogoliubova Hypotéza

### 2.4.1 Intervaly času a délky

V této kapitole se budeme stručně zabívat Bogoliubovou hypotézou týkající se dosažení rovnováhy v původním nerovnovážném plynu. Týká se plynu v uzavřeném prostoru a definuje tři časové intervaly, které označíme jako  $\tau_1, \tau_2$  a  $\tau_3$ . V časovém intervalu  $\tau_1$  se dvě molekuly nacházejí ve vzájemném interakčním dosahu. Interval  $\tau_2$  je střední doba mezi dvěma interakcemi. Konečně  $\tau_3$  je průměrná doba, za kterou molekula překoná vzdálenost mezi dvěma stěnami, které vymezují oblast, kde se daný plyn nachází. Je zřejmé, že mezi těmito časovými úseky existuje následující souvislost

$$\tau_1 \ll \tau_2 \ll \tau_3 . \quad (219)$$

K těmto časovým intervalům můžeme přiřadit odpovídající charakteristické délky  $\lambda_1, \lambda_2$  and  $\lambda_3$ , kde  $\lambda_1$  je charakteristická vzdálenost interakce,  $\lambda_2$  je střední volná dráha a  $\lambda_3$  je charakteristická rozměr oblasti, v které se nacházejí částice. Například pro plyn, kde střední molekulová rychlost je  $300 \text{ms}^{-1}$  a za standartních podmínek, kdy je plyn obsažen v nádobě o charakteristickém rozměru  $\lambda_3 = 3 \text{cm}$  dostáváme

	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$
cm	$3 \times 10^{-8}$	$3 \times 10^{-5}$	3
	$\tau_1$	$\tau_2$	$\tau_3$
sec	$10^{-12}$	$10^{-9}$	$10^{-4}$

Bogoljubova hypotéza se týká funkcionální závislosti  $N$ –částicové distribuční funkce  $f_N(1, \dots, N)$ , která je závislá na relaxaci plynu směrem k rovnovážné konfiguraci. Tyto časové intervaly jsou definované následující tabulkou

$0 < t < \tau_1$	počáteční fáze
$\tau_1 < t \leq \tau_2$	Kinetická fáze
$\tau_2 < t$	Hydrodynamická fáze

V počátečním intervalu neexistuje žádná srážky mezi molekulami a tedy počáteční nerovnovážný stav není ovlivněn žádnou silou, která popisuje interakci mezi srážkami. To znamená, že v počáteční fázi musíme použít celou,  $N$ –částicovou distribuční funkci pro popsání stavu plynu.

Během *kinetické fáze* dochází ke kolizím molekul a tedy existuje tendence k rovnovážné konfiguraci. V tomto případě je vyslovena hypotéza, že všechny  $s$ –částicové distribuční funkce jsou funkcionály jednočásticové distribuční funkce

$$f_s = f_s(1, \dots, s, f_1) \quad (220)$$

kde explicitní časová závislost vystupuje zcela v  $f_1$ . Například, v případě, že molekuly jsou statisticky nezávislé, dostáváme

$$f_s = \prod_{i=1}^s f_1(i) . \quad (221)$$

Konečně, během *hydrodynamické fáze* se předpokládá, že distribuční funkce je funkcí hydrodynamických veličin  $n, \mathbf{u}$  a  $T$ , kde  $n$  je hustota částic,  $\mathbf{u}$  je makroskopická rychlost tekutiny a  $T$  je její teplota.

Jinými slovy máme následující popis. Jak systém relaxuje z původní nerovnovážného stavu do konečného rovnovážného stavu, dochází k redukci v úrovni popisu, která je odpovídající pro danou tekutinu. Na počátku je nutné znát obecnou  $N$ –částicovou distribuční funkci. V rovnovážném stavu je dostatečné znát  $n, \mathbf{u}$  a  $T$ .

#### 2.4.2 Bogoljubovy distribuční funkce

Uvažujme opět distribuční funkci

$$F_s = V^s f_s . \quad (222)$$

Poznamenejme, že pro homogenní tekutinu,  $F_s$  je funkcí pouze hybností. Jesliže přepíšeme  $s$ -tou Bogoljubovu rovnice pomocí této distribuce, dostaneme

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s\right) F_s - \frac{N-s}{V} \sum_{i=1}^s \int \hat{O}_{i,s+1} F_{s+1} d(s+1) = 0 \quad (223)$$

kde  $\hat{O}_{ij}$  má tvar

$$\hat{O}_{ij} = -\mathbf{G}_{ij} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_i} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_j} \right), \quad (224)$$

a kde, což je fundamentální fakt,  $\hat{L}_s$  má tvar

$$\hat{L}_s = - \sum_{l=1}^s \hat{K}_l + \sum_{i<j}^s \hat{O}_{ij}, \quad (225)$$

kde  $\hat{O}_{ij}$  specifikuje interakci mezi  $s$ - částicemi. Je důležité, že uvažujeme částice, které spolu interagují, že se nejedná o volné částice. Je zřejmé, že tento interakční člen také implicitně zahrnuje srážky mezi částicemi, což můžeme modelovat pomocí interakčního členu velice krátkého dosahu, byť matematický popis je velice obtížný.

Termodynamickou limitu dostaneme, kdy  $N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty$  a současně platí

$$\lim_{N \rightarrow \infty, V \rightarrow \infty} \frac{N-s}{V} = \lim \frac{N}{V} = \frac{1}{v}, \quad (226)$$

kde  $v$  je *specifický objem*, který definujeme jako objem, jenž zaujímá jedna částice. V této limitě rovnice (223) má tvar

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_s\right) F_s - \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \int \hat{O}_{i,s+1} F_{s+1} d(s+1) = 0 \quad (227)$$

Nyní předpokládáme, že rozdělovací funkce má tvar

$$F_s = F_s(1, \dots, s, F_1). \quad (228)$$

Protože explicitní časová závislost je zahrnuta do funkce  $F_1$ , dostaneme

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \frac{\delta F_s}{\delta F_1} \frac{\partial F_1}{\partial t}. \quad (229)$$

Jako jednoduchý příklad uvažujme statisticky nezávislé molekuly, kdy máme

$$F_s = \prod_{l=1}^s F_l(s) \quad (230)$$

kde (228) dává

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \sum_k \frac{\partial F_1(k)}{\partial t} \prod_{l \neq k} F_1(l) . \quad (231)$$

Je důležité poznamenat, že Bogoljubova analýza je relevantní pro řídké plyny, kdy specifický objem  $v$  je velký. Pak je možné použít následující rozvoj

$$F_s(1, \dots, s; F_1) = F_s^0 + \frac{1}{v} F_s^{(1)} + \frac{1}{v^2} F_s^{(2)} + \dots . \quad (232)$$

Jestliže vložíme tento rozvoj do  $BY_1$  rovnice (227) dostaneme

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} - \hat{L}_1 \right) F_1 - \frac{1}{v} \int d2 \hat{O}_{12} F_2 = 0 \Rightarrow \\ & \frac{\partial F_1}{\partial t} = -\frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{1}{v} \hat{I}_{12} \left[ F_2^{(0)} + \frac{1}{v} F_2^{(1)} + \dots \right] \equiv \\ & \equiv A^{(0)} + \frac{1}{v} A^{(1)} + \dots, \hat{I}_{12} \equiv \int d2 \hat{O}_{12} \end{aligned} \quad (233)$$

Vložením tohoto výsledku do parciální časové derivace  $F_s$  dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial F_s}{\partial t} = \frac{\delta F_s}{\delta F_1} \frac{\partial F_1}{\partial t} = \\ & = \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta F_1} A^{(0)} + \frac{1}{v} \left( \frac{\delta F_s^{(1)}}{\delta F_1} A^{(0)} + \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta F_1} A^{(1)} \right) + \dots \end{aligned} \quad (234)$$

Nyní se vrátíme k rovnici (227) kde použijeme rozvoj (232)

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \hat{L}_s \left[ F_s^{(0)} + \frac{1}{v} F_s^{(1)} + \dots \right] + \frac{1}{v} \sum_{i=1}^s \hat{I}_{i,s+1} \left[ F_{s+1}^{(0)} + \frac{1}{v} F_{s+1}^{(1)} + \dots \right] \quad (235)$$

Jestliže nyní vložíme (234) do (235) a porovnáme členy stejného řádu v  $1/v$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta F_1} A^{(0)} &= \hat{L}_s F_s^{(0)} , \\ \frac{\delta F_s^{(1)}}{\delta F_1} A^{(0)} + \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta F_1} A^{(0)} &= \hat{L}_s F_s^{(1)} + \sum_{i=1}^s \hat{I}_{i,s+1} F_{s+1}^{(0)} , \\ &\vdots \end{aligned} \tag{236}$$

Tyto rovnice určují posloupnost  $\{F_s^{(n)}\}$  v rozvoji (232).

Nyní uvažujme opět rovnici pro  $F_1$

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}_1} = \frac{1}{v} \int d^2 \hat{O}_{12} F_2^{(0)} . \tag{237}$$

Nyní, když najdeme  $F_2^{(0)}(F_1)$ , dostaneme uzavřenou rovnici pro  $F_1$ . Z rovnice (236) dostaneme

$$\hat{D}^{(0)} F_2^{(0)} = \hat{L}_2 F_2^{(0)} , \tag{238}$$

kde

$$\hat{D}^{(0)} F_2^{(0)} = \frac{\delta F_2^{(0)}}{\delta F_1} A^{(0)} . \tag{239}$$

Musíme vyřešit tuto rovnici pro  $F_2^{(0)}(F_1)$  s odpovídajícími hraničními podmínkami, které zvolíme takovým způsobem, že považujeme částice nekorelované v dostatečně vzdálené minulosti.

Uvažujme nyní Liouvillův operátor  $\hat{L}_s$  pro izolovaný systém  $s$ — částic

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \{H_s, F_s\} \equiv \hat{L}_s F_s . \tag{240}$$

která má řešení

$$F_s(t) = e^{t\hat{L}_s} F_s(0) \equiv \hat{\Delta}_t^{(s)} F_s(0) \tag{241}$$

kde operátor  $\hat{\Delta}_t^{(s)}$  má následující vlastnosti

$$\begin{aligned} \hat{\Delta}_0 &= 1 , \\ \hat{\Delta}_{t_1} \hat{\Delta}_{t_2} &= \hat{\Delta}_{t_1+t_2} , \\ \frac{\partial \hat{\Delta}_t}{\partial t} &= \hat{L}_s \hat{\Delta}_t . \end{aligned} \tag{242}$$

Protože operátor  $\hat{\Delta}_t$  propaguje  $s$ -částicový systém v čase, je přirozené s jeho pomocí vyjádřit hraniční podmínku, že pro dostatečně dlouhý čas v minulosti částice nebyly korelované

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} F_s(1, \dots, s; F_1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} \prod_{k=1}^s F_1(k) . \quad (243)$$

Poznamenejme, že tyto hraniční podmínky platí pro všechny jednočásticové rozdělovací funkce. Pak také platí pro jednočásticovou rozdělovací funkci, která vznikne z  $F_1$  propagací pomocí jednočásticového operátoru  $F_1'(k) = \lim_{t \rightarrow \infty} \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1(k)$ . Vložením této podmínky do předchozího definice hraniční podmínky, dostaneme

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} F_s(1, \dots, s; F_1) = \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} \prod_{k=1}^s \hat{\Delta}_{-t}^{(1)} F_1(k) . \quad (244)$$

### Poznámka: Rozdělovací funkce ideálního plynu

Uvažujme ideální plyn, který je dán  $N$  neinteragujícími molekulami a jenž je obsažen v krychli o velikosti hrany  $L$ . V tomto případě Hamiltonián je dán ve tvaru

$$H = \sum_{s=1}^k \frac{p_s^2}{2m} , \quad 0 \leq x_s^{(i)} \leq L \quad (245)$$

Víme, že časový vývoj rozdělovací funkce má formu

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \{H, f\} = - \sum_s \frac{\partial H}{\partial \mathbf{p}_s} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_s} = - \sum_s \mathbf{v}_s \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}_s} \equiv \hat{\Lambda}_s f_s . \quad (246)$$

První krok je najít vlastní hodnoty operátoru  $f$ . Tyto hodnoty byly nalezeny v předchozím výkladu a tedy

$$\psi_{(\mathbf{k})} = \frac{1}{L^{3N/2}} \exp(-i \sum_s \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x}_s) \quad (247)$$

s vlastní hodnotou  $\omega_{(\mathbf{k})} = i \sum_{s=1}^N \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{k}_s$ . Pak je zřejmé, že obecná forma  $N$ -částicové rozdělovací funkce funkce má tvar

$$f(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N) = \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) \psi_{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^N) e^{\omega_{(\mathbf{k})} t} e^{i\omega_{(\mathbf{k})} t} . \quad (248)$$



neboť

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f}{\partial t} + \{f_N, H\} = \\ & i \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) (\omega_{(\mathbf{k})} - \sum_{s=1}^N \mathbf{v}_s \cdot \mathbf{k}_s) D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) \psi_{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^N) e^{\omega_{(\mathbf{k})} t} e^{i\omega_{(\mathbf{k})} t} = 0 . \end{aligned} \quad (249)$$

Abychom určili konečný tvar rozdělovací funkce  $f_0$ , musíme určit koeficienty  $D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N)$ . Označíme si hodnotu rozdělovací funkce  $f$  v čase  $t = 0$  jako  $f_0$

$$f_0(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N) = \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) \psi_{(\mathbf{k})}(\mathbf{x}^N) . \quad (250)$$

Protože vektory  $\psi_{(\mathbf{k})}$  jsou ortogonální, dostáváme

$$D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}) = \frac{1}{L^{3N/2}} \int \prod_{i=1}^N d^3 \mathbf{x}_i [\exp(i \sum_s \mathbf{k}_s \cdot \mathbf{x}_s)] D_0(\mathbf{x}^N, \mathbf{p}^N) \quad (251)$$

Tedy ze známe počáteční hodnoty distribuční funkce dostaneme obecné řešení Liouvillových rovnic pro ideální plyn ve tvaru

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{L^{3N/2}} \sum_{(\mathbf{k})} D_{(\mathbf{k})}(\mathbf{p}^N) e^{-\sum_s \mathbf{k}_s \cdot (\mathbf{x}_s - \frac{\mathbf{p}_s}{m} t)} \quad (252)$$

Vidíme tedy, že operátor  $\hat{\Delta}_t^{(1)} F_1(k)$  můžeme interpretovat jako jednočásticovou funkci v čase  $t$  jenž má tvar  $F_1(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{p}}{m} t, \mathbf{p})$  a tedy dostaneme

$$\begin{aligned} & \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} \prod_{k=1}^s \hat{\Delta}_{-t}^{(1)} F_1(k) = \\ & = \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} \prod_{k=1}^s F_1(\mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{p}_k}{m} t, \mathbf{p}_k) = \\ & = \lim_{t \rightarrow -\infty} \prod_{k=1}^s F_1[\hat{\Delta}_t^{(s)}(\mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{p}_k}{m} t), \hat{\Delta}_t^{(s)} \mathbf{p}_k] = \\ & = \prod_{k=1}^s F_1(\mathbf{x}_k^{(s)}, \mathbf{p}_k^{(s)}) , \end{aligned} \quad (253)$$

kde  $\mathbf{x}_k^{(s)}, m\mathbf{p}_k^{(s)}$  jsou hodnoty fázových proměných  $k$ -té částice v čase  $t = -\infty$ , kdy jsme prováděli časový vývoj v opačném směru od proměnných  $\mathbf{x}_k + \frac{\mathbf{p}_k}{m}t$  a  $\mathbf{p}_k$ .

Uvažujme opět tento výraz

$$\hat{D}^{(0)}F_s^{(0)}(1, \dots, s; F_1) = \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta F_1} A^{(0)} = \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta F_1} \hat{L}_1 F_1, \quad (254)$$

kde jsme využili toho, že  $A_0$  je rovno  $\hat{L}_1 F_1$ . Naším cílem je najít vhodnou reprezentaci funkcionální derivace, která vystupuje v předchozím vztahu. Protože tento vztah platí pro všechna  $F_1$ , musí platit i pro  $\hat{\Delta}_t^{(1)} F_1$ . Pak tedy můžeme psát

$$\hat{D}^{(0)}F_s^{(0)}(1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1) = \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta[\hat{\Delta}_t^{(1)} F_1]} \hat{L}_1 \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1, \quad (255)$$

což, s pomocí rovnice  $\frac{\partial \hat{\Delta}_t}{\partial t} = \hat{L} \hat{\Delta}_t$  můžeme přepsat do tvaru

$$\hat{D}^{(0)}F_s^{(0)}(1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1) = \frac{\delta F_s^{(0)}}{\delta[\hat{\Delta}_t^{(1)} F_1]} \frac{\partial \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1}{\partial t} \quad (256)$$

která nám říká

$$\hat{D}^{(0)}F_s^{(0)}(1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1) = \frac{\partial}{\partial t} F_s^{(0)}[1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1]. \quad (257)$$

Pak dostáváme z rovnice, kterou jsme odvodili výše

$$\begin{aligned} \hat{D}^{(0)}F_s^{(0)} &= \hat{L}_s F_s^{(0)} \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} F_s^{(0)}[1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1] &= \hat{L}_s F_s^{(0)}[1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1] \end{aligned} \quad (258)$$

Z definice operátoru  $\Delta_t^{(s)}$  dostáváme, že řešení předchozí rovnice má tvar

$$F_s^{(0)}[1, \dots, s; \hat{\Delta}_t^{(1)} F_1(0)] = \hat{\Delta}_t^{(s)} F_s^{(0)}[1, \dots, s; F_1(0)] \quad (259)$$

kde  $F_1(0)$  je jednočásticová distribuční funkce vypočítaná v čase  $t = 0$ . Pak je zřejmé, že můžeme psát

$$F_s^{(0)}[1, \dots, s; F_1(0)] = \hat{\Delta}_t^{(s)} F_s^{(0)}[1, \dots, s; \hat{\Delta}_{-t}^{(1)} F_1(0)] \quad (260)$$

Protože levá strana je nezávislá na čase, můžeme přistoupit k limitě  $t \rightarrow -\infty$  a s použitím hraničních podmínek daných nahoře dostaneme

$$\begin{aligned} F_s^{(0)}[1, \dots, s; F_1(0)] &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{\Delta}_t^{(s)} F_s^{(0)}[1, \dots, s; \hat{\Delta}_{-t}^{(1)} F_1(0)] = \\ &= \prod_{k=1}^s F_1[\mathbf{x}_k^{(s)}, \mathbf{p}_k^{(s)}] \end{aligned} \quad (261)$$

Vidíme tedy, že  $F_s^{(0)}$  je dané jednočásticovými distribucemi s fázovými proměnnými  $\mathbf{x}^{(s)}, \mathbf{p}^{(s)}$ , odpovídající polohám a impulsům částic, jenž se propagují zpět v čase a jejíž evoluce je dána  $s$ -částicovým Hamiltoniánem. Podrobněji toto uvidíme, když budeme studovat pohybovou rovnici pro souřadnici či impuls  $s$ -té částice

$$\frac{d\mathbf{x}_s}{dt} = \{\mathbf{x}_s, H\}, \quad \frac{d\mathbf{p}_s}{dt} = \{\mathbf{p}_s, H\}. \quad (262)$$

Pak hodnota proměnné v čase  $t + \Delta t$  může být určena Taylorovým rozvojem

$$\mathbf{x}_s(t + \Delta t) = \mathbf{x}_s(t) + \frac{d\mathbf{x}_s}{dt}(t)\Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{x}_s}{dt^2}(\Delta t)^2 + \dots$$

S použitím pohybové rovnice dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_s}{dt} &= \{\mathbf{x}_s, H\}, \\ \frac{d^2\mathbf{x}_s}{dt^2} &= \left\{ \frac{d\mathbf{x}_s}{dt}, H \right\} = \{\{\mathbf{x}_s, H\}, H\} \\ &\vdots \end{aligned} \quad (263)$$

a tedy

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_s(t + \Delta t) &= \mathbf{x}_s(t) + \frac{d\mathbf{x}_s}{dt}(t)\Delta t + \frac{1}{2!} \frac{d^2\mathbf{x}_s}{dt^2}(\Delta t)^2 + \dots = \\ &= \mathbf{x}_s(t) + \{\mathbf{x}_s(t), H\} \Delta t + \frac{1}{2!} \{\{\mathbf{x}_s, H\}, H\} (\Delta t)^2 + \dots = \\ &= \mathbf{x}_s(t) - \{H, \mathbf{x}_s(t)\} \Delta t + \frac{1}{2} \{H, \{H, \mathbf{x}_s(t)\}\} (\Delta t)^2 + \dots \\ &= \mathbf{x}_s(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \overbrace{\{H, \{H, \dots, \{H, \mathbf{x}_s\}\}\}}^n (-\Delta t)^n \end{aligned} \quad (264)$$

a tedy vidíme, že  $\hat{\Lambda}$  skutečně propaguje  $\mathbf{x}_s$  zpět v čase.

### 2.4.3 Odvození Boltzmanovy rovnice

Poslední krok k odvození kinematické rovnice je nalezení operátoru  $\hat{L}_2$

$$\hat{L}_2 = -\hat{K}_1 - \hat{K}_2 + \hat{O}_{12} \equiv -\hat{\kappa}_2 + \hat{O}_{12} \quad (265)$$

kde

$$\hat{\kappa}_2 = \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2}, \quad (266)$$

S pomocí této rovnice dostaneme

$$\hat{O}_{12} F_2^{(0)} = \hat{\kappa}_2 F_2^{(0)} + \hat{L}_2 F_2^{(0)}. \quad (267)$$

Naším úkolem je najít formu výrazů, které se vyskytují na pravé straně předchozí rovnice.

S použitím předchozího výrazu máme

$$\hat{L}_2 F_s^{(0)} = \hat{D}^{(0)} F_2^{(0)} = \frac{\delta F_2^{(0)}}{\delta F_1} A^{(0)}, \quad (268)$$

kde

$$A^{(0)} = -\frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}_1}. \quad (269)$$

Nyní použijeme explicitní formu  $F_2^{(0)}$

$$F_2^{(0)} = F_1[\mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{p}_1^{(2)}] F_1[\mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{p}_2^{(2)}] \quad (270)$$

a tedy dostaneme

$$\begin{aligned} \hat{L}_2^{(0)} F_2^{(0)} &= -\frac{\mathbf{p}_1^{(2)}}{m} F_1[\mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{p}_2^{(2)}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1^{(2)}} F_1[\mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{p}_1^{(2)}] - \\ &- \frac{\mathbf{p}_2^{(2)}}{m} F_1[\mathbf{x}_1^{(2)}, \mathbf{p}_1^{(2)}] \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2^{(2)}} F_1[\mathbf{x}_2^{(2)}, \mathbf{p}_2^{(2)}]. \end{aligned} \quad (271)$$

Naším cílem je najít alternativní tvar operátoru  $\hat{\kappa}_2$ . Zavedeme proměnné  $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rightarrow (\mathbf{r}, \mathbf{x}_1, \mathbf{g}, \mathbf{p}_1)$  kde

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \mathbf{g} = \frac{\mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_1}{m} \\ \mathbf{p}_2 &= m\mathbf{g} + \mathbf{p}_1, \mathbf{x}_2 = \mathbf{r} + \mathbf{x}_1,\end{aligned}\tag{272}$$

dostaneme

$$\begin{aligned}\hat{\kappa}_2 &= \left(\mathbf{g} + \frac{\mathbf{p}_1}{m}\right) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \left(-\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1}\right) = \\ &= \mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} = \hat{K}_B + \hat{K}_1,\end{aligned}\tag{273}$$

kde  $\hat{K}_B = \mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}}$ . S použitím těchto výrazů dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}_1} &= \frac{1}{v} \int d\mathbf{p}_2 d\mathbf{x}_2 \hat{O}_{12} F_2^{(0)} \Rightarrow \\ \frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}_1} &= \frac{1}{v} \int d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{x}_2 (\hat{\kappa}_2 F_2^{(0)} + \hat{L}_2 F_2^{(0)}) = \\ &= \frac{1}{v} \int d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 \hat{K}_B F_2^{(0)} + \frac{1}{v} \int d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 (\hat{L}_2 + \hat{K}_1) F_2^{(0)}.\end{aligned}\tag{274}$$

Jestliže budeme předpokládat, že  $F_2$  je homogenní mimo interakční oblast, pak není funkcí  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$  a jejich hodnot zpět v čase. Jinými slovy řečeno je funkcí pouze  $\mathbf{r}$ . Pak druhý člen v předchozím výrazu na pravé straně je roven nule a srážkový člen má tvar

$$\int d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{x}_2 \hat{K}_B^{(0)} = \int d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 \mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)})]\tag{275}$$

kde  $\mathbf{g}$  je relativní rychlost. Naším cílem je vypočítat tento prostorový integrál, který vystupuje v předchozím výrazu. Poznamenejme, že pro pevné  $\mathbf{x}_1$  máme  $d\mathbf{x}_2 = d\mathbf{r}$ . Zavedeme válcové souřadnice, kdy osa válce souhlasí se směrem vektoru  $\mathbf{g}$ . Dále zavedeme projekci vektoru  $\mathbf{r}$  na tuto osu

$$z \equiv \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{g}.\tag{276}$$

Pak dostaneme

$$d^3\mathbf{r} = bd\phi dbdz \quad (277)$$

a

$$\mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = g \frac{\partial}{\partial z} . \quad (278)$$

kde jsme využili faktu, že vektor  $\mathbf{r}$  může být rozložen do směru rovnoběžného s  $\mathbf{g}$  a kolmého na  $\mathbf{g}$  a skalární součin tohoto vektoru s  $\mathbf{g}$  je roven nule. Pak dostaneme

$$\begin{aligned} & \int d^3\mathbf{p}_2 d^3\mathbf{r} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} [F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)})] = \\ & = \int d^3\mathbf{p}_2 \int d\phi b db \int_{-\infty}^{\infty} dz \frac{d}{dz} [F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)})] = \\ & \int d^3\mathbf{p}_2 \int d\phi b db [F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)}) (\infty) - F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)}) (-\infty)] . \end{aligned} \quad (279)$$

kde  $z = \infty$  odpovídá oblasti po kolizi. Poznamenejme, že  $\mathbf{p}_1^{(2)}, \mathbf{p}_2^{(2)}$  jsou souřadnice určené pomocí Hamiltoniánu popisující interakci dvou částic, kdy uvažujeme jejich evoluci zpět v čase, tedy před kolizí. To jest tyto částice musí mít takové hybnosti, které označíme jako  $\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2$ , které vedou po interakci částic k jejich hybnostem  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ .

Oblast  $z = -\infty$  odpovídá oblasti před srážkou. Předpokládejme, že v této oblasti máme částice s danými  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  a chceme vědět, jaké hodnoty tyto částice mají, jestliže je budeme sledovat s pomocí dvoučásticového Hamiltoniánu zpět do minulosti. Protože v této oblasti nedochází k žádným interakcím, pohybují se jako volné částice a tedy jejich impulsy jsou stejné  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ . Pak tedy dostaneme

$$F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)}) (\infty) - F_1(\mathbf{p}_1^{(2)}) F_1(\mathbf{p}_2^{(2)}) (-\infty) = F_1(\mathbf{p}'_1) F_1(\mathbf{p}'_2) - F_1(\mathbf{p}_1) F_1(\mathbf{p}_2) . \quad (280)$$

Jestliže použijeme tento vztah dostaneme

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial F_1}{\partial \mathbf{x}_1} = \frac{2\pi}{v} \int d^3\mathbf{p}_2 \int b db g [F_1(\mathbf{p}'_1) F_1(\mathbf{p}'_2) - F_1(\mathbf{p}_1) F_1(\mathbf{p}_2)] \quad (281)$$

což je slavná Boltzmanova rovnice. Jejím dalšímu studiu a analýze srážkového členu budeme věnovat následující kapitoly.

## Alternativní odvození Boltzmanovy rovnice

Nyní podáme více fyzikálně intuitivní odvození Boltzmanovy rovnice. Dříve, než k tomuto přistoupíme, provedeme alternativní odvození BBGKY hierarchie. Začneme s 1-násobnou distribuční funkcí

$$F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = N \int \prod_{i=2}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i f_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N, t) . \quad (282)$$

kde jsme zavedli faktor  $N$ . Je důležité vědět, že budeme od počátku předpokládat, že všechny částice jsou identické a že tedy funkce  $F_N$  je úplně symetrickou funkcí vzhledem ke svým argumentům, a tedy tím, že jsme vybrali první částici pro definici jednočásticové distribuční není myšleno, že by tato částice byla něčím speciální. Poznamenejme, že díky faktoru  $N$  v definici  $F_1$  dostáváme

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) &= \\ &= N \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i f_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \dots, \mathbf{p}_N, t) = N . \end{aligned} \quad (283)$$

Funkce  $F_1$  hraje fundamentální roli v kinetické teorii, protože její znalost je ve velkém množství případů dostačující pro popis stavu systému. Například, průměrná hustota částic je

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{p} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) \quad (284)$$

a průměrná rychlost je dána výrazem

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{p} \frac{\mathbf{p}}{m} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) . \quad (285)$$

Vidíme tedy, že je užitečné znát pohybovou rovnici pro funkci  $F_1$ . Z její definice dostáváme

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = N \int \prod_{i=2}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i \frac{\partial f}{\partial t} = N \int \prod_{i=2}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i \{H, f\} . \quad (286)$$

Uvažujme nyní Hamiltonian  $H$  pro  $N$  částic, kde vezmeme do úvahy možnost, že se dané částice pohybují ve vnějším poli

$$H = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^N p_i^2 + \sum_{i=1}^N V(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=1}^N \sum_{i < j} \Phi_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) . \quad (287)$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} &= N \prod_{i=2}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i \times \\ &\times \left[ - \sum_{i=1}^N \frac{\mathbf{p}_i}{2m} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{x}_i} + \sum_{i=1}^N \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} + \sum_{i=1}^N \sum_{k < l} \frac{\partial \Phi_{kl}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l)}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \right] \end{aligned} \quad (288)$$

Pravou stranu můžeme zjednodušit integrací po částech pro proměnné  $\mathbf{x}_i, \mathbf{p}_i, i = 2, \dots, N$  a zanedbáním hraničních příspěvků. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial t} &= N \int \prod_{i=2}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i \left[ - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{p}} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{k=2}^N \frac{\partial \Phi_{1k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}} \right] = \{H_1, f_1\} + \\ &\quad + N \int \prod_{i=2}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i \sum_{k=2}^N \frac{\partial \Phi_{1k}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_k)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}} \end{aligned} \quad (289)$$

kde

$$H_1 = \frac{p^2}{2m} + V(\mathbf{x}) . \quad (290)$$

Vidíme, že jednočásticový Hamiltonián závisí na potenciálu vnějšího pole, zatím co nezávisí na interakci s ostatními částicemi, která je popsána posledním členem na pravé straně. Můžeme také přepsat rovnici pro  $F_1$  do tvaru

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} = \{H_1, F_1\} + \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{sraz} , \quad (291)$$



kde druhý člen je znám jako *srážkový člen*, který, jestliže vezmeme do úvahy, že všechny částice jsou identické a tedy můžeme nahradit sumu  $\sum_{k=2}^N$  faktorem  $(N-1)$  ve tvaru

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{sraz} &= N(N-1) \int d^3 \mathbf{x}_2 d^3 \mathbf{p}_2 \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \\ &\cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \int \prod_{i=3}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i f_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{p}, \mathbf{p}_2, \dots, t) \end{aligned} \quad (292)$$

což, když zavedeme 2-násobnou distribuční funkci ve tvaru

$$F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, t) = N(N-1) \int \prod_{i=3}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i f_N(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \dots, t) . \quad (293)$$

dostáváme kolizní integrál ve tvaru

$$\left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{sraz} = \int d^3 \mathbf{x}_2 d^3 \mathbf{p}_2 \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{p}} . \quad (294)$$

Srážkový člen nemění rozdělení částic v prostoru, která je daná výrazem  $n(\mathbf{x}, t) = \int d^3 \mathbf{p} F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$ . To je možné vidět z pohybové rovnice pro  $F_1$ , když provedeme integraci přes  $\mathbf{p}$

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{p} \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} - \{H_1, F_1\} \right) &= \int d^3 \mathbf{p} \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{sraz} \Rightarrow \\ \frac{\partial n(\mathbf{x}, t)}{\partial t} - \int d^3 \mathbf{p} \{H_1, F_1\} &= 0 \end{aligned} \quad (295)$$

protože

$$\begin{aligned} \int d^3 \mathbf{p} \left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{sraz} &= \\ &= N(N-1) \int d^3 \mathbf{x}_2 d^3 \mathbf{p}_2 \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}} \prod_{i=3}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i \times \\ &\times [f_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, \infty, \mathbf{p}_2, \dots, t) - f_N(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \dots, -\infty, \mathbf{p}_2, \dots, t)] = 0 . \end{aligned} \quad (296)$$

Na druhou stranu, když bychom uvažovali střední hodnotu rychlosti, tak zjistíme, že srážkové členy hrají důležitou roli pro její změnu.

Závěr této analýzy je ten, že když chceme znát pohybovou rovnici pro  $F_1$ , měli bychom mít pohybovou rovnici pro  $F_2$ . Tuto můžeme opět získat pomocí integrace Liouvillových rovnic s tím, že nyní vystupuje srážkový člen s  $F_3$ . Obecně, jestliže zavedeme  $s$ -násobné distribuční funkce

$$F_s(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_s, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_s, t) = \frac{N!}{(N-s)!} \int \prod_{i=s+1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i f(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_N, t) \quad (297)$$

tak zjistíme, že splňují rovnice

$$\frac{\partial F_s}{\partial t} = \{H_s, F_s\} + \sum_{i=1}^s \int d^3\mathbf{x}_{s+1} d^3\mathbf{p}_{s+1} \frac{\partial \Phi_{i,i+1}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_{s+1})}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial F_{s+1}}{\partial \mathbf{p}_i}, \quad (298)$$

kde

$$H_s = \sum_{i=1}^s \left( \frac{p_i^2}{2m} + V(\mathbf{x}_i) \right) + \sum_{i < j \leq s} \Phi_{ij}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j). \quad (299)$$

Tímto způsobem jsme odvodili BBGKY hierarchii.

**Domácí úkol** Dokažte předchozí rovnici

Nyní přistoupíme, pomocí těchto rovnic, k alternativnímu odvození Boltzmanovy rovnice. Jako v předchozím případě budeme předpokládat, že když jsou částice dostatečně vzdálené, jejich distribuční funkce nejsou korelované. Pojem dostatečně vzdálené znamená, že vzdálenost mezi nimi je mnohem větší než atomový rozměr  $d$ , který určuje dosah interakce mezi jednotlivými molekulami. Pak očekáváme

$$F_2(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rightarrow F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1)F_1(\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2), \text{ pro } |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \gg d. \quad (300)$$

Na druhou stranu když napíšeme rovnice pro  $F_1$  a  $F_2$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} \right) F_1(\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1, t) &= \int d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 \frac{\partial \Phi_{12}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|)}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{p}_1}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\mathbf{x}_1} \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right] \right) F_2 &= \\ = \int d^3\mathbf{x}_3 d^3\mathbf{p}_3 \left( \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3)}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} + \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3)}{\partial \mathbf{x}_2} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right) F_3. \end{aligned} \quad (301)$$

tak vidíme, že pravá strana rovnice dává významný příspěvek pouze na vzdálenostech, kdy  $\frac{\partial\Phi_{12}(|\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_1|)}{\partial\mathbf{x}_1}$  je nenulové, což je pouze na vzdálenostech  $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 < d$ . Z toho důvodu je nutné porozumět  $F_2$  na vzdálenostech, kdy částice jsou blízko sebe.

Abychom tomuto porozuměli, musíme provést určité kvalitativní úvahy založené na dimensionální analýze. Členy, které závisí na atomovém potenciálu, budou nutně mít co do činění s veličinou  $\tau_{coll}$ , která charakterizuje časový interval, po který jsou částice ve vzájemné interakci

$$\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial\mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \sim \frac{p}{d} \sim \frac{1}{\tau_{coll}}, \quad (302)$$

kde  $p$  je charakteristická hybnost, která určuje škálu hybnosti v dané interakci. Podle Bogoljubovy hypotézy toto je nekratší časová škála, která se vyskytuje v daném problému. Z toho důvodu dostáváme, že  $\frac{1}{\tau_{coll}}$  je nejvýznamnější parametr, který vyustupuje v daných rovnicích a tedy  $\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial\mathbf{x}}$  dávají nejvýznamnější příspěvky a určují, jak rychle se mění distribuční funkce.

Vidíme, že funkce  $F_1$  je speciální, protože její pohybová rovnice neobsahuje kolizní člen (člen úměrný  $\frac{\partial\Phi_{12}}{\partial\mathbf{x}} \cdot \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}}$ ) na levé straně rovnice, na rozdíl od ostatních rovnic pro funkce vyšších řádů  $F_n$ , například  $F_2$  má kolizní členy jak na pravé, tak na levé straně. Je důležité, že pro řídké plyny, příspěvek na pravé straně je mnohem menší než na levé straně. Abychom tomu porozuměli, musíme porovnat  $F_3$  vzhledem k  $F_2$ . Předně víme, že

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}_3 d^3\mathbf{p}_3 F_3 &= \frac{N!}{(N-3)!} \int d^3\mathbf{x}_3 d^3\mathbf{p}_3 \prod_{i=4}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i f_N = \\ &= \frac{N!}{(N-3)!} \int \prod_{i=3}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i f_N = (N-2)F_2 \approx NF_2. \end{aligned} \quad (303)$$

Na druhou stranu na pravé straně rovnice (301) neprovádíme integraci přes celý prostor, protože máme pouze nenulový příspěvek úměrný  $d^3$ . To znamená, že srážkový člen na pravé straně (301) je potlačen faktorem

$$Nd^3/V \quad (304)$$

kde  $V$  je objem, v kterém se daný systém nachází. Pro plyn za běžných podmínek dostáváme, že tento faktor je přibližně roven  $10^{-3} - 10^{-4}$ . Pak

můžeme ukončit hierarchii rovnic, tím, že řekneme, že pravá strana rovnice pro  $F_2$  je rovna nule

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}_1}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_1} + \frac{\mathbf{p}_2}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_2} - \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2)}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right] \right) F_2 \approx 0 . \quad (305)$$

Vidíme tedy, že  $F_2$  se mění na vzdálenostech  $d$  a časové škále  $\tau_{coll}$ . Poznamenejme, že tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2, H_2\} = 0 \quad (306)$$

což můžeme interpretovat jak pohybovou rovnici pro systém dvou těles, kde  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  splňují odpovídající Hamiltonovy rovnice.

Na druhou stranu z rovnice pro  $F_1$  stejným argumentem dostáváme, že pravá strana rovnice je potlačena faktorem  $\frac{Nd^3}{V}$ , a tedy  $F_1$  se mění na větší časové škále  $\tau$ .

Nechť studujeme změnu  $F_2$  podrobněji. Je zřejmé, že pouze relativní pohyb bude ovlivněn srážkovým členem. Z toho důvodu je vhodné přejít do souřadnicové soustavy hmotného středu

$$\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_1) , \mathbf{r} = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 . \quad (307)$$

a

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 , \mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) . \quad (308)$$

a uvažovat  $F_2 = F_2(\mathbf{R}, \mathbf{r}, \mathbf{P}, \mathbf{p}, t)$ . Distribuční funkce se bude pomalu měnit s  $\mathbf{R}$  a  $\mathbf{P}$ , podobně, jak  $F_1$  závisí na souřadnici a hybnosti. Na druhou stranu předpokládáme silnou závislost na  $\mathbf{r}$  a  $\mathbf{p}$ , které se mění za časový interval  $\tau_{coll}$ . Jinými slovy můžeme předpokládat, že  $F_2$  dosáhne své ustálené hodnoty, která pak ovlivňuje dynamiku  $F_1$ . Jinými slovy, zanedbáme časový vývoj funkce  $F_2$ ,  $\frac{\partial F_2}{\partial t} = 0$  a nahradíme rovnice pro  $F_2$  následující rovnovážnou rovnicí

$$\left( \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi_{12}}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \right) F_2 \approx 0 . \quad (309)$$

Pak pro srážkový člen dostáváme

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial F_1}{\partial t}\right)_{sraz} &= \int d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial \mathbf{x}_1} \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{p}_1} = \\
&= \int d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 \frac{\partial \Phi_{12}(\mathbf{r})}{\partial \mathbf{r}} \cdot \left[ \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2} \right] F_2 = \\
&= \frac{1}{m} \int_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \leq d} d^3\mathbf{x}_2 d^3\mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \frac{\partial F_2}{\partial \mathbf{r}}
\end{aligned} \tag{310}$$

kde v prvním kroku jsme zavedli dodatečný člen  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2}$ , který dává nulový příspěvek při integraci po částech a ve třetím kroku jsme použili (309) s tím, že  $\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_1} - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_2}$ . Také jsme explicitně vyznačili oblast, přes kterou je integrováno, kde nenulový příspěvek je pouze v oblasti  $|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \leq d$ .

Abychom pokročili dále, musíme uvažovat následující situaci. Nechť  $t_0$  je časový okamžik před srážkou dvou částic, kdy částice se nacházejí ve velké vzdálenosti od sebe,  $|\mathbf{x}_{10} - \mathbf{x}_{20}| \gg d$ , kde  $\mathbf{x}_{10} \equiv \mathbf{x}_1(t_0)$ ,  $\mathbf{x}_{20} \equiv \mathbf{x}_2(t_0)$ . Statistická nezávislost částic znamená, že v tomto časovém okamžiku dvoučásticová funkce je dána součinem dvou jednočásticových funkcí, to jest

$$F_2(t, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{x}_{20}, \mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{20}, t_0) = F_1(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{p}_{20}, t_0) F_1(\mathbf{x}_{20}, \mathbf{p}_{20}, t_2) . \tag{311}$$

pak ale skutečnost, že  $F_2$  splňuje rovnici

$$\frac{d}{dt} F_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{\partial F_2}{\partial t} + \{F_2, H_2\} = 0 \tag{312}$$

říká, že můžeme provést integraci této rovnice přes časový interval  $t_0$  do  $t$  a dostaneme

$$F_2(t, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = F_1(t_0, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{p}_{10}) F_2(t_0, \mathbf{x}_{20}, \mathbf{p}_{20}) , \tag{313}$$

kde musíme porozumět počátečním hodnotám  $(\mathbf{x}_{10}, \mathbf{p}_{20})$  a  $(\mathbf{x}_{20}, \mathbf{p}_{20})$  jako hodnoty souřadnic a hybností, které musí mít částice v čase  $t_0$ , aby v čase  $t$  měly hodnoty  $\mathbf{x}_1, \mathbf{p}_1$  a  $\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_2$ . Jinými slovy souřadnice a hybnosti v čase  $t_0$  jsou dány souřadnicemi a hybnostmi v čase  $t$ , kdy provedeme zpětnou propagaci v čase pomocí dvoučásticového hamiltoniánu  $H_2$ , přičemž hybnosti  $\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{20}$  jsou konstantní během volné propagace částic.

S použitím (313) dostáváme, že srážkový člen má tvar

$$\frac{1}{m} \int_{|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1| \leq d} d^3 \mathbf{x}_2 d^3 \mathbf{p}_2 (\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2) \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} F_1(t_0, \mathbf{x}_{10}, \mathbf{p}_{10}) F_2(t_0, \mathbf{x}_{20}, \mathbf{p}_{20}) \quad (314)$$

kde všechny proměnné pod derivací  $\mathbf{r}$  závisí na  $\mathbf{r}$ . Toto vyplývá z faktu, že funkce  $F_1$  se mění na vzdálenostech, které jsou mnohem větší než  $d$ , a tedy v prvním přiblížení můžeme uvažovat funkci, která vystupuje ve srážkovém členu, jako nezávislou na souřadnicích, a tedy  $F_1 = F_1(t_0, \mathbf{p}_{10})$ . Poznamenejme ale, že funkce nezávisí na souřadnicích  $\mathbf{x}_{01}, \mathbf{x}_{02}$ , ale závisí na  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ , kde tato závislost vyplývá z faktu, že když máme zadané impulsy  $\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{20}$  v čase  $t_0$ , pak se propagují volně do oblasti interakce, kde platí  $|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \leq d$ . Dále, z homogenity prostoru vyplývá, že tato funkce může záviset pouze na  $\mathbf{r}$ .

Po těchto úvahách můžeme jednoduše provést integraci ve srážkovém členu (314). Opět zavedeme válcové suřadnice  $z, \rho, \phi$  v prostoru  $\mathbf{r}$  tak, že osa  $z$  je podél  $\mathbf{v}_{sraz} \equiv \frac{1}{m}(\mathbf{p}_1 - \mathbf{p}_2)$ . Pak máme  $\mathbf{v}_{sraz} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} = v_{sraz} \frac{\partial}{\partial z}$  a provedeme integraci přes  $z$

$$\left( \frac{\partial F_1}{\partial t} \right)_{sraz} = \int d\rho d\phi d^3 \mathbf{p}_2 F_1(t_0, \mathbf{p}_{10}) F_1(t_0, \mathbf{p}_{20}) \Big|_{z=z_1}^{z_2}, \quad (315)$$

kde  $z_1, z_2$  jsou body před a po srážce a kde je je nutné chápat jako vzdálenosti, které jsou velké ve srovnání s  $d$ , na druhou stranu malé vzhledem ke střední volné dráze molekul. Poznamenejme, že  $\mathbf{p}_{10}, \mathbf{p}_{20}$  jsou počáteční hybnosti v čase  $t_0$ , které v konečném čase mají hybnosti  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ . Pak dostáváme

$$F_2(z_2) = F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_1, t) F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_2, t), F_2(z_1) = F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{10}, t) F_1(\mathbf{x}, \mathbf{p}_{20}, t) \quad (316)$$

což nám dává očekávaný výsledek.

## 3 Boltzmanova rovnice

### 3.1 Distribuční funkce v $\mu$ -prostoru

Nyní opět statistický popis  $N$  klasických částic, kde stav systému je reprezentován bodem v  $6N$ -dimensionálním fázovém prostoru  $\Gamma$  a jeho časový vývoj je reprezentován křivkou v tomto prostoru. Stav tohoto systému může

být zobrazen v 6– rozměrném  $\mu$ – prostoru  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ , kde je reprezentován  $N$  body se souřadnicemi  $(\mathbf{x}_i, \mathbf{v}_i)$  a jeho časový vývoj je popsán pomocí  $N$ -křivek. Distribuční funkce v tomto prostoru je definována jako

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \lim_{\delta V \rightarrow 0^+} \frac{\delta N}{\delta V}, \quad (317)$$

kde  $\delta N$  je počet částic v malém objemovém elementu  $\delta V$   $\mu$ –prostoru v okolí bodu  $(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ . Limita  $\delta V \rightarrow 0^+$  znamená, že  $\delta V$  je velmi malý vzhledem k celkovému objemu, ale že je také dostatečně velký tak, že obsahuje uvnitř velké množství částic. Pouze v případě, když tato limita existuje, můžeme přejít od úrovně 1 k úrovni 2.

### 3.2 Bezsrážková Boltzmannova rovnice

Víme, že dynamika  $N$ – částic je popsána Hamiltonovskými rovnicemi. Naše otázka nyní je, zda-li je možné získat rovnici podobné Liouvillové rovnici pro distribuční funkci  $f$  v  $\mu$ – prostoru.

Jestliže každá z  $N$  částic má Hamiltonián  $H = H(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t)$  s  $\mathbf{p} = m\mathbf{u}$ , pak dostáváme

$$m\dot{v}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad m\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial v_i}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (318)$$

a

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \dot{x}_i \frac{\partial f}{\partial x_i} + \dot{v}_i \frac{\partial f}{\partial v_i} = 0 \quad (319)$$

kde nyní je implicitně daná sumace přes  $i$ . Tato distribuční funkce odpovídá  $N$  ne-interagujících částic pohybujících se ve vnějším potenciálu. Tato rovnice se nazývá bez srážková Boltzmannova rovnice.

Je důležité poznamenat, že jakmile se částice dostanou do blízkého kontaktu tak, že interagují, tento vztah neplatí. Poté potenciální energie každé částice je nejen funkcí souřadnice částice, ale také závisí na vzdálenostech dané částice od ostatních částic. V tomto případě Hamiltonovská formulace v  $\mu$ – není možná, samozřejmě, můžeme použít obecnou formulaci problému v  $\Gamma$ – prostoru.

Neutrální plyny jsou charakteristické tím, že částice interagují pouze na krátké vzdálenosti, jinými slovy pouze, když dojde k jejich srážkám. Je pozoruhodné, že v tomto případě je relativně jednoduché modifikovat Boltzmannovu rovnici takovým způsobem, že efekt kolizí může být dodán na pravou stranu této rovnice.

### 3.3 Základní poznatky z rozptylu částic

Uvažujme dvou částicový hamiltonián

$$H(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} + V(r) \quad (320)$$

kde hmotnosti částic jsou  $m_1$  a  $m_2$  a kde  $r = |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|$ . Provedeme transformaci do souřadnicové soustavy spojené s hmotným středem

$$\begin{aligned} \mathbf{p} &= \frac{m_1 \mathbf{p}_2 - m_2 \mathbf{p}_1}{m_1 + m_2} = \mu \dot{\mathbf{r}} , \\ \mathbf{r} &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 , \\ \mathbf{P} &= \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 , \\ \mathbf{R} &= \frac{m_1 \mathbf{r}_1 + m_2 \mathbf{r}_2}{m_1 + m_2} , \end{aligned} \quad (321)$$

kde inverzní zobrazení má tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1 &= \mathbf{P} \frac{m_1}{m_1 + m_2} - \mathbf{p} , \\ \mathbf{p}_2 &= \mathbf{P} \frac{m_2}{m_1 + m_2} + \mathbf{p} , \\ \mathbf{x}_1 &= \mathbf{R} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r} , \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{R} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r} . \end{aligned} \quad (322)$$

S pomocí těchto výrazů dostaneme následující hamiltonián

$$H = \frac{p^2}{2\mu} + \frac{P^2}{2M} + V(r) , \quad (323)$$

kde  $\mu$  je redukovaná hmotnost

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \quad (324)$$

a

$$H_{CS} = \frac{P^2}{2M} \quad (325)$$



je kinetická energie hmotného středu. Zbývající část

$$H_{rel} = \frac{p^2}{2\mu} + V(r) \quad (326)$$

je hamiltonián částice hmotnosti  $\mu$  v poli daném potenciálem  $V(r)$ . Protože zjevně hamiltonián nezávisí na  $R$  dostaneme, že združená hybnost  $\mathbf{P}$  se zachovává. Jinými slovy originální úloha se redukuje na problém studia pohybu částice o hmotnosti  $\mu$  v centrálním poli  $V(r)$ . Pro další studium je vhodné zavést sférické souřadnice

$$r_1 = r \sin \theta \cos \phi, r_2 = r \sin \theta \sin \phi, r_3 = r \cos \theta \quad (327)$$

a tedy hamiltonián má tvar

$$H_{red} = \frac{1}{2\mu} p_r^2 + \frac{1}{2\mu r^2 \sin^2 \theta} p_\phi^2 + \frac{1}{2\mu r^2} p_\theta^2 + V(r) . \quad (328)$$

kde  $p_r, p_\phi$  a  $p_\theta$  jsou hybnosti kanonicky sdružené s  $r, \phi$  a  $\theta$ . Protože hamiltonián nezávisí na  $\phi$ , dostaneme, že  $p_\phi = const$  a pro jednoduchost budeme uvažovat případ  $p_\phi = 0$ . Vidíme také, že pohybová rovnice pro  $p_\theta$  má tvar

$$\dot{p}_\theta = \{p_\theta, H_{red}\} = \frac{\cos \theta}{\mu \sin^2 \theta} p_\phi^2 = 0, \quad (329)$$

která, v případě  $p_\phi = 0$  dává  $p_\theta \equiv L$ . Konečně, pohybová rovnice pro  $\theta$  má tvar

$$\dot{\theta} = \{\theta, H_{red}\} = \frac{p_\theta}{\mu r^2} = \frac{L}{\mu r^2} . \quad (330)$$

která může být zintegrována při znalosti  $r = r(t)$ . Pohybová rovnice pro  $r$  a  $p_r$  mohou být získány s pomocí  $H_{rel}$

$$\begin{aligned} \dot{p}_r &= \{p_r, H_{rel}\} = \frac{L^2}{2\mu r^3} - \frac{dV}{dr}, \\ \dot{r} &= \{r, H_{rel}\} = \frac{p_r}{\mu}. \end{aligned} \quad (331)$$

Na druhou stranu víme, že Hamiltonián se zachovává a označíme jeho hodnotu jako  $E$ . Pak můžeme vyjádřit  $p_r$  s jeho pomocí jako

$$p_r = \sqrt{2\mu(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}, \quad \dot{r} = \sqrt{\frac{2}{\mu}(E - V) - \frac{L^2}{\mu^2 r^2}} . \quad (332)$$

S použitím poslední rovnice můžeme vyjádřit  $dt$  a vložit do pohybové rovnice pro  $\theta$  a pak dostaneme

$$\theta = \int \frac{L}{\mu r^2} dt = \int \frac{L}{r^2 \sqrt{2(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} . \quad (333)$$

Zajímáme se o neomezené trajektorie, kdy  $V(\infty) = 0$  a kdy  $E > 0$ . Lépe řečeno našim cílem je najít rozptylový úhel. Konkrétně, rozdělíme rozptyl do tří po sobě následujících časových intervalů: před, během a po interakci. V intervalech před a po jsou částice volné a nejsou ve vzájemné interakci. Samozřejmě, tyto pojmy úzce souvisí s vlastnostmi potenciálu  $V(r)$ , konkrétně s parametrem  $r_0$ , který charakterizuje dosah interakce, například u interakcí dlouhého dosahu  $r_0 \rightarrow \infty$ . Pak interval před interakcí odpovídá vzdálenosti, kdy  $r > r_0$ , kdy  $V(r) = 0$ , po interakci označuje interval, kdy  $r > r_0$ . Je vhodné také zavést pojem relativní rychlosti před a po interakci. Předpokládejme, že zvolíme časovou osu takovým způsobem, že interakce proběhne v okolí časového okamžiku  $t = 0$ . Pak definujeme relativní rychlost  $\mathbf{g}$  následujícím způsobem

$$\mathbf{g} = \dot{\mathbf{r}} , \text{ pro } t = \pm\infty . \quad (334)$$

Protože před a po kolizi máme potenciál roven nule, dostaneme ze zákona zachování energie

$$E(r \rightarrow -\infty) = \frac{\mu g^2}{2} = E(r \rightarrow \infty) = \frac{\mu g'^2}{2} \quad (335)$$

což nám říká, že velikost relativní rychlosti se zachovává při srážkách.

V souřadnicové soustavě spojené s hmotným středem zavedeme tzv impaktní parametr  $s$  který je definován jako  $L = \mu g s$ . Impaktní parametr a také vektory relativní rychlosti  $\mathbf{g}$  a  $\mathbf{g}'$  jsou vlastnosti, které se vztahují k asymptotickým stavům systému a které se zachovávají během srážek,

Dále zavedeme vektor  $\mathbf{r}_{min}$ , což je bod odpovídající okamžiku, kdy  $\frac{dr}{dt} = 0$ . Definujeme úhel  $\psi$  jako

$$\phi(r_\infty) - \phi(r_{min}) = \psi = \int_{r_{min}}^{\infty} \frac{L}{r^2 \sqrt{2\mu(E - V) - \frac{L^2}{r^2}}} dr . \quad (336)$$

Pak rozptylový úhel je definovaný vztahem

$$\theta + 2\psi = \pi . \quad (337)$$

Je užitečné zavést proměnnou  $u = r^{-1}$ . Dále,  $L = \mu g s$  vyjádříme pomocí energie

$$E = \frac{g^2}{2\mu} = \frac{L^2}{2\mu s^2} . \quad (338)$$

S použitím těchto výrazů dostaneme

$$\psi = \int_0^{\bar{u}} \frac{du}{\sqrt{1 - s^2 u^2 - \frac{V}{E}}} , \quad (339)$$

kde

$$\bar{u} = \frac{1}{r_{min}} , 1 - s^2 \bar{u}^2 - \frac{V(\bar{u})}{E} = 0 . \quad (340)$$

Pro potenciál ve tvaru

$$V(r) = Kr^{-N} = ku^N \quad (341)$$

dostáváme

$$\psi = \int_0^{\bar{u}} \frac{sdu}{\sqrt{1 - s^2 u^2 - (Ku^N/E)}} . \quad (342)$$

Je užitečné zavést bezrozměrný inverzní poloměr

$$\beta = su \quad (343)$$

a bezrozměrný impaktní parametr ( $[K] = kgm^{2+N}s^{-2}$ )

$$b \equiv s \left( \frac{E}{K} \right)^{1/N} . \quad (344)$$

a pak dostaneme

$$\begin{aligned} \psi(b) &= \int_0^{\bar{\beta}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2 - (\beta/b)^N}} , \\ 1 - \bar{\beta}^2 - (\bar{\beta}b)^N &= 0 . \end{aligned} \quad (345)$$

### 3.3.1 Účinný průřez

Nyní zadefinujeme diferenciální účinný průřez. Uvažujme homogenní tok částic o energii  $E$ , intenzitě  $I$ , které dopadají na rozptylové centrum umístěné v počátku. Počet částic, které jsou rozptýlené do elementu  $d\Omega$  v okolí prostorového úhlu  $\Omega$  je úměrné dopadající intenzitě  $I$  a  $d\Omega$ . Faktor úměrnosti je  $\sigma$ , což je diferenciální účinný průřez. Jinými slovy řešeno, výraz

$$I\sigma(\Omega)d\Omega \quad (346)$$

udává počet částic, které jsou rozptýleny v úhlu  $\Omega, \Omega + d\Omega$  za jednu sekundu. Tento počet je roven počtu částic, které projdou malým elementem válce o průřezu  $dssd\phi$  a tedy dostaneme

$$I\sigma d\Omega = Id\phi s ds . \quad (347)$$

Prostorový úhel je roven  $d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi$  a pak tedy dostaneme

$$\sigma(E, \theta) = \frac{d\phi s ds}{d\Omega} = s(E, \theta) \frac{ds(E, \theta)}{\sin\theta d\theta} . \quad (348)$$

Poznamenejme, že  $s(E, \theta)$  je dán rozptylovým integrálem

$$\psi = \int_0^{\bar{u}} \frac{sdu}{\sqrt{1 - s^2u^2 - (V/E)}} . \quad (349)$$

Zatím co  $\sigma$  určuje počet částic rozptýlených do daného prostorového úhlu, celková účinný průřez

$$\sigma_T = \int_{4\pi} \sigma d\Omega = \pi r_0^2 \quad (350)$$

udává celkový počet částic rozptýlených z původního svazku. Víme, že dosah interakce je dán parametrem  $r_0$ , tak tedy částice, pro které platí, že  $s > r_0$ , nejsou rozptýleny z daného svazku. Jinými slovy řešeno, celkový účinný průřez reprezentuje plochu, která je vložena do cesty nalétávajícímu svazku. Pak pro homogenní svazek, který má čelní plochu  $A > \sigma_T$ , veličina  $A/\sigma_T$  udává poměrný počet částic rozptýlených do všech směrů z daného svazku.

Uvažujme nyní faktor, který je významným prvkem srážkového členu

$$g\sigma \sin\theta d\theta = gs ds . \quad (351)$$

Použijeme-li bezrozměrnou veličinu  $b = s(E/K)^{1/N}$ , dostaneme

$$g\sigma \sin \theta d\theta = gbdb \left(\frac{E}{K}\right)^{-2/N} = (2\mu K)^{\frac{2}{N}} g^{1-\frac{4}{N}} bdb . \quad (352)$$

Vidíme, že případ  $N = 4$  je speciální a říkáme, že molekuly, které interagují pomocí tohoto potenciálu, jsou Maxwellovské molekuly. Pro tyto molekuly je veličina  $g\sigma \sin \theta d\theta$  nezávislá na  $g$ , což má za následek zjednodušení výpočtu linearizované Boltzmanovy rovnice.

**Coulombovský účinný průřez** Vypočítáme nyní účinný průřez pro Coulombovský potenciál

$$V = \frac{K}{r} . \quad (353)$$

Provedeme-li integraci rozptylového úhlu pro  $N = 1$ , dostaneme

$$\psi(b) = \int_0^{\bar{\beta}} \frac{d\beta}{\sqrt{1 - \beta^2 - (\beta/b)}} = -\sin^{-1} \left( \frac{1}{2b\sqrt{1 + \frac{1}{4b^2}}} \right) , \quad (354)$$

s použitím

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - ax}} = \sin^{-1} \left( \frac{x + \frac{1}{2b}}{\sqrt{1 + \frac{1}{4b^2}}} \right) \quad (355)$$

a také to, že  $\bar{\beta}$  je řešením rovnice

$$1 - (\bar{\beta})^2 - \frac{\bar{\beta}}{b} = 0 \Rightarrow \bar{\beta} = -\frac{1}{2b} + \sqrt{1 + \frac{1}{4b^2}} . \quad (356)$$

Pak dostáváme

$$b^2 = \frac{1}{4 \tan^2 \psi} . \quad (357)$$

Zavedeme-li rozptylový úhel  $\theta$  pomocí vztahu  $\psi = \frac{\pi - \theta}{2}$  dostaneme

$$b^2 = \frac{1 \cos^2 \frac{\theta}{2}}{4 \sin^2 \frac{\theta}{2}} \quad (358)$$

Pak z definice účinného průřezu dostaneme

$$\begin{aligned}\sigma &= \left(\frac{2K}{\mu}\right)^2 \frac{1}{g^4} \frac{b}{\sin \theta} \frac{db}{d\theta} = \\ &= \left(\frac{K}{4E}\right)^2 \frac{1}{\sin^4(\theta/2)} .\end{aligned}\tag{359}$$

což je Rutherfordův účinný průřez pro Coulombovské interakce.

### Účinný průřez pro dvě pevné koule

Uvažujme srážky dvou ideálních koulí o poloměrech  $\sigma_{01}, \sigma_{02}$ . Je jasné, že tyto dvě koule se nemohou srazit, jestliže vzdálenost mezi středy těchto koulí je  $r \geq (\sigma_{01} + \sigma_{02})/2$ . Pak dostaneme pro účinný průřez

$$\begin{aligned}\sigma_{12} &= \frac{\sigma_{01} + \sigma_{02}}{2} , \\ s &= \sigma_{12} \sin \psi , \\ sds &= \sigma_{12}^2 \sin \psi \cos \psi d\psi = \frac{1}{4} \sigma_{12}^2 \sin \theta d\theta ,\end{aligned}\tag{360}$$

a tedy máme

$$\sigma(\theta) = \frac{\sigma_{12}^2}{4} .\tag{361}$$

Pak tedy dostaneme

$$\sigma_T = 2\pi\sigma_{12}^2 .\tag{362}$$

### Kinematika

Uvažujme srážku dvou částic o hybnostech  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ . Zákon zachování hybnosti a energie má tvar

$$\begin{aligned}\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 &= \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 , \\ \frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} &= \frac{p'^2}{2m_1} + \frac{p'^2}{2m_2} ,\end{aligned}\tag{363}$$

které se znatelně zjednoduší v případě, kdy  $m_1 = m_2$ .

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 &= \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2 , \\ v_1^2 + v_2^2 &= v'^2 + v'^2 .\end{aligned}\tag{364}$$

Budeme řešit tyto rovnice vzhledem k  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$

$$\begin{aligned}\mathbf{v}'_1 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_1 + g\vec{\epsilon}) , \\ \mathbf{v}'_2 &= \frac{1}{2}(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 - g\vec{\epsilon}) ,\end{aligned}\tag{365}$$

kde  $\vec{\epsilon}$  je libovoný jednotkový vektor, který vyjadřuje skutečnost, že máme čtyři rovnice pro šest neznámých komponent vektorů  $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2$  a kde  $g$  je velikost vektoru  $\mathbf{g} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ . Jestliže budeme uvažovat rozdíl předchozích dvou rovnic, dostaneme

$$\mathbf{g}' = \mathbf{g} - 2\vec{\alpha}(\vec{\alpha} \cdot \mathbf{g}) .\tag{366}$$

Ukazuje se, že dvě symetrie, které se vyskytují ve srážkách, hrají důležitou roli v kinetické teorii. Je vhodné mluvit o hybnostech  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$  před srážkou, a impulsy po srážce označíme jako  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)$ . Pak charakterizujeme srážku jako

$$[(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \rightarrow (\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2)]_s ,\tag{367}$$

kde dolní index  $s$  označuje, že impaktní parameter  $s$  je důležitou veličinou, která charakterizuje srážku. Je zřejmé, že inverzní k této srážce je srážka, kdy konečný stav je  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ . Jinými slovy máme (pro pružné srážky, kdy se zachovává energie)

$$([( \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ) \rightarrow ( \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 ) ]_s )^{-1} = [ ( \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 ) \rightarrow ( \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ) ] .\tag{368}$$

Druhý typ srážek, které hrají důležitou roli, jsou zpětné srážky. Zpětné srážky jsou takové srážky, kdy konečný stav je  $(-\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2)$ , kdy  $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$  jsou počáteční hybnosti vstupující do srážky. Opět, pro pružné srážky máme

$$([( \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2 ) \rightarrow ( \mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_2 ) ]_s )^R = [ ( -\mathbf{p}'_1, -\mathbf{p}'_2 ) \rightarrow ( -\mathbf{p}_1, -\mathbf{p}_2 ) ] .\tag{369}$$

Je zřejmé, že tyto srážky jsou kinematically ekvivalentní a tedy i jejich účinné průřezy jsou stejné.

### 3.4 Srážky ve zředěném plynu

Uvažujme zředěnou tekutinu, kde celkový objem kapaliny je mnohem menší než objem, jenž zaujímá tato tekutiny

$$na^3 \ll 1 ,\tag{370}$$

kde  $n$  je hustota částic a kde  $a$  je poloměr jedné částice. Budeme uvažovat neutrální částice, kde neexistují síly dalekého dosahu (gravitaci můžeme zanedbat), tedy pak můžeme předpokládat, že k interakci mezi částicemi dochází pouze v okamžiku, kdy dojde k jejich srážce, jinými slovy v okamžiku, kdy vzdálenost mezi částicemi není o mnoho větší než  $d = 2a$ . Částice se pohybují volně mezi dvěma kolizemi, kde průměrný vzdálenost mezi kolizemi je dána střední volnou drahou částice

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{2}n\pi d^2} \quad (371)$$

Je zřejmé, že ve zředěné tekutině platí  $\lambda \gg d$ . Z toho vyplývá, že binární srážky jsou mnohem častější než srážky tří a více částic, které interagují ve stejný časový okamžik. Je také zřejmé, že srážky indukují změny v rozdělovací funkci  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$ : Například, některá částice s počáteční rychlostí  $\mathbf{v}$  může mít po srážkách jinou rychlost, což znamená, že  $\delta f(\mathbf{v}) < 0$ . Druhá možnost je, že některé částice s jinými počátečními rychlostmi mohou mít rychlost  $\mathbf{v}$  po srážce, což si efektivně můžeme představit, jako zvýšení pravděpodobnosti, že danou částici najdeme s rychlostí  $\mathbf{v}$ . Jinými slovy, máme  $\delta f(\mathbf{v}) > 0$ . Z toho důvodu je možné předpokládat, že časová změna jednočásticové distribuční funkce má tvar

$$\frac{Df}{Dt} d^3x d^3u = -C_{out} + C_{in} , \quad (372)$$

kde  $C_{out}$  je dán příspěvkem od částic, které opustí interval rychlosti v okolí bodu  $\mathbf{v}$  zatím co  $C_{in}$  je dán příspěvkem od částic, které vstoupí do daného intervalu. Je jasné, že pro další studium kolizní Boltzmanovy rovnice musíme dát více podrobnější popis těchto příspěvků.

### Binární srážky

Uvažujme srážku dvou stejně hmotných částic a předpokládejme, že jejich počáteční rychlosti jsou  $\mathbf{v}, \mathbf{v}_1$  a konečné rychlosti jsou  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$ . Poté zákony zachování hybnosti a energie mají tvar

$$\begin{aligned} \mathbf{v} + \mathbf{v}_1 &= \mathbf{v}' + \mathbf{v}'_1 , \\ \frac{1}{2}|\mathbf{v}|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}_1|^2 &= \frac{1}{2}|\mathbf{v}'|^2 + \frac{1}{2}|\mathbf{v}'_1|^2 \end{aligned} \quad (373)$$

Dále budeme předpokládat, že interakce mezi částicemi má centrální charakter, relativní rychlost částic po srážce,  $\mathbf{g}' = \mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1$  leží v rovině počáteční



relativní rychlosti,  $\mathbf{g} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_1$  a počáteční relativní vektor mezi částicemi  $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{x}_1$ .

Máme tedy pět podmínek pro šest neznámých veličin, kterými jsou čárkované vektory. Abychom tedy mohli tyto neznáme veličiny určit, musíme zavést šestou podmínku, která vychází z původu interakce mezi částicemi. Ukážeme, že tato šestá podmínka je dána pomocí *diferenciálním účinným průřezem rozptylu*.

Uvažujme molekulu  $M$ , která v čase  $t$  má rychlost  $\mathbf{v}$ . Můžeme si nyní vyznačit sféru okolo této molekuly o poloměru  $r_0$ . Je zřejmé, že nalétávající částice je ovlivněna molekulou  $M$  za předpokladu, kdy bude procházet touto sférickou oblastí.

Nyní předpokládejme, že existuje časový interval  $\Delta t$ , který splňuje následující dvě vlastnosti

- $\Delta t$  je mnohem větší než doba působení interakce  $\tau_c$ .
- $\Delta t$  je mnohem menší, než relaxační doba  $\tau_r$ , což je nutné pro zanedbání změny rozdělovací funkce během tohoto okamžiku, při pevném  $\mathbf{x}$  a  $\mathbf{v}$ .

Dále budeme předpokládat, že daný systém je pouze lehce nehomogenní v prostoru. Jinými slovy, jestliže označíme  $\bar{\mathbf{v}}$  jako typickou molekulární rychlost, pak předpokládáme, že rozdělovací funkce v bodě  $\mathbf{x} + \bar{\mathbf{v}}\Delta t$  je stejná, jako rozdělovací funkce v bodě  $\mathbf{x}$ .

Uvažujme dva svazky srážejících se částic, kde označíme hustoty těchto částic jako  $n_1$  a  $n$  s rychlostmi  $\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}$ . Můžeme přejít k souřadnicové soustavě spojené s částicí v druhém svazku a pak se tento problém redukuje na problém nalétávajících částic na částici  $M$ . Pak částice v druhém svazku, tedy částic o hustotě  $n$  a rychlostmi  $\mathbf{v}$  jsou ovlivněny tokem částic z prvního svazku. Počet částic, které mají počáteční rychlost  $\mathbf{g}$  a které se srazí s centrální částicí za čas  $\Delta t$  a nacházejí se v mezikruží o parametrech  $s$  a  $s + ds$ , je rovno

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) d^3 \mathbf{v}_1 2\pi b d b g \Delta t . \quad (374)$$

Jestliže nyní vynásobíme tento výraz hustotou počtu částic, které mají rychlost  $\mathbf{v}$ ,  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) d^3 \mathbf{v}$ , dostaneme počet srážek, v bodě  $\mathbf{x}$ , které proběhnou za časový okamžik  $\Delta t$  s částicemi, které mají rychlost v intervalu  $\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v}$

$$\int d^3 \mathbf{v}_1 f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) 2\pi |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}| 2\pi b \Delta t = C_{out} d^3 \mathbf{v} \Delta t . \quad (375)$$

Podobným způsobem můžeme určit i hodnotu  $C_{in}$ , která udává přírůstek počtu částic v intervalu  $d^3\mathbf{v}$ . Jedná se o inverzní proces k původnímu procesu, kdy částice, s počátečními rychlostmi  $\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1$  a se srážkovým parametrem  $s$ . Pak zjevně dostaneme ..

$$\int d^3\mathbf{v}' ds f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) 2\pi g b d\mathbf{v}' \Delta t = C_{in} d^3\mathbf{v} \Delta t . \quad (376)$$

Je podstatné, že počáteční a konečné rychlosti jsou řešením dynamického problému a tedy jsou vstáhnuty kanonickým zobrazením. Pak Liouvillovův teorém dává

$$d^3\mathbf{v} d^3\mathbf{v}_1 = d^3\mathbf{v}' d^3\mathbf{v}'_1 . \quad (377)$$

Samozřejmě, pro platnost tohoto teorému je důležitý předpoklad, že můžeme uvažovat srážku dvou částic jako izolovaný proces, kdy nemusíme brát do úvahy vliv ostatních částic. Jestliže tedy dáme všechny tyto výrazy dohromady, dostáváme slavnou Boltzmanovu rovnici

$$\begin{aligned} & \partial_t f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) + \mathbf{v} \cdot \nabla f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) = \\ & = \int d\mathbf{v}_1 ds 2\pi g s (f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t) - f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t) f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)) . \end{aligned} \quad (378)$$

K analogickému výsledku můžeme dojít s pomocí definice účinného průřezu, kdy my víme, že

$$\sigma = \frac{d\phi ds}{d\Omega} , \quad (379)$$

kde  $\sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1)$  je diferenciální účinný průřez. Zákony zachování energie a hybnosti s požadavek, že rozptyl se uskuteční do daného prostorového úhlu  $d\Omega$  určuje čárkované proměnné. Poznamenejme také, že v procesech, kde dochází k rozptylu molekul, předpokládáme, že tyto procesy jsou reverzibilní, tedy mohou probíhat i opačným směrem. Matematicky se toto vyjadřuje jako

$$\sigma(\mathbf{v}', \mathbf{v}'_1 | \mathbf{v}, \mathbf{v}_1) = \sigma(\mathbf{v}, \mathbf{v}_1 | \mathbf{v}', \mathbf{v}'_1) . \quad (380)$$

Dále víme, že element prostorového úhlu  $\Omega$  je roven

$$d\Omega = d\phi \sin \theta d\theta \quad (381)$$

a pak tedy dostaneme

$$\sigma = \frac{s(\theta) ds(\theta)}{\sin \theta d\theta} . \quad (382)$$

Pak je konečně zřejmé, že můžeme vyjádřit  $sds$  pomocí diferenciálního účinného průřezu a tedy integrace přes  $2\pi sds$  nahradíme integrací přes prostorový úhel  $d\Omega$  a tím dostaneme Boltzmannovu rovnici ve tvaru

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \int d^3 v_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) \equiv \mathcal{C}(f) \quad (383)$$

kde pro jednoduchost zápisu jsme zavedli notaci

$$f = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t), f_1 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t), f' = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}', t), f'_1 = f(\mathbf{x}, \mathbf{v}'_1, t). \quad (384)$$

a kde jsme nahradili  $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{v}$  a  $\mathbf{F} = m\dot{\mathbf{v}}$ . Je důležité zdůraznit, že  $\mathbf{F}$  zahrnuje vnější sílu, jako například gravitaci, a ne mezičasticové interakce, které jsou modelovány srážkami, a tedy srážkovým integrálem.

V předchozím zápisu jsme také předpokládali, že diferenciální účinný průřez je funkcí prostorového úhlu  $\Omega$ , tedy  $\sigma = \sigma(\Omega)$ , což platí za předpokladu, kdy účinný průřez závisí pouze na úhlu mezi relativními rychlostmi částic, tedy na úhlu mezi  $\mathbf{v} - \mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{v}' - \mathbf{v}'_1$ . Také poznamenejme, že když provedeme integrály přes  $\Omega$  (určený vektorem  $\mathbf{v}$ ) a přes  $\mathbf{v}_1$ , musíme použít zákony zachování, abychom vyjádřili  $\mathbf{v}'$  a  $\mathbf{v}'_1$  jako funkce  $\mathbf{v}$ , což je pevná proměnná, přes kterou se neintegruje a jako funkcí  $\mathbf{v}_1$ , což je integrační proměnná.

Závěrem řekněme, že Boltzmannova rovnice s kolizním členem je nelineární integro-diferenciální rovnicí pro rozdělovací funkci. Je jasné, že je netriviální úkol najít řešení takové to rovnice.

### 3.4.1 Předpoklady použité při odvození Boltzmannovy rovnice

Nyní shrneme základní předpoklady, které byly použity při odvození Boltzmannovy rovnice.

První důležitý předpoklad je existence časového intervalu  $\Delta t$ , který splňuje

$$\tau_c \ll \Delta t \ll \tau_r. \quad (385)$$

kde  $\tau_c$  je doba působení interakce mezi částicemi, jinými slovy je to interval, během kterého dojde ke znatelným změnám trajektorie částic. je zřejmé, že tento časový okamžik je úměrný efektivnímu poloměru interakce. Časový interval  $\delta\tau_r$  je časový interval odpovídající času mezi dvěma srážkami, je určena druhým parametrem, který určuje systém. Veličina  $\tau_r$  je velká, když je hustota částic  $n$  malá, kdy zřejmě střední vzdálenost mezi dvěma částicemi

je velká a tedy i srážky jsou méně časté. Pak je zřejmé, že  $\tau_c/\tau_r$  je malé číslo, když platí

$$\gamma = r_c^3 n \ll 1 . \quad (386)$$

V případě, že je toto číslo malé, pak můžeme opravdu najít  $\delta t$  tak, že splňuje (385). Dále, podmínka (386) zaručuje, že srážky jsou dobře definované události v prostoru i času, následné částky, kde se účastní daná částice, se nepřekrývají. Jinými slovy představujeme si srážky, jako posloupnost jednotlivých dvoučásticových srážek.

Předpoklad (386) vede k druhému důsledku. Při určení počtu částic, které nalétávají na centrální, jsme implicitně předpokládali, že rozdělovací funkce se nemění během časového intervalu  $\Delta t$  díky předpokladu  $\Delta t \ll \tau_r$ . Pak bylo možné uvažovat funkci  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)$  v ten samý časový okamžik  $t$ , který určuje čas, kdy dojde ke změně rozdělovací funkce v důsledku srážky. V opačném případě bychom museli použít počet částic ve fázovém bodě  $\mathbf{x}, \mathbf{v}_1$  v předcházejícím časovém okamžiku  $t - \tau$ , kde  $\tau$  je časový interval nutný, aby částice s rychlostí  $\mathbf{v}_1$  dostihla centrální částici. Pak by rychlost změny funkce  $f$  by také závisela na tvaru rozdělovací funkce v minulosti.

Nyní budeme diskutovat další předpoklad týkající se stupně nehomogeneity daného plynu. Toto je předpoklad, že rozdělovací funkce se nemění na na délkových intervalech, kterými projde nalétávající molekula za čas  $\Delta t$ . Když by tento předpoklad neplatil, pak bychom museli uvažovat rozdělovací funkci ve srážkovém členu v místě, z kterého přichází nalétávající molekula. Výsledkem bychom dostali nelokální tvar kinetické rovnice, protože na rychlost změny rozdělovací funkce v bodě  $\mathbf{x}$  by měly vliv rozdělovací funkce definované v okolí tohoto bodu. V prvním přiblížení se tento fakt zanedbává za předpokladu, kdy vlastnosti plynu se zřetelně mění na vzdálenostech převyšující poloměr interakčního působení.

Je také zmínit další podstatný předpoklad, který jsme implicitně použili. Vidíme, že srážkový člen závisí na součinu jednočásticových rozdělovacích funkcí  $f(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)f(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)$ . Na druhou stranu víme z předchozích kapitol, že tento předpoklad obecně neplatí. Obecně počet dvojic částic, které se nacházejí ve dvou rozdílných bodech fázového prostoru, je dáno *dvoučásticovou rozdělovací funkcí*  $f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t)$ . Víme ale, že obecně neplatí

$$f_2(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) \neq f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}, t)f_1(\mathbf{x}, \mathbf{v}_1, t) . \quad (387)$$

Jinými slovy, jestliže budeme předpokládat rovnost těchto dvou výrazů, tak implicitně předpokládáme, že neexistují korelace mezi částicemi. Je zřejmé,

že i kdybychom byli schopni vytvořit systém, kde v čase  $t = 0$  neexistují korelace, pak tyto korelace se objeví v důsledku interakce mezi částicemi. Uvažujme následující případ. Máme dvě částice, které jsou na počátku dostatečně daleko od sebe. V případě, že zde existují interakce krátkého dosahu, pak tyto částice navzájem o sobě nevědí a tedy se chovají jako nezávislé. Jestliže se ale tyto částice navzájem přiblíží, pak dojde ke vzájemné interakci a tedy jejich trajektorie se vzájemně ovlivňují. V případě, kdy je jejich interakce odpudivá, pak částice po přiblížení k sobě se opět rozletí. Proto pravděpodobnost, že najdeme dvě částice velice blízko u sebe je menší než součin pravděpodobností, že danou částici najdeme kdekoliv uvnitř systému. Jinými slovy, vzájemné působení vede ke korelaci mezi částicemi.

Předpoklad  $f_2 = f_1 f_1$  je velice znám a široce diskutován. Tento předpoklad je také znám jako *Hypotéza molekulárního chaosu*. Je to velice silný předpoklad, který byl široce diskutován. Jedním z nejvýznamnějších důsledků tohoto předpokladu je, při srovnání s formou BBGKY rovnic, že Boltzmanova rovnice je uzavřenou rovnicí pro jednočásticovou funkci. Na druhou stranu tím, že jsme ukončili sekvenci BBGKY rovnic, která ve své podstatě je systém lineárních rovnic, dostaneme Boltzmannovu rovnici, která je nyní nelineární rovnicí. Na druhou stranu existuje množství metod, jak řešit tuto rovnici a s některými z nich se setkáme v dalším výkladu.

### 3.4.2 Multi-komponentový plyn

V této kapitole zobecníme Boltzmannovu rovnici na případ plynu, který je tvořen částicemi různých druhů. Pro tento účel přepíšeme jedno-komponentovou Boltzmannovu rovnici do tvaru

$$\begin{aligned} \partial_t f - \frac{\partial V}{\partial x^i} \frac{\partial f}{\partial p_i} + \frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial x^i} = \\ = \partial_t f + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial u^i} + u_i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \hat{J}(f|f), \end{aligned} \quad (388)$$

kde jsme zadefinovali

$$\hat{J}(f|g) = \int d^3 \mathbf{u}_1 \int d\Omega \sigma |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| (f' g'_1 - f g_1). \quad (389)$$

Poté pro systém z  $\bar{N}$  různých druhů máme

$$\frac{Df_i}{Dt} = \sum_{j=1}^{\bar{N}} \hat{J}(f_i, f_j) , \quad (390)$$

kde například

$$\hat{J}(f_i, f_j) = \int d^3\mathbf{u}_j \int d\Omega |\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j| \sigma_{ij} d\Omega_{ij} (f'_i f'_j - f_i f_j) . \quad (391)$$

Poté systém  $\bar{N}$  svázaných rovnic tvoří zobecnění jednosložkové Boltzmanovy rovnice na případ  $\bar{N}$  druhů částic.

### 3.5 Momenty kinetické rovnice

V této kapitole zavedeme momentové integrály kinetické rovnice, které slouží k přechodu od mikroskopického k makroskopickému popisu tekutiny. Fundamentálním prvkem tohoto popisu je pojem *pole*, to jest funkce  $B(\mathbf{x}, t)$ , což je veličina definovaná v každém bodě  $\mathbf{x}$ , která se vyvíjí v čase  $t$ . Typickými příklady je hustota látky  $\rho(\mathbf{x}, t)$  a lokální rychlost  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ <sup>1</sup> Tyto makroskopické veličiny určíme jako střední hodnoty mikroskopických funkcí  $b$ . Časová závislost funkce  $B(\mathbf{x}, t)$  je dána rozdělovací funkcí, která je řešením kinetické rovnice, zatím co závislost na  $\mathbf{x}$  vyplývá ze závislosti  $b$  na  $\mathbf{x}$  jako na parametru. Explicitně

$$B(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} b(\mathbf{y}, \mathbf{u}; \mathbf{x}) f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) . \quad (392)$$

Další krok je dán konkrétním výběrem funkce  $b$ . V makroskopickém popisu hrají významnou roli hustota hmoty, hustota toku hybnosti, hustota energie. Tyto funkce budeme definovat následujícím způsobem. Vybereme jeden bod fyzikálního prostoru  $\mathbf{x}$  pomocí delta funkce  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ . Jestliže se v bodě  $\mathbf{x}$  nenachází částice, pak tento bod dává nutně nulový příspěvek do  $B$ , jestliže se zde ale nachází částice, pak dává příspěvek úměrný  $\beta_1(\mathbf{y}, \mathbf{u})$ , kde  $\beta_1$  bude rovno buď  $m$  nebo  $\mathbf{u}$ . Pak tedy dostaneme

$$b(\mathbf{y}, \mathbf{u}; \mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) . \quad (393)$$

<sup>1</sup>Abychom odlišili tuto veličinu od rychlosti částic, která vystupuje v Boltzmannově rovnici, budeme tuto jednočásticovou rychlost v dalším označovat pomocí symbolu  $\mathbf{u}$ .

Funkce tohoto typu nazýváme lokálními veličinami. Abychom našli časový vývoj této funkce, provedeme derivaci (392) podle času

$$\partial_t B(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \partial_t f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) . \quad (394)$$

Předpokládejme, že kinetická rovnice má nyní tvar

$$\partial_t f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) = \mathcal{O} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \quad (395)$$

kde forma operátoru  $\mathcal{O}$  vyplývá z konkrétního tvaru kinetické rovnice. Pak dostaneme

$$\partial_t B(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) \mathcal{O} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) . \quad (396)$$

V dalším kroku se budeme snažit přenést působení operátoru  $\mathcal{O}$  na dynamickou proměnnou místo působení na  $f$ . Obecně je vždy možné toto provést s použitím integrace po částech, kdy předpokládáme, že funkce  $f$  je rovna nule na hranici v nekonečnu, nebo jednoduchým přeskládáním členů. Pak dostaneme

$$\partial_t B(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) [\mathcal{O}^\dagger(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u})] \quad (397)$$

kde  $\mathcal{O}^\dagger$  je sdružený operátor k operátoru  $\mathcal{O}$ . Nyní zdefinujeme následující veličinu

$$c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) = \mathcal{O}^\dagger \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) . \quad (398)$$

kde je zřejmé, že  $c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$  je formálně dynamickou funkcí. Je důležité ale říci, že tato funkce může obecně záviset na  $f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)$ , neboť operátor  $\mathcal{O}$  může být nelineární, jak například vyplývá ze struktury srážkového členu. Pak tedy konečně dostaneme

$$\partial_t B(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}) f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \equiv C(\mathbf{x}, t) , \quad (399)$$

kde  $C(\mathbf{x}, t)$  je střední hodnota veličiny  $c(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u})$ . Význam rovnice (399) je v tom, že časová derivace makroskopické veličiny  $B(\mathbf{x}, t)$  je určena makroskopickou veličinou  $C(\mathbf{x}, t)$ . Jinými slovy řečeno, vidíme, že je možné přejít od mikroskopické rovnice k makroskopické rovnici, které se někdy také nazývají rovnicemi momentů kinetické rovnice.

Je také jasné, že z jedné kinetické rovnice můžeme dostat nekonečné množství rovnic pro momenty odpovídající různým funkcím  $\beta$ . Tyto rovnice mají hierarchickou strukturu:  $\partial_t B$  je dáno novou funkcí  $C$ , pak derivace  $\partial_t C$  je dána novou funkcí  $D$  atd. Ukážeme, že tento systém není nikdy uzavřený, což je analogie BBGKY systému, na druhou stranu je zde určitý specifický rozdíl. Tento rozdíl je znám z makroskopické teorie bez ohledu na formu kinetické teorie. V hydrodynamice dostaneme uzavřený systém rovnic, jestliže zavedeme určité fenomenologické předpoklady.

Budeme nyní podrobně analyzovat přenos operátoru  $\mathcal{O}$  na funkci  $b$ . Nejdříve použijeme tokový člen  $-\mathbf{u} \cdot \nabla$ , kde s pomocí integrace po částech dostaneme

$$\begin{aligned} F &= - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) u^i \frac{\partial}{\partial y^i} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) = \\ &= \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) u_i (\partial_{y^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_{y^i} \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u})) . \end{aligned} \quad (400)$$

Z definice delta funkce dostaneme

$$\partial_{y^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = -\partial_{x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad (401)$$

a tedy

$$\begin{aligned} F &= -\nabla \cdot \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u} \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) + \\ &+ \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) u_i \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \partial_{y^i} \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) . \end{aligned} \quad (402)$$

Další krok se týká členu obsahující interakce s vnějším polem

$$\begin{aligned} \sigma_B^{(2)} &= \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = \\ &= - \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}(\mathbf{y})}{m} \cdot f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) . \end{aligned} \quad (403)$$

Poslední krok se týká analýzy srážkového členu, který má nejvíce komplikovanou závislost na rozdělovací funkci a jehož forma závisí na konkrétní



kinetické rovnici. Jestliže označíme tento srážkový člen jako  $\mathcal{K}f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)$ , pak jeho příspěvek do momentové rovnice si označíme jako

$$\sigma_B^{(3)} = \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{u}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\beta(\mathbf{y}, \mathbf{u})\mathcal{K}f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) . \quad (404)$$

Nyní zavedeme tok pole  $B$

$$\Phi_B(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{u}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\mathbf{u}\beta(\mathbf{y}, \mathbf{u})f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \quad (405)$$

a

$$\sigma_B^{(1)} = \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{u}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\frac{\partial\beta(\mathbf{y}, \mathbf{u})}{\partial y^i}\mathbf{u}_if(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) . \quad (406)$$

Pak dostaneme momentovou rovnici pro  $B$  ve tvaru

$$\partial_t B(\mathbf{x}, t) = -\partial_i\Phi_B^i(\mathbf{x}, t) + \sigma_B \quad (407)$$

kde

$$\sigma^B = \sigma_B^{(1)} + \sigma_B^{(2)} + \sigma_B^{(3)} \quad (408)$$

je *zdroj pole*  $B$ . Rovnice (407) jsou známy jako rovnice lokální rovnováhy, které mají následující interpretaci. Při  $\sigma_B = 0$  se redukuje na rovnici, která vyjadřuje lokální formu zákona zachování veličiny  $B$ . Pak je zřejmé, že nenulový člen  $\sigma_B = 0$  odpovídá zdroji, který dodává či ubírá  $B$  do daného objemu.

### 3.6 Boltzmannův H teorém a nevratnost entropie

Předchozí obecný formalism použijeme při sledování časového vývoje veličiny, která je fundamentalní v nerovnovážné termodynamice, kterým je entropie, což je stavová veličina. Tato veličina se vyskytuje v druhém termodynamickém zákoně, který je úzce spojen s pojmem nevratnosti, kdy entropie roste v izolovaném systému v důsledku nevratných procesů. Tento růst se zastaví v okamžiku, kdy se systém dostane do rovnovážného stavu, kdy entropie dosahuje své maximální hodnoty. V lokální formě dostaneme, že časový vývoj entropie, tak jako každé dynamické veličiny, je dán rovnicí

$$\partial_t s(\mathbf{x}, t) = -\nabla \cdot \Phi_s(\mathbf{x}, t) + \sigma_s(\mathbf{x}, t) . \quad (409)$$

Druhý termodynamický zákon není nic jiného, než

$$\sigma_s(\mathbf{x}, t) \geq 0 . \quad (410)$$

Boltzmannova kinetická rovnice, která byla odvozena v roce 1872, byla tak úspěšná a je tak důležitá, že je z ní možné zavést entropii a také to, že entropie roste s časem. Jinými slovy Boltzmannova teorie byla první teorií, která vysvětlovala nevratnost na mechanické úrovni. Tato teorie je také známa pod pojmem *H-teorem*, protože Boltzmann použil funkci  $H = -s(\mathbf{x}, t)$ . O H teorému budeme hovořit dále.

Uvažujme homogenní systém, kdy rozdělovací funkce  $f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$  není funkcí  $\mathbf{x}$ . V tomto případě zavedeme budeme používat symbol  $\phi(\mathbf{u}, t)$  pro homogenní rozdělovací funkci. Přesněji, víme, že rozdělovací funkce  $f$  je normována následujícím způsobem

$$N = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{u} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) . \quad (411)$$

V případě homogenní rozdělovací funkce tato normovací podmínka dává

$$N = V \int d^3\mathbf{u} f(\mathbf{u}, t) \quad (412)$$

a pak je tedy vhodné zavést funkci  $F(\mathbf{u}, t)$  definovanou jako  $f(\mathbf{u}, t) = n\phi(\mathbf{u}, t)$ ,  $n = \frac{N}{V}$ , což nám dává normovací podmínku

$$1 = \int d^3\mathbf{u} \phi(\mathbf{u}, t) . \quad (413)$$

Pro tuto funkci má Boltzmannova rovnice tvar

$$\partial_t \phi(\mathbf{u}, t) = 2\pi n \int d^3\mathbf{u}_1 d\mathbf{b} d\mathbf{b}' g(\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}_1', t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) \quad (414)$$

Definujeme nyní hustotu entropie ve tvaru

$$s(t) = -k_B n \int d\mathbf{u} \phi(\mathbf{u}, t) \ln[n\phi(\mathbf{u}, t)] + b \quad (415)$$

kde  $k_B$  je Boltzmannova konstanta a  $b$  je konstanta. Nyní provedeme derivaci  $s(t)$  podle času

$$\begin{aligned} \partial_t s(t) &= -k_B n \int d^3\mathbf{u} \partial_t \phi(\mathbf{u}, t) [\ln(n\phi(\mathbf{u}, t)) + 1] = \\ &= -2\pi k_B n^2 \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 d\mathbf{b} d\mathbf{b}' g(\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}_1', t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) [\ln(n\phi(\mathbf{u}, t)) + 1] \end{aligned} \quad (416)$$

Je zřejmé, že v daném integrálu můžeme provést záměnu mezi  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{u}'$  a tedy dostaneme

$$2\pi k_B n^2 \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) [\ln(n\phi(\mathbf{u}, t)) + 1] = \\ \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) [\ln(n\phi(\mathbf{u}_1, t)) + 1] =$$
(417)

Pak máme

$$\partial_t s(t) = -\pi k_B n^2 \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) \times \\ \times [\ln(n\phi(\mathbf{u}, t)) + \ln(n\phi(\mathbf{u}_1, t)) + 2].$$
(418)

Nakonec poznamenejme, že poslední integrál můžeme přepsat do tvaru

$$\pi k_B n^2 \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) \times \\ \times [\ln(n\phi(\mathbf{u}, t)) + \ln(n\phi(\mathbf{u}_1, t)) + 2] = \\ = \pi k_B n^2 \int d^3\mathbf{u}' d^3\mathbf{u}'_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t) - \phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t)) \times \\ \times [\ln(n\phi(\mathbf{u}', t)) + \ln(n\phi(\mathbf{u}'_1, t)) + 2] \\ = \pi k_B n^2 \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t) - \phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t)) \times \\ \times [\ln(n\phi(\mathbf{u}', t)) + \ln(n\phi(\mathbf{u}'_1, t)) + 2]$$
(419)

kde v posledním kroku jsme použili vztah, že  $d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 = d^3\mathbf{u}' d^3\mathbf{u}'_1$ . S použitím této rovnosti dostaneme

$$\partial_t s(t) = \int d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 dbbg (\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t) - \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)) \ln \frac{\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t)}{\phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t)}.$$
(420)

Konečně, pro libovolná kladná čísla  $x$  a  $y$  máme

$$(x - y) \ln \frac{x}{y} \geq 0$$
(421)

**: Důkaz** Vidíme, že máme dvě možnosti. První, když  $x - y > 0$  pak máme  $\frac{x}{y} > 0$  a tedy  $\ln \frac{x}{y} > 0$  což dokazuje tuto rovnici. Naopak, pro  $x - y < 0$  dostáváme, že  $\frac{x}{y} < 1$  a tedy  $\ln \frac{x}{y} < 0$ , což opět dokazuje předchozí rovnici. Pak dostaneme výsledek

$$\partial_t s(t) \geq 0 . \quad (422)$$

### Maxwellowo rozdělení

Původní odvození této rozdělovací funkce bylo provedeno Maxwellem s použitím předpokladu isotropie.

Uvažujme rychlosti v  $x$ - směru, a předpokládejme, že jejich rozdělení je dané rozdělovací funkcí  $F(u_x)$ , která je normalizována jako

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(u_x) du_x = 1$$

Princip isotropie říká, že zde není nic speciálního, co se táká  $x$ - směru, rychlosti v  $y$ - a v  $z$ - směru mají stejné rozdělení. Pak dostáváme, že pravděpodobnost, že najdeme částic v intervalu  $du_x du_y du_z$  je rovna

$$\frac{1}{n} f(\mathbf{u}) du_x du_y du_z = F(u_x) du_x F(u_y) du_y F(u_z) du_z \quad (423)$$

Na druhou stranu, jestliže  $f$  je isotropní distribuce, pak by měla záviset pouze na velikosti rychlosti, tedy

$$\frac{1}{n} f(\mathbf{u}) = \bar{f}(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2) = F(u_x) F(u_y) F(u_z) . \quad (424)$$

Z toho dostáváme, že součet argumentů  $u_i^2$  v argumentu funkce  $\bar{f}$  musí odpovídat součinu  $F(u_i)'$ , a to je možné pouze když funkce  $F(u_x)$  je exponenciální funkcí  $u^2$

$$F(u_x) = A^{1/3} e^{-Bu_x^2} \Rightarrow f(\mathbf{u}) = n A e^{-B(u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)} = n A e^{-Bu^2} . \quad (425)$$

Konstanta  $A$  může být dán podmínkou normování funkce  $F$  tak, aby byla rovna jedné. Abychom našli hodnotu parametru  $B$ , musíme určit střední hodnotu kinetické energie  $\langle \frac{1}{2} m u^2 \rangle = \frac{3}{2} \kappa_B T$ , které pak dává

$$f(\mathbf{u}) = n \left( \frac{m}{2\pi\kappa_B T} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m u^2}{2\kappa_B T} \right) \quad (426)$$

Nyní ukážeme, že Maxwelllovo rozdělení je řešením Boltzmannovy rovnice jako její rovnovážné řešení. Uvažujme homogenní plyn bez externích sil. Aby toto řešení bylo rovnovážné, pak  $\partial_t s = 0$  a tedy dostáváme

$$\phi(\mathbf{u}', t)\phi(\mathbf{u}'_1, t) = \phi(\mathbf{u}, t)\phi(\mathbf{u}_1, t) \Rightarrow \ln \phi(\mathbf{u}', t) + \ln \phi(\mathbf{u}'_1, t) = \ln \phi(\mathbf{u}, t) + \ln \phi(\mathbf{u}_1, t) . \quad (427)$$

, Tento výraz pro Maxwelllovo rozdělení dává

$$u'^2 + u_1'^2 = u^2 + u_1^2 \quad (428)$$

což je samozřejmě splněno v případě pružných srážek.

Nyní budeme uvažovat obecnější případ nehomogenního systému, kdy  $f = f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)$ , kde ale pro jednoduchost nebudeme uvažovat interakci s vnějším polem. Nyní zavedeme lokální hustotu entropie jako pole

$$s(\mathbf{x}, t) = -k_B \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \ln f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) + b . \quad (429)$$

Pak zjevně dostaneme

$$\partial_t s(\mathbf{x}, t) = -k_B \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) [\ln f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) + 1] \partial_t f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) \quad (430)$$

což odpovídá obecnému předpisu provedenému v předchozí části, jestliže identifikujeme

$$\beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}) = -k_B [\ln f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) + 1] . \quad (431)$$

Samozřejmě ale vidíme, že toto není dynamická veličina, protože jednak explicitně závisí na čase, a dále je to veličina, která je definována pomocí rozdělovací funkce. Na druhou stranu jestliže použijeme Boltzmannovu rovnici, pak dostaneme

$$\begin{aligned} \partial_t s(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) [-u_i \frac{\partial}{\partial y^i} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) + \mathcal{K} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)] = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \Phi'_{s,i}(\mathbf{x}, t) + \sigma_s^{(3)} + \sigma_s^{(1)} \end{aligned} \quad (432)$$

kde

$$\begin{aligned} \sigma_s^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \beta(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)}{\partial y_i} v^i f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) , \\ \sigma_s^{(3)}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{y} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathcal{K} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) , \end{aligned} \quad (433)$$

a kde také budeme psát

$$\begin{aligned}
\Phi'_s(\mathbf{x}, t) &= \Phi_s(\mathbf{x}, t) + \vec{\phi}_s(\mathbf{x}, t) , \\
\Phi_s(\mathbf{x}, t) &= -k_B \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \mathbf{u} \ln f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) , \\
\phi_{s,i}(\mathbf{x}, t) &= -k_B \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_i f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) .
\end{aligned}
\tag{434}$$

Nyní vypočítáme příspěvek  $\sigma_s^{(1)}$

$$\begin{aligned}
\sigma_s^{(1)}(\mathbf{x}, t) &= -k_B \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)}{\partial y^i} u_i f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) = \\
&= -k_B \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_i \frac{\partial}{\partial y^i} f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) = \\
&= -k_B \partial_i \int d^3\mathbf{y} d^3\mathbf{u} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) u_i f(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t)
\end{aligned}
\tag{435}$$

a my vidíme, že tento příspěvek kompletně vyruší divergenci  $\partial_i \phi_{s,i}$ . Pak tedy dostáváme

$$\partial_t \sigma(\mathbf{x}, t) = -\nabla \Phi(\mathbf{x}, t) + \sigma_s^{(3)} .
\tag{436}$$

Je zřejmé, že  $\sigma_s^{(3)}$  můžeme určit stejným způsobem, jako v homogenním případě, protože kolizní člen se počítá pro pevné  $\mathbf{y}$ . Pak tedy dostáváme

$$\sigma_s^{(3)}(\mathbf{x}, t) \geq 0 .
\tag{437}$$

Jinými slovy, opět jsme dostali druhý termodynamický zákon v lokálním tvaru.

Mikroskopické procesy na molekulární úrovni jsou reverzebilní, tedy mohou probíhat i v opačné časové posloupnosti, na druhou stranu makroskopické procesy nejsou. Když například rozdělení rychlosti relaxuje do Maxwellova rozdělení v důsledku srážek, pak je tento proces ireverzibilní. Je také zajímavé, že když jsme odvozovali Boltzmanovu rovnici, tak jsme předpokládali reverzebilitu na mikroskopické úrovni. Přesto můžeme ukázat, že vedou k ireverzibilním procesům na makroskopické úrovni.

Z odvození zákona růstu entropie aké ukazuje, že příčinou růstu entropie je pouze srážkový člen, zatímco volný pohyb a případné efekty vyvolané středním polem, jsou vratné procesy, které nemají vliv na růst entropie.

Je dobré podrobněji popsat, co myslíme nevratnými procesy, které můžeme rozdělit na dvě základní třídy.

Jako příklad procesu, který spadá do první třídy, uvažujme shluk vzájemně neinteragujících částic, které jsou na počátku lokalizovány v koutě krychle s dokonale odražejícími stěnami. Předpokládejme, že částice mají na počátku rychlosti distribuované kompletně náhodným způsobem. Je jasné, že za nějaký dostatečně dlouhý časový interval částice, které jsou v daném shluku, jsou rozprostřeny spojitě po celé krychli díky volnému pohybu částic, kdy dopadají a odraží se od stěn. Zdá se, že se tento proces jeví jako nevratný. V závislosti na počátečním stavu daný systém se blíží ke stavu s homogenní hustotou částic, kde čas, který je potřebný k dosažení homogenní konfigurace, silně závisí na počátečních podmínkách. Například, jestliže budeme mít dostatečně široký interval počátečních rychlostí, pak homogenní stav dostaneme tím rychleji. Z mikroskopického pohledu je zřejmé, že volný pohyb částic nemá vliv na rozložení rychlosti, neboť částice se spolu nesráží a jejich srážky se stěnami jsou dokonale pružné. Tento nevratný proces se také nazývá proces s fázovým míšením, které jsou charakteristické absencí určité časové škály, jenž nezávisí na počátečních podmínkách. Je zřejmé, že v takových procesech nedochází k růstu entropie.

Položme si nyní otázku, co se stane, když připustíme srážky mezi částicemi. V takovém případě díky neregulárnosti a velkému množství srážek brzy dojde ke ztrátě informace o počátečním rozložení rychlostí. V tomto případě proces rozprostření v prostoru má jiný charakter (difuze), protože je nyní určen specifickými vlastnostmi interakce mezi částicemi a také obecnými vlastnostmi, jako je hustota a teplota. Tyto specifické parametry udávají relaxační čas, který je nezávislý od počátečního stavu systému. Rozdělení rychlostí se blíží k Maxwellovskému rozdělení a daný proces je spojen s růstem entropie. Tyto procesy se také někdy nazývají jako procesu disipatického typu.

Je velice zajímavé, že jsme vyšli z předpokladu reverzibilní mikroskopické fyziky, ale končíme s veličinou  $H$ , která má nesymetrický časový vývoj. Můžeme to interpretovat jako objevení šipky času.

Je dobré poznamenat, že  $H$  teorém někdy není interpretován jako růst entropie  $S$ . Zde,  $H$  je definována pro jednosložkový plyn, zatím co entropie může být definována pro komplikovanější systémy, běžná definice entropie je definována pouze pro systémy v termodynamické rovnováze či ve stavu jí blízké, zatím co  $H$  je definována pro nerovnovážné systémy.

S existencí  $H$  teorému je spojen následující paradox. Předpokládejme, že v jednom časovém okamžiku obrátíme rychlosti částic v plynu. Pak částice

budou sledovat své původní trajektorie. To znamená, že jestliže jsme původně měli  $\frac{ds}{dt} > 0$  tak v situaci, která probíhá v opačném pozadí, bychom měli mít  $\frac{ds}{dt} < 0$ , což je zřejmý paradox.

Vysvětlení tohoto paradoxu leží v předpokladu týkající se dokazování H teorému. Implicitně jsme předpokládali, že neexistuje korelace mezi částicemi před jejich srážkami. Toto je známé jako molekulární chaos a tento předpoklad je implicitně skryt ve statistické formulaci interakcí pomocí sázkového účinného průřezu. Je jasné, že nemůžeme předpokládat, že molekuly nejsou v korelaci po srážkách. Tedy, v situaci, která by měla probíhat opačným směrem, molekuly nejsou nezkorelované po jejich srážkách, a tudíž předpoklady, které jsou skryté za odvozením Boltzmanovy rovnice, neplatí. Takže, ve skutečnosti, šipka času v Boltzmanově rovnici byla implicitně zvolena předpokladem, že rychlosti částic jsou nezkorelované před srážkami.

### 3.6.1 Poincarého teorém

S pojmem nevratnosti úzce souvisí tzv Poincarého rekurentní teorém, který říká, že trajektorie systému ohraničeného izolovaného systému o konečné energii se, po dostatečně dlouhé době, přiblíží libovolně blízko své počáteční pozici.

Nastíníme stručný důkaz tohoto teorému. Uvažujme počáteční stav systému ve fázovém prostoru  $z_0 \equiv (q_0, p_0)$  a tento bod je obsažen v množině fázového prostoru  $\Omega_0$ . Pak se systém vyvíjí na povrchu daným podmínkou konstantnosti energie. Pak tento teorém říká, že za dostatečně dlouhou dobu se systém opět dostane do množiny  $\Omega_0$ . Necht'  $\hat{T}$  je operátor, který propaguje  $\Omega_0$  za jednotku času. Pak díky Liouvillovu teorému

$$\Omega_0, \hat{T}\Omega_0, \hat{T}^2\Omega_0 \quad (438)$$

mají stejnou míru. Jestliže se tyto množiny neprotínají, pak povrch, na kterém se pohybují, by měl nekonečnou míru, což je v rozporu s předpokladem. Pak tedy můžeme psát

$$\hat{T}^k\Omega_0 \cap \hat{T}^n\Omega_0 = \bar{\Omega} \neq 0 \quad (439)$$

pro nějaká přirozená čísla  $k, n$ . Dále, díky jednoznačnosti trajektorií dostáváme, že  $\hat{T}$  je bijektivní zobrazení, což nám dovoluje psát

$$\hat{T}(A \cap B) = \hat{T}(A) \cap \hat{T}(B) . \quad (440)$$



Jestliže nyní budeme působit s  $\hat{T}^{-n}$  na (439) dostaneme

$$\hat{T}^{-n}(\hat{T}^k \cap \hat{T}^n \Omega_0) = \hat{T}^{-n} \bar{\Omega} \neq 0 \quad (441)$$

a když použijeme (440) dostaneme

$$\hat{T}^{k-n} \Omega_0 \cap \Omega_0 \neq 0 . \quad (442)$$

Jinými slovy, za  $k - n$  časových jednotek množina  $\Omega_0$  má konečný průnik sama se sebou. Nyní, jestliže vezmeme míru  $\Omega_0$  libovolně malou, dostaneme Poincarého teorém.

Je zřejmé, že tento teorém je založen na následujících předpokladech. Předně systém musí být omezen, například v případě mechanického systému musíme požadovat, aby tento systém byl v ohrazené prostorové oblasti, jinými slovy namůžeme dovolit, aby trajektorie částic směřovaly do nekonečna. A dále, musí platit Liouvillův teorém. Je také zřejmé, že systém nemusí projít celým fázovým prostorem dříve, než se vrátí do původního stavu, kde systémy, které pokryjí celý fázový prostor během svého vývoje, se nazývají ergodickými systémy.

### 3.6.2 Boltzmannova a Gibbsova Entropie

V předchozí části jsme definovali entropii pomocí rozdělovací funkce kinetické teorie. Nyní stručně podáme obecnější definici.

Gibbsova entropie  $\mathcal{H}_N$  je definována pomocí  $N$ -částicové rozdělovací funkce  $f_N$  jako

$$\mathcal{H}_N = \int f_N \ln f_N \prod_{i=1}^N d^3 \mathbf{x}_i d^3 \mathbf{p}_i . \quad (443)$$

Abychom určili časový vývoj této veličiny, výjdeme z Liouvillovy rovnice

$$\frac{\partial f_N}{\partial t} + \{f_N, H\} = 0 . \quad (444)$$

Pak časový vývoj této entropie je roven

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{H}_N}{dt} &= \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i \frac{\partial f_N}{\partial t} (1 + \ln f_N) = \\
&= - \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i \{f_N, H\} (1 + \ln f_N) = \\
&= - \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{m} - \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \right) (1 + \ln f_N) = \\
&= - \int \prod_{i=1}^N d^3\mathbf{x}_i d^3\mathbf{p}_i \sum_{i=1}^N \left( \frac{1}{m} \frac{\partial f_N \ln f_N}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \mathbf{p}_i - \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\partial f_N \ln f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \right) = 0
\end{aligned} \tag{445}$$

kde jsme použili

$$\{f_N, H\} = \sum_{i=1}^N \left( \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{x}_i} \cdot \frac{\mathbf{p}_i}{m} - \frac{\partial f_N}{\partial \mathbf{p}_i} \cdot \frac{\partial V}{\partial \mathbf{x}_i} \right) \tag{446}$$

a dále integraci po částech. Vidíme tedy, že Gibbsova entropie se zachovává a tedy splňuje reverzibilní rovnici. Tato entropie je vstáhnuta k termodynamické entropii následujícím způsobem

$$S = -k_B \mathcal{H}_N \tag{447}$$

což je kinetická definice entropie izolovaného systému. Druhý termodynamický zákon nám říká, že  $\Delta S \geq 0$  pro izolovaný systém kdy rovnost platí pro reverzibilní procesy. Protože Liouvillova rovnice je reverzibilní, dostaneme, že výsledek  $S = konst$  je v souladu s druhým termodynamickým zákonem.

V případě, kdy neexistují korelace mezi částicemi, máme

$$f_N = \prod_{i=1}^N f_1(i) \tag{448}$$

a tedy

$$\mathcal{H}_N = \sum_{i=1}^N \prod_{j=1}^N \int \prod_{k=1}^N d^3\mathbf{x}_k d^3\mathbf{p}_k \prod_{j=1}^N f_1(j) \ln f_1(i) = \sum_{i=1}^N \mathcal{H}_1(i) = N\mathcal{H} \tag{449}$$

kde

$$\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{p} f_1 \ln f_1 . \quad (450)$$

Jak jsme viděli, pak kinetická rovnice dává  $\dot{\mathcal{H}} < 0$  jako důsledek srážek v tekutině. Jinými slovy řečeno, při sledování jednočásticové funkce dostaneme, že daný proces je ireversibilní, na rozdíl od plného dynamického popisu, který je reversibilní.

### 3.6.3 Kolizní invarianty

V této kapitole budeme definovat operátory, které mají význačné vlastnosti vzhledem k časovému vývoji systému. Poznamenejme, že kolizní integrál je definován jako

$$\hat{J}(f) = \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega \sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) . \quad (451)$$

Budeme definovat operátor

$$\hat{I}[\phi(\mathbf{u})] = \int d^3\mathbf{u} \hat{J}(f) \phi(\mathbf{u}) = \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) \phi(\mathbf{u}) . \quad (452)$$

Změna proměnných

$$(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \rightarrow (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}) \quad (453)$$

dává

$$\hat{I}(\phi(\mathbf{u})) = \hat{I}(\phi(\mathbf{u}_1)) . \quad (454)$$

Jako další krok uvažujme operátor

$$\hat{I}(\phi(\mathbf{u}')) = \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega \sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) \phi(\mathbf{u}') \quad (455)$$

Poté změna proměnných  $(\mathbf{u}, \mathbf{u}_1) \rightarrow (\mathbf{u}', \mathbf{u}'_1)$  má jednotkový Jakobián jako důsledek Liouvillova theoremu pro dvoučásticový systém, což nám dává

$$d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}'_1 = d^3\mathbf{u} d^3\mathbf{u}_1 . \quad (456)$$

Dále je také jasné, že  $|\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \sigma d\Omega$  je invariantní vůči této transformaci a pak dostáváme

$$\hat{I}(\phi(\mathbf{u}')) = \int d^3\mathbf{u}' \int d^3\mathbf{u}'_1 \int d\Omega' g' |\mathbf{u} - \mathbf{u}'_1| (f f_1 - f' f'_1) \phi(\mathbf{u}') = -\hat{I}(\phi(\mathbf{u})) . \quad (457)$$

Konečně, změna proměnných  $(\mathbf{u}'_1, \mathbf{u}') \rightarrow (\mathbf{u}', \mathbf{u}'_1)$  dává

$$\hat{I}(\phi(\mathbf{u}')) = \hat{I}(\phi(\mathbf{u}'_1)) . \quad (458)$$

Když nyní zkombinujeme všechny tyto relace, dostaneme

$$4\hat{I}(\phi(\mathbf{u})) = \hat{I}(\phi(\mathbf{u})) + \hat{I}(\phi(\mathbf{u}_1)) - \hat{I}(\phi(\mathbf{u}')) - \hat{I}(\phi(\mathbf{u}'_1)) . \quad (459)$$

Konečně, díky linearitě operátoru  $\hat{I}$ , můžeme tento výsledek přepsat do tvaru

$$\hat{I}(\phi(\mathbf{u})) = \frac{1}{4}\hat{I}(\phi(\mathbf{u}) + \phi(\mathbf{u}_1) - \phi(\mathbf{u}') - \phi(\mathbf{u}'_1)) . \quad (460)$$

Nechť  $\chi(\mathbf{u})$  je srážkový invariant, t.j.

$$\chi(\mathbf{u}) + \chi(\mathbf{u}_1) = \chi(\mathbf{u}') + \chi(\mathbf{u}'_1) . \quad (461)$$

Pak pro tuto veličinu dostáváme z (460)

$$\hat{I}(\psi) = 0 . \quad (462)$$

Nechť  $\chi(\mathbf{u})$  je veličina, jenž se zachovává při srážkách. Pak je jasné, že obecná funkce, která se zachovává při srážkách, má tvar

$$f(\mathbf{u}) = C_0 + \sum_r \chi_r(\mathbf{u}) . \quad (463)$$

kde  $\chi_r$  jsou všechny nezávislé veličiny, které se zachovávají při srážkách. Zákon zachování energie a všech tří komponent hybnosti implikují

$$f(\mathbf{u}) = C_0 + C_1\mathbf{u}^2 + C_{2x}u_x + C_{2y}u_y + C_{2z}u_z = -B(\mathbf{u} - \mathbf{u}_0)^2 . \quad (464)$$

Je zřejmé, že existence pěti nezávislých srážkových invariantů je obecným důsledkem kinetických rovnic, protože jsou svázány s dynamickými zákony zachování počtu částic, energie a hybnosti při srážkách. Tyto zákony nám říkají, že jedna molekula během srážky ztrácí hybnost a energii, zatím co druhá je získává. Na druhou stranu srážkový invariant potřebuje trochu obecnější přístup. Uvažujme zdrojový člen ve tvaru

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(3)}(\mathbf{x}) &= \int d^3\mathbf{u}d^3\mathbf{y}\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(\mathbf{u}, \mathbf{y}) \int d\Omega\sigma g(f'f'_1 - ff_1) = \\ &= \int d1d2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(\mathbf{u}, \mathbf{y})\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \int d\Omega\sigma g(f(\mathbf{y}, \mathbf{u}', t)f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1, t) - f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1, t)) \end{aligned} \quad (465)$$

kde jsme zavedli integraci přes  $\mathbf{y}_1$ , abychom dostali symetrické fázové body. Je zřejmé, že výraz se nezmění, jestliže zaměníme 1 a druhou fázovou proměnnou

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(3)}(\mathbf{x}) &= \int d1d2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)\psi(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \times \\ &\times \int d\Omega\sigma g(f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}', t)f(\mathbf{y}, \mathbf{u}', t) - f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1, t)f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)) \end{aligned} \quad (466)$$

Tento výraz můžeme také napsat

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(3)}(\mathbf{x}) &= \int d1'd2'\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)\psi(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \times \\ &\times \int d\Omega\sigma g(f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1, t)f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t) - f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1, t)f(\mathbf{y}, \mathbf{u}'_1, t)) \end{aligned} \quad (467)$$

kde  $d1' = d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{u}'$ ,  $d2' = d^3\mathbf{y}_1d^3\mathbf{u}'_1$ . Pak díky Liouvillově teorému je tento výraz roven  $d^1d^2$  a tedy dostáváme

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(3)}(\mathbf{x}) &= - \int d1d2\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)\psi(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1)\delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) \times \\ &\times \int d\Omega\sigma g(f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1, t)f(\mathbf{y}, \mathbf{u}'_1, t) - f(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1, t)f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, t)) \end{aligned} \quad (468)$$

kde konečně můžeme provést záměnu mezi první a druhou fázovou proměnnou. Výsledkem dostaneme podmínku, kdy je zdrojový člen roven nule

$$\begin{aligned} \sigma_i^{(3)} &= \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{y}d^3\mathbf{u}d^3\mathbf{y}_1d^3\mathbf{u}_2[\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi_i(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)\psi_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1) \\ &- \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}_1)\psi(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1) - \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})\psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}')] \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1)(f'f'_1 - ff_1) = 0 \end{aligned} \quad (469)$$

Tento výraz je roven nule pro libovolnou formu rozdělovací funkce, když platí

$$[\psi_i(\mathbf{y}, \mathbf{u}) + \psi_1(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}_1) - \psi(\mathbf{y}_1, \mathbf{u}'_1) - \psi(\mathbf{y}, \mathbf{u}')] \delta(\mathbf{y} - \mathbf{y}_1) = 0 \quad (470)$$

kde, oproti předchozímu výrazu, vystupuje explicitní závislost na souřadnicích, byť je dána ve formě delta funkce. Jinými slovy řečeno vidíme důležitou

vlastnost, že daná veličina se stane srážkovým invariantem, jestliže k procesu výměny energie a hybnosti dochází je jednom a tom samém bodě, což je důsledkem faktu, že ve srážkovém členu se vyskytují rozdělovací funkce v jednom a tom samém bodě  $\mathbf{y}$ . Na druhou stranu toto je zjevně pouhé přiblížení, které platí v tzv. hydrodynamickém přiblížení, kdy se rozdělovací funkce málo mění na vzdálenostech odpovídající střední volné dráze molekul. Pak, pro takovou formu kinetických rovnic, kdy bereme do úvahy nelokálnost srážek, některé z těchto funkcí již nemusí být srážkovými invarianty, i přesto, že dynamické zákony zachování zůstávají v platnosti.

V dalším se omezíme pouze na případ hydrodynamického přiblížení, kde srážkové invarianty hrají fundamentální roli.

### 3.7 Rovnice zachování

Uvažujme veličinu  $\chi(\mathbf{x}, \mathbf{u})$ , která je spojena s částicemi, a která se zachovává v dvoučásticových srážkách

$$\chi + \chi_1 = \chi' + \chi'_1 \quad (471)$$

Celkový množství této veličiny v jednotce objemu je rovna

$$\begin{aligned} n_\chi(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{u} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \\ &= n(\mathbf{x}, t) \int d^3\mathbf{u} \chi(\mathbf{x}, \mathbf{u}) \frac{f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)}{n(\mathbf{x}, t)} = n(\mathbf{x}, t) \langle \chi \rangle(\mathbf{x}, t) . \end{aligned} \quad (472)$$

Například

$$n(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{u} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) , \quad n\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{u} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u} , \quad (473)$$

což můžeme také přepsat do tvaru

$$\mathbf{v} = \frac{\int d^3\mathbf{u} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u}}{\int d^3\mathbf{u} f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t)} = \langle \mathbf{u} \rangle . \quad (474)$$

Naším cílem je najít pohybovou rovnici pro  $n_\chi$  v případě, kdy  $f$  splňuje Boltzmanovu rovnici. Abychom ji našli, vynásobíme Boltzmanovu rovnici veličinou  $\chi$  a provedeme integraci přes rychlosti

$$\int \frac{Df}{Dt} \chi d^3\mathbf{u} = \int \mathcal{C}[f] \chi d^3\mathbf{u} . \quad (475)$$

Začneme nejdříve s pravou stranou této rovnice. Nejdříve máme

$$\begin{aligned}
& \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_1 \mathcal{C}(f) \chi(\mathbf{u}) d^3u = \\
& = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_1 \int \sigma(\Omega) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) \chi(\mathbf{u}) + \\
& + \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u}_1 \int d^3\mathbf{u} \int \sigma(\Omega) |\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}| (f' f'_1 - f_1 f) \chi(\mathbf{u}_1) = \\
& = \frac{1}{2} \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_1 \int \sigma(\Omega) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) (\chi(\mathbf{u}) + \chi(\mathbf{u}_1)) .
\end{aligned} \tag{476}$$

Jako další krok použijeme argument reverzibility, to znamená jako integrační proměnné budou vystupovat  $\mathbf{u}'$ ,  $\mathbf{u}'_1$ . Výsledkem dostaneme následující výraz

$$\int \mathcal{C}[f] \chi(\mathbf{u}) d^3u = \frac{1}{4} \int d^3\mathbf{u} \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega \sigma(\Omega) |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f' f'_1 - f f_1) (\chi + \chi_1 - \chi' - \chi'_1) . \tag{477}$$

Tento výraz, díky díky předpokladu (471), je roven nule. Tedy, pro veličinu, která se zachovává v dvoučásticových srážkách, dostáváme

$$0 = \int \frac{Df}{Dt} \chi d^3\mathbf{u} = \int \left( \frac{\partial f}{\partial t} + u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{F^i}{m} \frac{\partial f}{\partial u^i} \right) \chi d^3\mathbf{u} , \tag{478}$$

kteřou můžeme přepsat do tvaru

$$\begin{aligned}
0 & = \frac{\partial}{\partial t} \int f \chi d^3\mathbf{u} + \frac{\partial}{\partial x^i} \int f \chi u^i d^3\mathbf{u} - \int u^i f \frac{\partial \chi}{\partial x^i} d^3\mathbf{u} + \\
& + \frac{1}{m} \int \frac{\partial}{\partial u^i} (f \chi F^i) d^3\mathbf{u} - \frac{1}{m} \int \frac{\partial F^i}{\partial u^i} f \chi d^3\mathbf{u} - \frac{1}{m} \int \frac{\partial \chi}{\partial u^i} f F^i d^3\mathbf{u} .
\end{aligned} \tag{479}$$

První člen na druhém řádku je roven nule, neboť může být vyjádřen jako povrchový integral

$$\int \frac{\partial}{\partial u^i} (f \chi F^i) d^3\mathbf{u} = \int_{|\mathbf{u}| \rightarrow \infty} f \chi F^i u_i u d\Omega \tag{480}$$

kde budeme předpokládat, že rozdělovací funkce  $f$  se blíží k nule daleko rychleji, než  $\chi F^i u_i u$  roste pro  $u \rightarrow \infty$ . Například, toto platí pro rozdělovací

funkcí exponenciálního typu. Poté, když zadefinujeme pro libovolnou veličinu  $Q$

$$n \langle Q \rangle = \int d^3u Q f \quad (481)$$

dostáváme rovnici, která určuje časový vývoj veličiny  $\langle \chi \rangle$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \chi \rangle) + \frac{\partial}{\partial x^i} (n \langle u^i \chi \rangle) - n \left\langle u^i \frac{\partial \chi}{\partial x^i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle F^i \frac{\partial \chi}{\partial u^i} \right\rangle - \frac{n}{m} \left\langle \frac{\partial F^i}{\partial u^i} \chi \right\rangle = 0 . \quad (482)$$

Tato rovnice nám říká, jak hustota  $n_\chi = n \langle \chi \rangle$  libovolné veličiny  $\chi$ , jenž se zachovává v dvoučásticových srážkách, se vyvíjí v čase. Tato forma rovnice se bude často opakovat při odvození hydrodynamických rovnic

### 3.8 Odvození hydrodynamických rovnic

Rovnice (482) určuje přechod od mikroskopického popisu (pomocí molekulární veličiny  $\chi$ ) k makroskopické veličině, dané množstvím veličiny  $\chi$  v jednotkovém objemu,  $n \langle \chi \rangle$ . V následujícím budeme předpokládat, že síla  $F$  nezávisí na rychlostech.

#### Rovnice zachování hmoty

Tato rovnice vyjadřuje zachování hmoty ve srážkových procesech. Jinými slovy předpokládáme, že  $\chi = m$ . Pro tuto volbu (482) má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} (nm) + \frac{\partial}{\partial x^i} (nm \langle u^i \rangle) = 0 . \quad (483)$$

kde jsme využili faktu

$$\langle m \rangle = \frac{1}{n} \int d^3u f m = \frac{m}{n} \int d^3u f = m . \quad (484)$$

Jestliže zadefinujeme hustotu hmoty jako

$$\rho = nm \quad (485)$$

pak rovnice (483) má tvar rovnice spojitosti

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 , \quad (486)$$

kde  $\mathbf{v} = \langle \mathbf{v} \rangle$  je střední rychlost částic.



## Zákon zachování hybnosti

Nyní uvažujme  $\chi^i = mu^i$ . Pak dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial t}(nm \langle u \rangle^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(nm \langle u^j u^i \rangle) - n \left\langle F^j \frac{\partial u^i}{\partial u^j} \right\rangle = \\ &= \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j}(nm \langle u^j u^i \rangle) - nF^j \end{aligned} \quad (487)$$

kde jsme použili  $\frac{\partial u^i}{\partial u^j} = \delta_j^i$  a dále skutečnosti, že pro sílu, která nezávisí na rychlostech, máme

$$\langle F^i \rangle = \frac{1}{n} \int d^3u F^i f = \frac{F^i}{n} \int d^3u f = F^i . \quad (488)$$

zavedeme tensor tlaku definovaný vzhledem ke klidové soustavě

$$p^{ij} = m \int d^3\mathbf{u} u^i u^j f = n \langle mu^i u^j \rangle . \quad (489)$$

Pak momentová rovnice má tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j} p^{ij} = \frac{\rho}{m} F^i . \quad (490)$$

## Zákon zachování energie

V případě, kdy máme jednosložkový plyn, translační kinetická energie se zachovává při srážkách a můžeme tedy uvažovat

$$\chi = \frac{1}{2} m \mathbf{u}^2 . \quad (491)$$

Pak definujeme  $\epsilon_K$  jako střední hodnotu kinetické energie

$$\epsilon_K = \int d^3\mathbf{u} \frac{m}{2} u^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) = n \left\langle \frac{1}{2} m u^2 \right\rangle . \quad (492)$$

Pro tuto veličinu má momentová rovnice tvar

$$\frac{\partial}{\partial t} \epsilon_K + \frac{\partial}{\partial x^i} (q_K) - \frac{n}{m} \langle F^i m u_i \rangle = 0 \quad (493)$$

což dává známý výsledek

$$\frac{\partial}{\partial t}(\epsilon_K) + \frac{\partial}{\partial x^i}(q^i) = \frac{\rho}{m} F^i v_i, \quad (494)$$

kde jsme zavedli vektor toku energie

$$q^i = \int d^3\mathbf{u} \frac{m}{2} u^2 u^i f. \quad (495)$$

### 3.8.1 Relativistické makroskopické proměnné

Nyní přepíšeme tyto zachovávající se rovnice pomocí více fyzikálních relativních proměnných, což jsou proměnné odpovídající odchylce od středních hodnot. Označíme odchylku vektoru rychlosti od střední hodnoty pomocí symbolu  $\mathbf{c}$

$$\mathbf{c} = \mathbf{u} - \mathbf{v}. \quad (496)$$

Pak definujeme relativní tensor tlaku,

$$\begin{aligned} P^{ij} &= m \int d^3\mathbf{u} c^i c^j f = \rho \langle (u^i - v^i)(u^j - v^j) \rangle = \\ &= \rho (\langle u^i u^j \rangle - \langle u^i \rangle v^j - v^i \langle u^j \rangle + \langle v^i v^j \rangle) = \\ &= \rho (\langle u^i u^j \rangle - v^i v^j - v^j v^i + v^i v^j) = \rho (\langle u^i u^j \rangle - v^i v^j) \end{aligned} \quad (497)$$

a tedy

$$\rho \langle u^i u^j \rangle = p^{ij} = P^{ij} + \rho v^i v^j. \quad (498)$$

Stejným způsobem definujeme relativní tok tepla

$$Q^i = \int d^3\mathbf{u} \frac{1}{2} m c^2 c^i d^3\mathbf{u} = n \left\langle \frac{1}{2} m c^2 c^i \right\rangle \quad (499)$$

explicitně dostaneme

$$\begin{aligned} Q^i &= \int d^3\mathbf{u} \left( \frac{m}{2} u^2 u^i - \frac{m}{2} u^2 v^i - m u^j u^i v_j + m u^j v^j v^i + \frac{m}{2} v^2 u^i - \frac{m}{2} v^2 v^i \right) = \\ &= q^i - v^i \epsilon_K - P^{ij} v_j + \rho v^2 v^i. \end{aligned} \quad (500)$$

Dále zavedeme vnitřní energii

$$\epsilon(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{u} \frac{1}{2} m c^2 f(\mathbf{u}, \mathbf{x}, t) \quad (501)$$

která souvisí s energií  $\epsilon_K$  následujícím způsobem

$$\epsilon = \frac{m}{2} \int d^3\mathbf{u} (u^i - v^i)(u_i - v_i) f = \epsilon_K - \frac{1}{2} \rho v^2 . \quad (502)$$

Pak také máme

$$q^i = Q^i + v^i \epsilon + P^{ij} v_j + v^i \frac{\rho}{2} v^2 . \quad (503)$$

Z (498) vidíme, že absolutní tlak je větší než relativní, na druhou stranu toto není to, co my myslíme tlakem. Tlak měříme v souřadnicové soustavě spojené s tekutinou, jinými slovy je to tlak, který nezávisí na makroskopické rychlosti  $\mathbf{v}$ . Nyní, když použijeme (498), (500) a (502) v rovnicích (490) a (493) tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho v^i) + \frac{\partial}{\partial x^j} p^{ij} &= \frac{\rho}{m} F^i \Rightarrow \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} v^i + \rho \frac{\partial v^i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^j} P^{ij} + \frac{\partial}{\partial x^j} (\rho v^j) v^i + \rho v^j \frac{\partial}{\partial x^j} v^i &= \frac{\rho}{m} F^i \Rightarrow \\ \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} v^i + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} v^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} P^{ij} &= \frac{\rho}{m} F^i \end{aligned} \quad (504)$$

kde jsme užili faktu, že výraz  $v^i(\partial_t \rho + \partial_i(\rho v^i))$  je roven nule jako důsledek zákona zachování.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \epsilon_K + \frac{\partial}{\partial x^i} \rho q^i &= \frac{\rho}{m} F^i v_i \Rightarrow \\ \partial_t \epsilon + \partial_i q^i + \partial_i (v^i \epsilon) + P^{ij} \partial_i v_j + \\ &+ \frac{1}{2} v^2 (\partial \rho + \partial_i(\rho v^i)) + \\ + v_j [\rho (\partial_t v^j + v^i \partial_i v^j) + \partial_i P^{ij} - \frac{1}{m} F^j] &= 0 \Rightarrow \\ \partial_t \epsilon + \partial_i q^i + \partial_i (v^i \epsilon) + P^{ij} \partial_i v_j &= 0 \end{aligned} \quad (505)$$

### 3.8.2 Souhrn momentových rovnic

Závěrem dáme přehled všech momentových rovnic

$$\begin{aligned}\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} &= 0, \\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} + \frac{F^i}{m}, \\ \partial_t \epsilon + \partial_i q^i + \partial_i(v^i \epsilon) + P^{ij} \partial_i v_j &= 0.\end{aligned}\tag{506}$$

Vidíme, že máme pět rovnic. Neznámými jsou následující momenty rozdělovací funkce  $f$

$$\begin{aligned}\rho &= m \int d^3 \mathbf{u} f, & v^i &= \frac{1}{n} \int d^3 \mathbf{u} u^i f, & P^{ij} &= m \int d^3 \mathbf{u} c^i c^j f, \\ \epsilon &= \frac{m}{2} \int d^3 \mathbf{u} c^2 f, & q^i &= \frac{m}{2} \int d^3 \mathbf{u} c^2 c^i f.\end{aligned}\tag{507}$$

Vidíme, že máme  $1 + 3 + 6 + 1 + 3 = 14$  neznámých funkcí. Z toho vidíme, že momentové rovnice netvoří dynamickou teorii kapalin.

V principu bychom mohli zavést více momentových rovnic tím, že vezmeme vyšší momenty Boltzmanovy rovnice. Na druhou stranu tyto rovnice by vždy zavedly vyšší momenty distribuční funkce díky členu  $u^i \partial_i f$  v Boltzmanově rovnici. Jinými slovy musíme najít způsob, jak nějakým způsobem získat dynamickou teorii kapalin z kinetické teorie.

Jinými slovy, abychom odvodili dynamickou teorii kapalin, musím najít vztahy mezi 14 neznámými  $\rho, v^i, P^{ij}, \epsilon$  a  $q^i$  takovým způsobem, že dostaneme uzavřený systém rovnic.

Nejdříve musíme zdůraznit, že srážky jsou jediný způsob předávání hybnosti a energie v tekutině, která je složena z neutrálních částic, což je podstatné pro její vlastnosti.

### 3.8.3 Teplota: Variace distribuce rychlosti

Teplota tekutiny, který je tvořen molekulami bez vnitřních stupňů volnosti, je dán výrazem

$$\epsilon = \int d^3 \mathbf{u} \frac{m}{2} c^2 f(\mathbf{u}) = \frac{3}{2} k_B T.\tag{508}$$

Význam definice teploty dané touto rovnicí je následující. Uvažujeme molekuly, které jsou všechny v klidu. Necht' se tekutina pohybuje jako pevné těleso s rychlostí  $\mathbf{v}$ . Vidíme z rovnice (508), že v tomto případě  $T \sim \epsilon = 0$ , což je očekávaný výsledek. Vidíme také, že (508) může být přepsána do tvaru

$$\frac{3k_B T}{m} = \langle (\mathbf{u} - \langle \mathbf{u} \rangle)^2 \rangle, \quad (509)$$

která dokazuje, že  $\frac{3k_B T}{m}$  je míra variace hustoty pravděpodobnosti rychlosti.

Je zřejmé, že můžeme obecně definovat další makroskopické proměnné k již definovaným  $n, \mathbf{v}, T, \epsilon, Q^i, P^{ij}$ , například následující tensor

$$n\Lambda_{i_1 i_2, \dots, i_n} = \int d^3 \mathbf{u} f(\mathbf{c}, \mathbf{x}, t) c_{i_1} c_{i_2} \dots c_{i_n}. \quad (510)$$

kde proměnná  $\Lambda(\mathbf{x}, t)$  je tensor  $n$ -tého řádu ve třech dimensích.

### 3.8.4 Statistická rovnováha

Vrátíme se opět k obecné analýze Boltzmanovy rovnice a budeme zkoumat otázku, za jakých podmínek dojde k vynulování kolizního integrálu. Vidíme, že toto je splněno za předpokladu, kdy

$$f' f'_1 = f f_1. \quad (511)$$

Tato podmínka se nazývá podmínkou *statistické rovnováhy*. Explicitně, tato podmínka říká, že množství částic, které přitečenou do elementu  $d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{u}$  je roven počtu částic, které z daného elementu odtečou. Také je jasné, že tato podmínka je nutná podmínka pro existenci rovnovážného stavu, kdy  $\partial_t f = 0$ . Jinak řečeno, podmínka rovnováhy  $\partial_t f = 0$  implikuje, že entropie dosáhla své rovnovážné hodnoty, neboť

$$\frac{ds}{dt} = -k_B \int d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x} \frac{\partial f}{\partial t} (1 + \ln f) \quad (512)$$

a tedy  $\partial_t f$  implikuje  $\frac{ds}{dt} = 0$  a my víme, že tato podmínka je splněna pouze za předpokladu kdy platí (511). Vidíme tedy, že tato podmínka je nutná pro existenci rovnovážného stavu a je to i dostatečná podmínka v případě homogenní tekutiny bez působení vnějšího pole.

Když se nyní vrátíme k Maxwellovskému rozdělení, tak vidíme, že toto rozdělení nutně splňuje podmínku statistické rovnováhy. Je jasné, že tomu tak

musí být, neboť Maxwellovské rozdělení jsme odvodili právě z předpokladu, že pro ně kolizní člen je roven nule. Na druhou stranu je zřejmé, že Maxwellovské rozdělení bude splňovat podmínku statistické rovnováhy (511) i za předpokladu, kdy konstantní hodnoty  $n$ ,  $\mathbf{v}$  a  $T$  jsou nahrazeny  $n(\mathbf{x}, t)$ ,  $T(\mathbf{x}, t)$  a  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ . Výsledná rovnovážná distribuce se nazývá *Lokální Maxwellovské rozdělení*

$$f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \frac{n(\mathbf{x}, t)}{(2\pi \frac{k_B}{m} T(\mathbf{x}, t))^{3/2}} \exp\left(-\frac{m(\mathbf{u} - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))^2}{2k_B T(\mathbf{x}, t)}\right). \quad (513)$$

Je jasné, že pro toto rozdělení platí

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{u} f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t), \\ v(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{n(\mathbf{x}, t)} \int d^3\mathbf{u} f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \mathbf{u}, \\ \frac{3}{2}n(\mathbf{x}, t)\kappa_B T(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{u} f^0(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \frac{m}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 \end{aligned} \quad (514)$$

jak vyplývá z těchto integrálů

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-x^2/b} &= \sqrt{b}\sqrt{\pi}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-(x-v)^2/b} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx (x-v) e^{-(x-v)^2/b} + \\ &+ v \int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-(x-v)^2/b} = v\sqrt{b}\sqrt{\pi}. \end{aligned} \quad (515)$$

Je nutné rozlišit dva druhy Maxwellovského rozdělení: **Absolutní Maxwellovské rozdělení**, které označíme jako  $f_0$ , kde  $n$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $T$  jsou konstantní, a **Lokální Maxwellovské rozdělení**, které označíme jako  $f^0$ , kde  $n$ ,  $\mathbf{v}$ ,  $T$  závisí na souřadnicích  $\mathbf{x}$  a čase  $t$ . Je ale zřejmé, že toto není rovnovážná distribuční funkce, neboť i když je srážkový člen roven nule pro toto rozdělení, tak ještě stále neplatí  $\partial_t f = 0$ , protože víme, že časový vývoj rozdělovací funkce je jednak zapříčiněn srážkovým členem, a jednat členem v kinetické rovnici, který obsahuje tok a dále interakci s vnějším polem.

Nyní přijdeme k důležitému závěru, který říká, že lokální Boltzmanovo rozdělení je rovnovážně rozdělení ve smyslu, že pro něj platí

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt}(f^0) = 0 . \quad (516)$$

Abychom toto ukázali, budeme uvažovat obecnější formu Boltzmanovy  $\mathcal{H}$ -funkce

$$\mathcal{H} = \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{u}f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \ln f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) . \quad (517)$$

Víme, že když necháme tekutinu v klidu samu o sobě, během určitého časového okamžiku se tento systém dostane do stavu termodynamické rovnováhy. Tento jev je právě popsán klesáním  $H$  funkce. Když nyní provedeme derivaci této funkce, dostaneme

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{u}(1 + \ln f)\partial_t f \quad (518)$$

Jestliže nyní použijeme Boltzmanovu rovnici, dostanem

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{H}}{dt} &= - \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{u} \left( \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} \right) (1 + \ln f) + \int d^3\mathbf{x} \hat{I}(1 + \ln f) = \\ &= \int d^3\mathbf{x} \hat{I}(1 + \ln f) , \end{aligned} \quad (519)$$

kde jsme použili

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{u} \mathbf{u} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} (1 + \ln f) &= \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{u} \frac{\partial(\mathbf{u}f \ln f)}{\partial \mathbf{x}} = \int d^3\mathbf{u} \int_{S_\infty} u^i (f \ln f) dS_i \rightarrow 0 \\ \int d^3\mathbf{x}d^3\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} (1 + \ln f) &= \int d^3\mathbf{x} \int d^3\mathbf{u} \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\partial f \ln f}{\partial \mathbf{u}} = \int d^3\mathbf{x} \int_{S(u)_\infty} \frac{F^i}{m} f \ln f dS_i \rightarrow 0 \end{aligned} \quad (520)$$

Kde jsme předpokládali, že funkce  $f$  se blíží nule na hranici daného objemu, což je dané sférou  $S_\infty$  a také, že funkce  $f$  se blíží nule na hranicích rychlostního objemu.

Nyní s použitím předchozím úprav dostáváme

$$\begin{aligned} 4\hat{I}(1 + \ln f) &= \hat{I}(1 + \ln f) + \hat{I}(1 + \ln f_1) - \hat{I}(1 + \ln f') - \hat{I}(1 + \ln f'_1) = \\ &= \hat{I} \left( \ln \frac{f_1 f}{f'_1 f'} \right) = -\hat{I} \left( \ln \frac{f'_1 f'}{f_1 f} \right) \end{aligned} \quad (521)$$

Nyní diskuse stejná jako v předchozí části dokazuje platnost H-teorému pro obecnou rozdělovací funkci, která splňuje Boltzmanovu rovnici.

Vidíme, že jak absolutní, tak lokální Maxwellovské rozdělení splňují, že srážkový člen je roven nule a tedy pro ně platí

$$\frac{d\mathcal{H}(f_0)}{dt} = \frac{d\mathcal{H}(f^0)}{dt} = 0 . \quad (522)$$

Z tohoto důvodu mohou být obě rozdělení nazvány jako rovnovážné distribuční funkce. Na druhou stranu termodynamická rovnováha pro tekutinu, která není vystavena vnějším polím, implikuje, že všechny makroskopické veličiny jsou konstantní. Z tohoto důvodu je tato situace popsána pomocí absolutní Maxwellovské rozdělovací funkce  $f_0$ . Můžeme ale předpokládat, že před dosáhnutím termodynamické rovnováhy, plyn je ve stavu lokální tepelné rovnováhy, a tedy je popsán pomocí lokální Maxwellovské rozdělovací funkce  $f^0$ . Jinými slovy můžeme si představit situaci, kdy máme tekutinu v obecném stavu. Během časového vývoje, při kterém neprovádíme na dané tekutině nějaké vnější zásahy, dochází k poklesu  $\mathcal{H}$  funkce až do té doby, dokud stav systému je popsán pomocí lokální Maxwellovské rozdělovací funkce, kdy je ustanovena lokální termodynamická rovnováha v každém malém objemu tekutiny, zatím co tekutina jako celek se nenachází ve stavu globální termodynamické rovnováhy. Poté bude docházet k dalším procesům uvnitř tekutiny, kdy dochází k relaxaci všech makroskopických veličin do stavu, kdy tyto veličiny mají konstantní hodnoty v celém objemu tekutiny. Poté se tekutina nachází ve stavu globální termodynamické rovnováhy.

### 3.8.5 Lokální termodynamická rovnováha a makroskopické proměnné

Ukázali jsme, že lokální Maxwellovské rozdělení splňuje podmínku lokální termodynamické rovnováhy, což má za následek, že srážkový integrál je roven nule. Na druhou stranu, jestliže vložíme toto rozdělení do Boltzmanovy rovnice, je jasné, že levá strana je nenulová pro obecné hodnoty parametrů. Na druhou stranu je zřejmé, že prostorová a časová závislost lokálního Maxwellovského rozdělení je vyjádřena prostřednictvím funkcí  $n, \mathbf{v}, T$ , vidíme, že abychom našli kompletní lokální rovnovážné řešení je dostačující najít závislost těchto funkcí na prostorových souřadnicích.

Dále také ukážeme, že lokální Maxwellovské rozdělení je důležitý prvek v Chapman-Enskogově rozvoji Boltzmanovy rovnice. V tomto procesu  $f^0$  jako řešení nejnižšího řádu, kde  $n, \mathbf{v}$  a  $T$  jsou funkcemi  $\mathbf{x}, t$ .



### 3.8.6 Barometrická rovnice

Uvažujme, že máme tekutinu ve vnějším poli, které je konservativní a tedy se dá vyjádřit pomocí skalárního potenciálu

$$F_i = -\frac{\partial\Phi}{\partial x^i} . \quad (523)$$

Označíme rovnovážnou distribuci pro tuto konfiguraci jako  $\bar{f}_0$  a budeme požadovat, že  $\frac{\partial\bar{f}_0}{\partial t} = 0$ . Zbývající členy na levé straně rovnice dávají

$$\begin{aligned} \mathbf{v} \cdot \frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\mathbf{x}} + \frac{F^i}{m} \frac{\partial\bar{f}_0}{\partial u^i} &= 0 \Rightarrow \\ m\mathbf{v} \cdot \frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\mathbf{x}} &= \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \frac{\partial\bar{f}_0}{\partial\mathbf{v}} . \end{aligned} \quad (524)$$

Budeme předpokládat, že obecnější forma řešení statické rovnováhy má tvar

$$\ln \bar{f}_0 = \frac{-A(\mathbf{v} - \mathbf{v}_0)^2 + \ln B - 2A\psi(\mathbf{x})}{m} . \quad (525)$$

Je zřejmé, že toto řešení splňuje podmínku statické rovnováhy (511). Na druhou stranu dosazením do levé strany Boltzmanovy rovnice dostáváme

$$\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{x}} \cdot \mathbf{u} = \frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{u} - \mathbf{v}) \quad (526)$$

a my vidíme, že můžeme ztotožnit  $\psi(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x})$  za předpokladu, když  $\frac{\partial\Phi}{\partial\mathbf{x}} \cdot \mathbf{v} = 0$ . Když poté budeme postupovat standardním způsobem dostaneme rozdělovací funkci ve tvaru

$$\bar{f}_0 = \frac{n_0}{(2\pi k_B T_0)^{3/2}} \exp\left(-\frac{[m(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2/2 + \Phi(\mathbf{x})]}{k_B T_0}\right) , \quad (527)$$

kde nyní  $n_0$ ,  $\mathbf{v}$  a  $T_0$  jsou konstanty. Je také důležité, že  $\mathbf{v}$  je normální k  $\nabla\Phi$ .

Díky této rozdělovací funkci můžeme určit rovnovážnou hustotu částic jako

$$n(\mathbf{x}) = \int d^3\mathbf{u} \bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = n_0 \exp\left[-\frac{\Phi(\mathbf{x})}{k_B T_0}\right] , \quad (528)$$

která nám říká, že  $n_0$  je hodnota hustoty částic v bodě, kde  $\Phi(\mathbf{x}) = 0$ . Rovnovážná teplota je dána výrazem

$$\begin{aligned} \frac{3}{2}k_B T(\mathbf{x})n(\mathbf{x}) &= \int d^3\mathbf{u} \frac{1}{2}m(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 \bar{f}_0 \Rightarrow \\ 3n(\mathbf{x})T(\mathbf{x}) &= 3n_0 T_0 \exp\left[-\frac{\Phi(\mathbf{x})}{\kappa_B T_0}\right]. \end{aligned} \quad (529)$$

Jestliže do předchozího výrazu dosadíme hodnotu hustoty částic  $n(\mathbf{x}, t)$ , kterou jsme určili v (528), dostaneme

$$3n(\mathbf{x})T(\mathbf{x}) = 3n_0 T_0 \exp\left[-\frac{\Phi(\mathbf{x})}{\kappa_B T_0}\right] = 3n(\mathbf{x})T \quad (530)$$

z čehož plyne, že můžeme stotožnit  $T_0$  s  $T$ . Nakonec tedy můžeme psát

$$\bar{f}_0(\mathbf{x}, \mathbf{u}) = \frac{n(\mathbf{x})}{(2\pi\kappa_B T)^{3/2}} \exp\left[-\frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{2\kappa_B T}\right]. \quad (531)$$

Pro homogenní gravitační pole dostáváme

$$\Phi(\mathbf{x}) = mg(z - z_0). \quad (532)$$

Vložením tohoto potenciálu do předpis pro hustotu částic dostáváme

$$n(z) = n_0 \exp\left[-\frac{mg(z - z_0)}{\kappa_B T}\right]. \quad (533)$$

Tento exponenciální úbytek hustoty částic je znám jako *barometrická rovnice*.

## 3.9 Transportní koeficienty

### 3.9.1 Odezva na poruchy

Uvažujme systém, který je v rovnováze s odpovídajícími konstantními hodnotami  $n, \mathbf{v}, T$ . Jakmile se objeví vnější poruchy, tyto hydrodynamické veličiny se změní odpovídajícím způsobem. Z pozorování je jasné, že tekutina odpoví

na tyto změny takovým způsobem, kterým se snaží obnovit rovnováhu. Tedy, když definujeme  $\mathcal{R}$  jako odezva, dostaneme

$$\begin{aligned}\mathcal{R}[\partial_i n] &= n v_i , \\ \mathcal{R}[\partial_i v_j] &= S_{ij} , \\ \mathcal{R}[\partial_i T] &= Q_i .\end{aligned}\tag{534}$$

Jinými slovy, pohyb tekutiny je odpověď na objevení gradientu hustoty, komponenty deformačního tensoru jsou odpovědí na objevení se gradientů v rychlosti tekutiny. Dále, teplotní tok je odpovědí na vznik gradientu teploty.

Koeficienty, které vyjadřují úměrnost mezi gradienty poruch k odpovídajícím tokům, se nazývají transportní koeficienty.

#### **Koeficient difuze**

Tento koeficient se vyskytuje v relaci odezvy mezi gradientem hustoty a rychlostí a má tvar

$$n\mathbf{v} = -D\nabla n .\tag{535}$$

Tento vztah nám říká, že při objevení změny hustoty v kapalině od homogenní k nehomogenní konfiguraci, začne v tekutině probíhat transport částic proti růstu hustoty částic, jinými slovy řečeno tok probíhá takovým způsobem, aby došlo k obnovení homogenní konfigurace.

**Termální konduktance** Tento koeficient se vyskytuje v relaci

$$Q_i = -\kappa\partial_i T .\tag{536}$$

Intepretace tohoto vztahu je stejná jako v předchozím případě. V případě objevení nehomogenity v rozložení teploty dochází k transportu tepla z místa s vyšší teplotou do oblasti s nižší teplotou, kde transport tepla je zprostředkován tokem  $Q_i$ .

A konečně, koeficient viskozity odvedeme z následující úvahy. Je užitečné rozepsat tensor tlaku ve formě

$$P^{ij} = \delta^{ij}p - S^{ij} .\tag{537}$$

V tomto výrazu,  $p$  je skalární tlak a  $S^{ij}$  označuje komponenty tensoru tlaku, které odpovídají jako odezva na gradient rychlosti. Předpokládáme, že  $S^{ij}$  splňuje následující dvě vlastnosti

- $S^{ij}$  neobsahuje jiné členy než  $\partial_i u_j$ , protože požadujeme,  $S^{ij} = 0$  za předpokladu, když  $\partial_i u_j = 0$ .
- Dále požadujeme, aby platilo  $S^{ij} = 0$  pro tekutinu v rovnoměrném rotačním pohybu. Rovnoměrný rotační pohyb je charakterizován konstantním vektorem úhlové rychlosti  $\Omega^i$  tak, že makroskopický pohyb elementu kapaliny je dán

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} . \quad (538)$$

Tato vlastnost nám říká, že  $S^{ij} = 0$  pro  $\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}$ . Tensor, který toto splňuje, má obecný tvar

$$a \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) + b \delta_j^i \partial_i v^i , \quad (539)$$

kde  $a$  a  $b$  jsou libovolné konstanty. Toto vyplývá z následujícího

$$\begin{aligned} \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \text{ (pro } v^i = \epsilon^{ijk} \Omega_j x_k) &= \epsilon^{ikl} \partial_j (\Omega_k x_l) + \epsilon^{jkl} \partial_i (\Omega_k v_l) = \\ &= \epsilon^{ikl} \Omega_k \delta_j^l + \epsilon^{jkl} \Omega_k \delta_i^l = \epsilon^{ikj} \Omega_k + \epsilon^{jki} \Omega_k = \epsilon^{ikj} \Omega_k - \epsilon^{ikj} \Omega_k = 0 \end{aligned} \quad (540)$$

a také

$$\partial_i v^i = \epsilon^{ijk} \Omega_j \partial_i (x^k) = \epsilon^{ijk} \Omega_j \delta_i^k = \epsilon^{kjk} \Omega_j = 0 . \quad (541)$$

Pomocí tohoto výrazu dostáváme, že můžeme napsat tensor  $S_{ij}$  ve tvaru

$$S_{ij} = \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} . \quad (542)$$

Konstanty, které vystupují v tomto výrazu, jsou  $\eta$ , známá jako *koefficient smykové viskozity*, zatím co  $\zeta$  je *koefficient objemové viskozity*. Poznamenejme také, že tekutina je nestlačitelná, jestliže platí  $\partial_i v^i = 0$ . Tensor  $S_{ij}$  můžeme také napsat s pomocí symetrického deformačního tensoru

$$\Lambda_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) . \quad (543)$$

kde z definice dostáváme  $\text{Tr} \Lambda = \Lambda_{ij} \delta^{ji} = \partial_i v^i$ . Pak můžeme napsat tensor tlaku  $P^{ij}$  ve tvaru

$$P^{ij} = \delta^{ij} p - S^{ij} = \delta^{ij} p - 2\eta (\Lambda^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \partial_k v^k) - \zeta \delta^{ij} \partial_k v^k \quad (544)$$

kteřá má následující vlastnost

$$\text{Tr}P^{ij} = P^{ij}\delta_{ji} = 3p - 2\eta(\text{Tr}\Lambda^{ij} - \partial_i v^i) - 3\zeta\partial_i v^i = 3p - 3\zeta\partial_i v^i, \quad (545)$$

kteřá, v případě nestlačitelné tekutiny, má tvar

$$\text{Tr}P^{ij} = 3p. \quad (546)$$

Síla, kteřá působí na element tekutiny okolní tekutina, je vyjádřena tensorem tlaku  $P^{ij}$ , kteřý pro nestlačitelnou tekutinu má tvar

$$P^{ij} = \delta^{ij}p - 2\eta\Lambda^{ij}. \quad (547)$$

Uvažujme nyní tekutinu, kteřá se pohybuje ve směru osy  $x$  s rychlostí, kteřá je funkcí  $z$

$$\mathbf{v} = [v_x(z), 0, 0]. \quad (548)$$

Pak síla působící na plochu o obsahu  $\Delta x\Delta y$  s normálnou  $n = [0, 0, 1]$  je rovna

$$F_x = P_{xz}\Delta x\Delta y = (-2\eta\Lambda_{xz})\Delta x\Delta y = -\eta\frac{\partial u_x}{\partial z}\Delta x\Delta y. \quad (549)$$

Vidíme tedy, že síla působí opačným směrem, než je růst rychlosti. Poznamenejme také, že tensor deformace vystupuje v mechanice pevných látek, kdy ovšem uvažujeme vektor posunutí místo vektoru rychlosti, což odpovídá vynásobení vektoru deformace daného výše elementem  $\Delta t$ . Obecně můžeme říci, že deformace spojitého prostředí je výsledkem napětí, které na ně působí.

Důležitou vlastností transportních koeficientů je ta, že díky vztahům, kterými jsou definovány, dostáváme dodatečné rovnice, které slouží k uzavření momentových rovnic. Například, s pomocí (542) má momentová rovnice rychlosti  $v^i$  tvar

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial}{\partial t} v^i + v^j \frac{\partial}{\partial x^j} v^i \right) + \frac{\partial}{\partial x^j} P^{ij} = \frac{\rho}{m} F^i \Rightarrow \\ \rho (\partial_i v^i + v^j \partial_j v^i) + \partial_i p - \eta \partial_j \partial^j v^i - \eta \partial_i \partial_j v^j - \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \partial_i \partial_j v^j = \frac{\rho}{m} F^i. \end{aligned} \quad (550)$$

Toto jsou tři rovnice pro pět neznámých  $v^i, \rho, p$ . Rovnice spjitosti spolu s další skalární rovnicí dělá z tohoto systému systém uzavřených rovnic. Další rovnicí myslíme rovnicí vyjadřující vztah mezi hustotou a tlakem. Touto rovnicí se budeme věnovat později při dalším výkladu hydrodynamiky.

### 3.9.2 Formulování transportních koeficientů

V této kapitole popíšeme, jak je možné najít transportní koeficienty. Uvažujme malý objem tekutiny v rovnováze s hustotou částic  $n$ . Zavedeme střední rychlost částic  $C$

$$\langle v^2 \rangle = C^2 . \quad (551)$$

Pro bodové částice ekvipartační teorém dává

$$\frac{1}{2}mC^2 = \frac{3}{2}k_B T . \quad (552)$$

Uvažujme střední tok částic  $\Gamma$  v libovolném ze šesti směrů (osa  $x, -x, y, -y, z, -z$ ) a v libovolném časovém okamžiku  $t$ . Nyní si představme, že máme válec o výšce  $C$  a jednotkové ploše. Protože střední rychlost částic je  $C$ , pak 1/6 částic v daném válci projde povrchem horní podstavy za sekundu. Jestliže si označíme tento směr jako  $z$ , dostaneme

$$\Gamma_z = \frac{1}{6}nC . \quad (553)$$

Dalším důležitým pojmem je střední volná dráha  $l$ . Implicitně předpokládáme, že k předávání hybností a energie mezi molekulami dochází pouze při srážkách. Například, dosažení rovnováhy hustoty částic je zprostředkováno srážkami, kdy částice z oblasti s větší hustotou jsou přenášeny do oblasti s menší hustotou. Jak my již víme, s pojmem srážek se váže pojem účinný průřez, kdy můžeme najít následující odhad

$$n\sigma l \simeq 1 , \quad (554)$$

který vyplývá z toho, že střední rovná dráha je nepřímo úměrná jak počtu částic  $n$ , tak účinnému průřezu.

Nyní můžeme přistoupit k odvození koeficientu vlastní difuze. Uvažujme, že máme částice jednoho druhu a dále, že zde existuje gradient hustoty  $n$  ve směru osy  $z$ . Pak tok částic, které se pohybují ve kladném směru osy  $z$  a které protnou rovinu  $z$ , je roven počtu částic, které se nacházejí v místě  $n - l$ . Na druhou stranu počet částic, které se pohybují v záporném směru osy  $z$  a které protnou rovinu  $z$ , je roven počtu částic v bodě  $z + l$ . Pak celkový tok částic v bodě  $z$  je roven

$$\Gamma_z = \Gamma_{z-l} - \Gamma_{z+l} , \quad (555)$$

což, s pomocí (553), dává

$$\begin{aligned}
 \Gamma_z &= \frac{1}{6}C[n(z-l) - n(z+l)] = \\
 &= \frac{2lC}{6} \left[ \frac{n(z-l) - n(z+l)}{2l} \right] = \\
 &= -\frac{1}{3}lC \frac{\partial n}{\partial z} .
 \end{aligned} \tag{556}$$

Na druhou stranu my víme, že tok částic v daném bodě  $z$  ve směru osy  $z$  je dán výrazem  $\Gamma_z = nv_z$  a tedy

$$nv_z = -\frac{1}{3}lC \frac{\partial n}{\partial z} . \tag{557}$$

Poznamenejme, že definice koeficientu difuze je dána výrazem

$$n\mathbf{v} = -D\nabla n \Rightarrow nv_z = -D \frac{\partial n}{\partial z} . \tag{558}$$

Pak porovnáním těchto dvou rovnic dostaneme hledaný výraz pro koeficient difuze

$$D = -\frac{1}{3}lC . \tag{559}$$

### Viskozita

Uvažujme tekutinu, která se pohybuje jedním směrem s rychlostním profilem

$$\mathbf{v} = [v_x(z), 0, 0] \tag{560}$$

Je zřejmé, že pro tuto konfiguraci máme nenulové následující komponentu  $P_{xz}$

$$P_{xz} = -S_{xz} = -\eta \frac{\partial v_x}{\partial z} . \tag{561}$$

Každá částice na ploše  $z-l$ , která se srazí a pohybuje se ve směru osy  $+z$ , unáší střední komponentu hybnosti ve směru osy  $x$  z oblasti  $z-l$ , to jest  $mv_x(z-l)$ . Tok těchto částic je roven

$$\Gamma_z = \frac{1}{6}nC . \tag{562}$$

Pak tedy střední hodnota  $x$ -komponenty toku hybnosti napříč rovinou  $z$  díky transportu částic ve směru osy  $z$  je rozdíl mezi kladným příspěvkem

$$\Gamma_p^+ = \frac{1}{6}nCmv_x(z-l) \quad (563)$$

a její ztrátou

$$\Gamma_p^- = \frac{1}{6}nCmv_x(z+l) . \quad (564)$$

Pak změna hybnosti na ploše  $z$  ve směru  $x$  je rovna

$$\begin{aligned} \Gamma_p^+ - \Gamma_p^- &= \\ &= \frac{1}{6}nCm2l \left[ \frac{v_x(z-l) - v_x(z+l)}{2l} \right] = \\ &= -\frac{1}{3}\rho Cl \frac{\partial v_x}{\partial z} . \end{aligned} \quad (565)$$

Tento rozdíl můžeme interpretovat jako sílu, působící ve směru osy  $x$  na ploše  $z$ , což je

$$P_{xz} = -\frac{1}{3}\rho Cl \frac{\partial u_x}{\partial z} . \quad (566)$$

což nám dává klasický Maxwellův výsledek

$$\eta = \frac{1}{3}\rho Cl . \quad (567)$$

### Termální konduktce

Stejným způsobem můžeme pokračovat s transportem kinetické energie. Uvažujme změnu kinetické energie  $\epsilon_K(z)$ . Pak stejným způsobem, jako v předchozí části, kdy definujeme

$$\Gamma_Q^+ = \frac{1}{6}nC\epsilon_K(z-l) , \Gamma_Q^- = \frac{1}{6}nC\epsilon_K(z+l) \quad (568)$$

dostaneme následující výraz pro změnu kinetické energie

$$\Gamma_Q^+ - \Gamma_Q^- = -\frac{1}{3}nCl \frac{\partial \epsilon_K}{\partial z} . \quad (569)$$



Jestliže si nyní uvědomíme, že máme vztah  $\epsilon_K = \epsilon + \frac{1}{2}\rho v^2$  a budeme předpokládat, že  $v$  a  $n$  nezávisí na  $z$ , pak máme  $\frac{\partial \epsilon_K}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon}{\partial z}$  a tento rozdíl je roven toku tepla ve směru osy  $z$

$$Q_z = -\frac{1}{3}nCl\frac{\partial \epsilon}{\partial z} . \quad (570)$$

Nyní definujme  $c_V$  jako specifické teplo na jednu částici

$$c_v = \frac{\partial \epsilon}{\partial T} . \quad (571)$$

Pak dostaneme

$$Q_z = -\frac{1}{3}nCl\frac{\partial \epsilon}{\partial z} = -\frac{1}{3}nCl\frac{\partial \epsilon}{\partial T}\frac{\partial T}{\partial z} = -\frac{1}{3}nClc_V\frac{\partial T}{\partial z} \quad (572)$$

a tedy

$$\kappa = \frac{1}{3}nClc_V . \quad (573)$$

### 3.10 Momentové rovnice a hydrodynamické rovnice- Pokračování

Jak jsme také ukázali, srážky implikují, že distribuční funkce se blíží rovnovážnému Maxwellovskému rozdělení s možnou nenulovou střední rychlostí. Nechť předpokládáme, že distribuční funkci ve tvaru

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = n(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{x}, t)} \right)^{3/2} \exp \left( -m \frac{(\mathbf{u} - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))^2}{2k_B T(\mathbf{x}, t)} \right) , \quad (574)$$

což je Maxwellovo rozdělení s lokálními středními hodnotami rychlosti, hustoty a teploty. Nechť pomocí této funkce vypočítáme  $P^{ij}(\mathbf{x}, t)$

$$\begin{aligned} P^{ij} &= m \int d^3\mathbf{u} (u^i - v^i)(u^j - v^j) f(\mathbf{u} - \mathbf{v}) = \\ &= mn(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{x}, t)} \right)^{3/2} \int d^3\mathbf{u} c^i c^j \exp \left( -\frac{mc^2}{2k_B T} \right) = p\delta^{ij} \end{aligned} \quad (575)$$

kde

$$p(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t)k_B T(\mathbf{x}, t)$$

je tlak kapaliny. Při odvozování tohoto vztahu jsme využili faktu, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx x e^{-x^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} dx x^2 e^{-x^2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad (576)$$

Stejným způsobem dostáváme

$$\epsilon = \frac{m}{2} \int d^3 \mathbf{u} c^2 f = \frac{3}{2} n k_B T. \quad (577)$$

a

$$Q^i = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{u} c^i c^2 f = 0, \quad (578)$$

kde  $\epsilon$  je vnitřní energie pro jednočásticový plyn. Konečně

$$P^{ij} \Lambda_{ij} = p \delta^{ij} \Lambda_{ji} = p \frac{\partial v^i}{\partial x^i}. \quad (579)$$

Díky těmto předpokladům dostáváme momentové rovnice v nultém řádu

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0, \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} &= -\frac{1}{\rho} \nabla p + \frac{1}{m} \mathbf{F}, \\ \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + \partial_i (v^i \epsilon) &= -p \nabla \cdot \mathbf{v} \end{aligned} \quad (580)$$

což je pět rovnic pro šest veličin  $\rho, \mathbf{v}, p$  a  $\epsilon$ . Na druhou stranu tři termodynamické veličiny mohou být vyjádřeny jako funkce hustoty částic a teploty, tedy

$$\rho = mn, \quad p = n k_B T, \quad \epsilon = \frac{3}{2} n k_B T. \quad (581)$$

Jinými slovy dostáváme, že číslo nezávislých rovnic je shodné s číslem nezávislých proměnných a tudíž tento systém je uzavřený a má formu dynamické teorie kapalin.

Na druhou stranu této dynamické teorii chybějí některé důležité vlastnosti jako teorii reálných tekutin.

- Protože  $Q^i = 0$  dostáváme, že neexistuje transport vnitřní energie. Jinými slovy řečeno, v této tekutině neexistuje konvence.

- Protože  $P^{ij}$  is diagonální, tato tekutina je charakterizována absencí viskozity.

Jinými slovy řečeno, v této formulaci dynamiky tekutin chybí vlastní popis transportních jevů.

Je vhodné si položit otázku, co je příčinou, že jsme nebyli schopni popsat tyto jevy vhodným způsobem. Ukazuje se, že lokální Maxwellova distribuce je příliš restriktivní. Jestliže zde existuje teplotní gradient, částice, které přicházejí na určité po směru gradientu mají určitě vyšší energii než částice, které sem přicházejí z opačného směru gradientu. Je jasné, že tyto transportní jevy jsou úzce svázány s opuštěním předpokladu Maxwellovo rozdělení.

## 3.11 Chapman-Enskogův Rozvoj

### 3.11.1 Kolizní frekvence

Srážkový integrál v Boltzmanově rovnici může být napsán ve tvaru

$$\hat{J}(f|f) = -f(\mathbf{u}) \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega \sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| f(\mathbf{u}_1) + \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| f' f'_1 \quad (582)$$

Uvažujme následující výraz

$$\nu(\mathbf{u}) = \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega \sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| f(\mathbf{v}_1) . \quad (583)$$

Protože tento výraz je úměrný relativní rychlosti, účinnému průřezu a počtu nalétávajících částic daný funkcí  $f(\mathbf{u}_1)$  a následnou integrací přes  $\mathbf{u}_1$  a  $\Omega$  můžeme tento výraz interpretovat jako počet srážek s částicí o rychlosti  $\mathbf{u}$ , tedy můžeme ho nazvat *Kolizní frekvencí*.

Necht' napíšeme Boltzmanovu rovnici ve tvaru

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{F_i}{m} \frac{\partial f}{\partial u^i} + u^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \hat{I}f , \quad (584)$$

která nám definuje kolizní integrál-operátor  $\hat{I}$ . Protože  $\nu(\mathbf{v})$  je srážková frekvence, její fyzikální rozměr je  $s^{-1}$ , z čehož vyplývá, že oprátor  $\hat{I}$  ma tu samou fyzikální dimenzi. Pak je užitečné napsat operátor  $\hat{I}$  ve tvaru

$$\hat{I} = \nu_0 \tilde{\hat{I}} \quad (585)$$

kde  $\tilde{I}$  je nyní bezrozměrný operátor a kde  $\nu_0$  je konstanta o fyzikálním rozměru  $s^{-1}$ . Pomocí této terminologie dostáváme Boltzmanovu rovnici ve tvaru

$$\frac{Df}{Dt} = \nu_0 \tilde{I} f . \quad (586)$$

Chapman-Enskogův rozvoj může být proveden v oblasti s velkými srážkovými frekvencemi, což ekvivalentně znamená v oblastech s malou střední volnou dráhou. Explicitně, jestliže  $C$  je střední termální rychlost částic, pak jeřejmé, že tato rychlost je dána jako podíl střední volné dráhy a doby mezi dvěma srážkami, což je převrácená hodnota srážkové frekvence, a tedy

$$C \simeq lv . \quad (587)$$

První krok k provedení této expanse je napsat Boltzmanovu rovnici ve tvaru

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{D}} \right) f = \frac{1}{\epsilon} \hat{I} f , \quad (588)$$

kde

$$\mathcal{D} = \mathbf{u} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} , \quad (589)$$

a kde předpokládáme bezrozměrný malý parametr  $\epsilon \ll 1$ , kde si ale musíme uvědomit, že tento parametr byl zaveden pro korektně definovaný rozvoj s tím, že by měl být položen jedné na závěr této analýzy.

Ve druhém kroku Champman-Enskogově rozvoji provedeme následující rozvoj

$$f = f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \epsilon^2 f^{(2)} + \dots . \quad (590)$$

Normalizujeme funkci  $f$  takovým způsobem, aby splňovala

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 \mathbf{u} f , & n(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 \mathbf{u} \mathbf{u} f , \\ \frac{3}{2} n(\mathbf{x}, t) k_B T(\mathbf{x}, t) &= \int d^3 \mathbf{u} \frac{m}{2} (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 f . \end{aligned} \quad (591)$$

V Chapman-Eskogově rozvoji předpokládáme, že  $(n, \mathbf{v}, T)$  jsou veličiny 0(1) řádu v expansi podle parametru  $\epsilon$  a tedy jsou dány  $f^{(0)}$ , zatím co členy v

rozvoji vyšších řádu,  $f^{(i)}, i > 0$  odpovídají vyšším momentům v  $Q^i$  a v  $P^{ij}$

$$\begin{aligned}
n(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{u} f^{(0)}, & n(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{u}\mathbf{u} f^{(0)}, \\
\frac{3}{2}n(\mathbf{x}, t)k_B T(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{u} \frac{m}{2}(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 f^{(0)}, \\
&\int d^3\mathbf{u} f^{(i)} = \int d^3\mathbf{u} f^{(i)} \mathbf{c} = \int d^3\mathbf{u} f^{(i)} c^2 = 0, \\
Q_i &= \sum_l \epsilon^l Q_i^{(l)} = \frac{1}{2} \sum_l \epsilon^l \int d^3\mathbf{u} m(u - v)_i (\mathbf{u} - \mathbf{v})^2 f^{(i)}, \\
P_{ij} &= \sum_l \epsilon^l P_{ij}^{(l)} = \sum_l \epsilon^l \int d^3\mathbf{u} m(u - v)_i (u - v)_j f^{(l)}.
\end{aligned} \tag{592}$$

Jako další krok přistoupíme k rozvoji  $\mathcal{D}$  a kolizního integrálu  $\hat{J}$

$$\hat{\mathcal{D}}f = \hat{\mathcal{D}}f^{(0)} + \epsilon \hat{\mathcal{D}}f^{(1)} + \dots \tag{593}$$

a pro srážkový integrál

$$\hat{J}(f|f) = \hat{J}\left(\sum_{l=0}^{\infty} \epsilon^l f^{(l)} \middle| \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^n f^{(n)}\right) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \epsilon^{l+n} \hat{J}(f^{(l)}|f^{(n)}). \tag{594}$$

Ukazuje se, že je vhodné zavést tzv. uspořádaný operátor

$$\hat{J}^{(s)}(f^{(0)}, f^{(1)}, \dots, f^{(s)}) = \sum_n \sum_{l, n+l=s} \hat{J}(f^{(l)}|f^{(n)}). \tag{595}$$

Pomocí této veličiny můžeme přepsat (594) do tvaru

$$\begin{aligned}
\hat{J}(f, f) &= \hat{J}(f^{(0)}|f^{(0)}) + \epsilon \hat{J}^{(1)}(f^{(0)}|f^{(1)}) + \\
&+ \hat{J}^{(2)}(f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}) + \dots,
\end{aligned} \tag{596}$$

Například

$$\hat{J}^{(1)}(f^{(0)}, f^{(1)}) = \hat{J}(f^{(0)}|f^{(1)}) + \hat{J}(f^{(1)}|f^{(0)}). \tag{597}$$

### 3.11.2 Rozvoj časové derivace

Další krok v Chapman-Enskogově rozvoji se týká časové derivace, která vystupuje v Boltzmanově rovnici. Budeme předpokládat, že časová závislost rozdělovací funkce závisí pouze díky hydrodynamickým rovnic  $n(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, T)$  a  $T(\mathbf{x}, t)$ , tak že

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (598)$$

Jako další krok provedeme časovou derivaci

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial_0}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial_1}{\partial t} + \epsilon^2 \frac{\partial_2}{\partial t} + \dots , \quad (599)$$

kteřá má následující fyzikální význam. Výcházíme z momentových rovnic

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v^i)}{\partial x^i} &= 0 , \\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} + \frac{F^i}{m} , \\ \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon) + \frac{\partial}{\partial x^i}(\epsilon v^i) + \frac{\partial Q^i}{\partial x^i} + P^{ij} \Lambda_{ij} &= 0 . \end{aligned} \quad (600)$$

Na pravé straně těchto rovnic vystupují makroskopické proměnné, které jsou získány středováním přes distribuční funkci. Protože tato distribuční funkce je také dána rozvojem distribuční funkce, dostáváme obecné vztahy

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= \Phi_n(n, \mathbf{v}, T) = \sum_l \epsilon^l \Phi_n^{(l)}(n, \mathbf{v}, T) , \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} &= \Phi_{\mathbf{v}}(n, \mathbf{v}, T) = \sum_l \epsilon^l \Phi_{\mathbf{v}}^{(l)}(n, \mathbf{v}, T) , \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= \Phi_T(n, \mathbf{v}, T) = \sum_l \epsilon^l \Phi_T^{(l)}(n, \mathbf{v}, T) . \end{aligned} \quad (601)$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial f}{\partial n} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial T} \frac{\partial T}{\partial t} = \\
&= \frac{\partial f}{\partial n} \sum_l \epsilon^l \Phi_n^{(l)} + \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \cdot \sum_l \epsilon^l \Phi_{\mathbf{v}}^{(l)} + \frac{\partial f}{\partial T} \sum_l \epsilon^l \Phi_T^{(l)} \equiv \\
&\equiv \sum_l \epsilon^l \frac{\partial_l}{\partial t}, \quad \frac{\partial_l}{\partial t} \equiv \frac{\partial}{\partial n} \Phi_n^{(l)} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \Phi_{\mathbf{v}}^{(l)} + \frac{\partial}{\partial T} \Phi_T^{(l)}.
\end{aligned} \tag{602}$$

Jestliže použijeme tyto rozvoje pro  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial t}$ ,  $\hat{\mathcal{D}}f$  a  $\hat{J}(f|f)$  do Boltzmanovy rovnice a dostaneme

$$\begin{aligned}
&\left( \frac{\partial}{\partial t} + \hat{\mathcal{D}} \right) f = \frac{1}{\epsilon} \hat{J}(f|f) \Rightarrow \\
&\epsilon \left[ \left( \frac{\partial_0}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial_1}{\partial t} + \dots \right) (f^{(0)} + \epsilon f^{(1)} + \dots) + (\hat{\mathcal{D}}f^{(0)} + \epsilon \hat{\mathcal{D}}f^{(1)} + \dots) \right] + \\
&+ \left[ \hat{J}^{(0)}(f^{(0)}|f^{(0)}) + \epsilon \hat{J}^{(1)}(f^{(0)}|f^{(1)}) + \dots \right]
\end{aligned} \tag{603}$$

Porovnáním koeficientů stejného řádu parametru  $\epsilon$  dostáváme

$$\begin{aligned}
0 &= \hat{J}^{(0)}(f^{(0)}|f^{(0)}), \\
&\left( \frac{\partial_0}{\partial t} + \hat{\mathcal{D}} \right) f^{(0)} = \hat{J}^{(1)}(f^{(0)}, f^{(1)}), \\
&\left( \frac{\partial_0}{\partial t} + \hat{\mathcal{D}} \right) f^{(1)} + \frac{\partial_1}{\partial t} f^{(0)} = \hat{J}^{(2)}(f^{(0)}, f^{(1)}, f^{(2)}),
\end{aligned} \tag{604}$$

Vidíme, že rovnice nultého řádu má formu

$$\hat{J}(f^{(0)}|f^{(0)}) = 0. \tag{605}$$

Jak jsme již uvedli v předchozích kapitolách, řešením této rovnice je lokální Maxwellovské rozdělovací funkce, která může být definována pomocí následujících momentů

$$n = \int d^3 \mathbf{u} f^{(0)}, \quad \mathbf{v} = \frac{1}{n} \int d^3 \mathbf{u} \mathbf{u} f^{(0)}, \quad T = \frac{m}{3nk_B} \int d^3 \mathbf{u} c^2 f^{(0)}. \tag{606}$$

Explicitně, tato funkce má tvar

$$f^{(0)}(\mathbf{x}, t) = n(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{x}, t)} \right)^{3/2} \exp \left[ -\frac{m(\mathbf{u} - \mathbf{v}(\mathbf{x}, t))^2}{2k_B T(\mathbf{x}, t)} \right]. \quad (607)$$

Pomocí této rozdělovací funkce můžeme vypočítat teplotní kondukcí  $Q^i$  a tensor  $P^{ij}$ , které jsou definovány jako

$$\begin{aligned} Q^i &= \frac{m}{2} \int d^3\mathbf{u} c^2 c^i f, \\ P^{ij} &= m \int d^3\mathbf{u} c^i c^j f \end{aligned} \quad (608)$$

a tedy pro  $f^{(0)}$  dostaneme

$$\begin{aligned} (Q^{(0)})^i &= 0, \\ (P^{(0)})^{ij} &= nk_B T \delta^{ij} = p \delta^{ij}. \end{aligned} \quad (609)$$

Vložením těchto výrazů do momentových rovnic dostaneme Eulerovy rovnice

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \nabla(n\mathbf{u}) &= 0, \\ \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla + \frac{1}{\rho} \nabla p &= \frac{1}{m} \mathbf{F}, \\ \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \right) \left( \frac{p}{n^{5/3}} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (610)$$

Řešením těchto rovnic dostaneme explicitní veličiny  $n = n(\mathbf{x}, t)$ ,  $\mathbf{v} = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$  a  $T = T(\mathbf{x}, t)$  které, po vložení do (607) kompletně určují  $f^{(0)}$ .

Každá následující iterace v Chapman-Enskogově rozvoji vede k více podrobnější skupině hydrodynamických rovnic, které více a více započítávají prostorové fluktuace v tektutině. Iterace nultého řádu dávají Eulerovy rovnice. Rovnice, které vzniknou pomocí iterací prvního řádu, vedou k *Navier-Stokesovým rovnicím*. Iterace druhého řádu dávají *Burnettovy rovnice*.



### 3.11.3 Řešení prvního řádu

Toto řešení odpovídá druhé rovnici v (604)

$$\left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \hat{\mathcal{D}}\right) f^{(0)} = \hat{J}^{(1)}(f^{(0)}, f^{(1)}) \quad (611)$$

Zavedeme funkci  $\Phi$  následujícím způsobem

$$f^{(1)} = \Phi f^{(0)} . \quad (612)$$

Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \hat{J}^{(1)}(f^{(0)}, f^{(1)}) &= \hat{J}(f^{(0)}|f^{(1)}) + \hat{J}(f^{(1)}|f^{(0)}) = \\ &= \int d\mathbf{u}_1 \int d\Omega\sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (\Phi' f'^{(0)} f_1^{(0)} - f^{(0)} f_1^{(0)} \Phi) + \\ &+ \int d\mathbf{u}_1 \int d\Omega\sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| (f'^{(0)} \Phi'_1 f'^{(0)} - \Phi f^{(0)} f_1^{(0)}) = \\ &= \int d\mathbf{u}_1 \int d\Omega\sigma |\mathbf{v} - \mathbf{v}_1| f^{(0)} f_1^{(0)} (\Phi' + \Phi'_1 - \Phi_1 - \Phi) \end{aligned} \quad (613)$$

kde jsme použili  $f'^{(0)} f_1^{(0)} = f^{(0)} f_1^{(0)}$  jako důsledek statistické rovnováhy. Pak můžeme definovat operátor  $\hat{\square}$  jako

$$\begin{aligned} \hat{\square}\Phi &\equiv \frac{1}{f^{(0)}} \hat{J}^{(1)}(f^{(0)}, f^{(0)}\Phi) = \\ &= \int d\mathbf{u}_1 \int d\Omega\sigma |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| f^{(0)}(\mathbf{u}_1) [\Phi'_1 + \Phi' - \Phi_1 - \Phi] \end{aligned} \quad (614)$$

Poté rovnice (611) může být přepsána do tvaru

$$\frac{1}{f^{(0)}} \left(\frac{\partial_0}{\partial t} + \hat{\mathcal{D}}\right) f^{(0)} = \hat{\square}\Phi . \quad (615)$$

Vidíme, že  $\hat{\square}$  je lineární operátor, jak vyplývá z jeho definice. Dále díky explicitní formě lokálního Maxwellovského rozdělení dostáváme následující

výrazy, které vystupují na levé straně rovnice (615)

$$\begin{aligned}\frac{1}{f^{(0)}} \frac{\partial_0 f^{(0)}}{\partial t} &= \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial_0 n}{\partial t} + 2\xi^i \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left( \xi^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{T} \frac{\partial_0 T}{\partial t} \right], \\ \frac{1}{f^{(0)}} \mathbf{u} \cdot \frac{\partial f^{(0)}}{\partial \mathbf{x}} &= \mathbf{u} \cdot \left[ \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} + 2\xi^i \frac{\partial v^i}{\partial \mathbf{x}} + \left( \xi^2 - \frac{3}{2} \right) \frac{1}{t} \frac{\partial T}{\partial \mathbf{x}} \right],\end{aligned}\tag{616}$$

kde

$$\xi^2 \equiv \frac{m(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{2k_B T}.\tag{617}$$

Poté s použitím rovnic, které vyjadřují časové derivace  $n$  a  $T$  dostáváme následující rovnici pro  $\Phi$

$$\sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \left( \xi^2 - \frac{5}{2} \right) \xi^i \partial_i \ln T + 2 \left( \xi^i \xi^j - \frac{1}{3} \xi^2 \delta^{ij} \right) \partial_i v_j = \hat{\square} \Phi\tag{618}$$

což je lineární nehomogenní integrální rovnice pro distribuci  $\Phi$ . Jestliže budeme tuto rovnici řešit vzhledem k  $\Phi$ , dostaneme

$$f = f^{(0)}(1 + \Phi).\tag{619}$$

Obecné řešení rovnice (618) je lineární kombinací homogenní  $\Phi_h$  a nehomogenního  $\Phi_i$  řešení, kde

$$\hat{\square} \Phi_h = 0\tag{620}$$

a kde  $\Phi_i$  je partikulární řešení (618).

Když budeme blíže zkoumat strukturu operátoru  $\hat{\square}$  vidíme, že jeho řešením může být dáno jako lineární kombinací srážkových integrálů

$$\Phi_h = \alpha + \beta^i m(u^i - v^i) + \frac{1}{2} \gamma m(u^i - v^i)(u_i - v_i).\tag{621}$$

kde  $\alpha, \beta, \gamma$  jsou libovolné konstanty. Abychom našli partikulární řešení rovnice (618) uvažme, že její levá strana má tvar

$$X^i(\xi) \left( \frac{2k_B T}{m} \right)^{1/2} \partial_i \ln T + \mathbf{Y}^{ij}(\xi) \partial_i v_j.\tag{622}$$

Protože  $\hat{\square}$  je lineární operátor a  $\Phi$  je skalární funkce, předchozí výraz indukuje, že bychom měli hledat partikulární řešení ve formě

$$\Phi_i = \sqrt{\frac{2\pi k_B}{m}} T A^i \partial_i \ln T + 2B^{ij}(\xi) \partial_i v_j . \quad (623)$$

Jinými slovy, abychom našli nehomogenní řešení, musíme najít vektorovou funkci  $A^i$  a tensorovou funkci  $B^{ij}$ . Pak, vložení předpokládané řešení (623) a porovnáním různých koeficientů, které se vyskytují u  $\nabla \ln T$  a  $\partial_i v_j$  dostáváme následující rovnice pro  $A^i$  a pro  $B^{ij}$

$$\begin{aligned} \hat{\square} A^i &= \xi^i \left( \xi^2 - \frac{5}{2} \right) , \\ \hat{\square} B^{ij} &= \left( \xi^i \xi^j - \frac{1}{3} \xi^2 \delta^{ij} \right) . \end{aligned} \quad (624)$$

Víme, že jediné proměnné, které vystupují v  $A^i$  jsou  $\xi^i, n$  a  $T$ . Pak je jasné, že jediný vektor, který může být vytvořen z těchto proměnných, je samotný vektor  $\xi$ . Pak tedy budeme předpokládat, že

$$A^i = A(\xi^2) \xi^i . \quad (625)$$

Stejným způsobem můžeme argumentovat, že tensor  $B^{ij}$  má tvar

$$B^{ij} = B(\xi^2) \left( \xi^i \xi^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} \xi^2 \right) \quad (626)$$

Pak jasně dostaneme, že tyto funkce splňují integrálně diferenciální rovnice

$$\begin{aligned} \hat{\square}(\xi^i A) &= \xi^i \left( \xi^2 - \frac{5}{2} \right) , \\ \hat{\square} \left( B(\xi^2) \left( \xi^i \xi^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} \xi^2 \right) \right) &= \left( \xi^i \xi^j - \frac{1}{3} \xi^2 \delta^{ij} \right) . \end{aligned} \quad (627)$$

Když se nyní vrátíme k homogennímu řešení vidíme, že konstanty  $\alpha, \beta$  a  $\gamma$  jsou určeny podmínkami (592). Jinými slovy, jestliže vložíme

$$f^{(1)} = f^{(0)}(\Phi_h + \Phi_i) \quad (628)$$

do těchto podmínek, dostaneme

$$\begin{aligned} \int d^3\mathbf{u} f^{(0)}(\alpha + \gamma \frac{1}{2} mc^2) &= 0, \\ \int d^3\mathbf{u} f^{(0)}[A(\xi^2) \partial_i \ln T + m\beta^i] mc^2 &= 0, \\ \int d^3\mathbf{u} f^{(0)}(\alpha + \frac{1}{2} mc^2 \gamma) \frac{1}{2} mc^2 &= 0. \end{aligned} \tag{629}$$

Pak je zřejmé, že první rovnice v (629) dává

$$\alpha = \gamma = 0 \tag{630}$$

zatím co druhá rovnice říká, že  $\beta^i$  je úměrné  $\partial_i \ln T$  a tedy může být zahrnuto do členu  $\partial_i \ln T$ .

Pak je možné ukázat, že celkové řešení Boltzmanovy rovnice do prvního řádu má tvar

$$\begin{aligned} f &= f^{(0)}[1 + \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} A^i \partial_i \ln T + 2B^{ij} \partial_i v_j] = \\ &= f^{(0)}[1 + \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} A(\xi) \xi_i^\partial \ln T + 2B(\xi) \left( \xi^i \xi^j - \frac{1}{3} \xi^2 \delta^{ij} \right) \partial_i v_j]. \end{aligned} \tag{631}$$

kde  $A(\xi), B(\xi)$  jsou řešením rovnic (627).

### 3.11.4 Termální konduktce a tensor napětí

S pomocí řešení Boltzmanovy rovnice do prvního řádu je možné určit odpovídající nenulové příspěvky ve vektoru teplotní konduktce  $Q^i$  a  $P^{ij}$ . Tyto příspěvky dostaneme, když vložíme řešení Boltzmanovy rovnice do jejich definice a uvážíme, že lokální Maxwellovo rozdělení dává nulový příspěvek

$$\begin{aligned} Q^i &= \frac{1}{2} m \sqrt{\frac{2k_B T}{m}} \int d^3\mathbf{u} c^i f = 0 + q^{i(1)}, \\ P^{ij} &= 2k_B T \int d^3\mathbf{u} \xi^i \xi^j f = \delta^{ij} p - P^{ij(1)}, \quad \xi^i = \frac{m}{2k_B T} (u - v)^i. \end{aligned} \tag{632}$$

S použitím řešení Boltzmanovy rovnice do prvního řádu dostáváme

$$Q^i = \left( \frac{2 k_B^2 T}{3 m} \int d^3 \mathbf{u} f^0 \xi^4 A^{\hat{\kappa}} A_i \right) \nabla T \quad (633)$$

a tedy dostáváme následující výsledek pro koeficient termální konduktivity

$$\kappa = -\frac{2 k_B^2 T}{3 m} \int d^3 \mathbf{u} f^0 \xi^4 A^{\hat{\kappa}} A_i . \quad (634)$$

Stejným způsobem postupujeme v případě tensoru napětí, kde dostáváme

$$P^{ij} = \frac{4 k_B}{5} \left( \Lambda^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \partial_i v^i \right) \int d^3 \mathbf{u} f^{(0)} B^{ij} \hat{\square} B_{ij} . \quad (635)$$

Když tedy definujeme koeficient napětí následujícím způsobem

$$P^{ij} = -2\eta \left( \Lambda^{ij} - \frac{1}{3} \delta^{ij} \partial_i v^i \right) \quad (636)$$

pak porovnáním s (782) dostaneme

$$\eta = -\frac{2}{4} k_B T \int d^3 \mathbf{u} f^0 B^{i\hat{\kappa}} B_{ij} . \quad (637)$$

Vidíme, že transportní koeficienty závisejí na integrálech před vazebný operátor  $\hat{\square}$ . Tyto výpočty jsou ve své podstatě velmi komplikované a požadují další matematické znalosti. Například, pro částice, které nemají žádnou vnitřní strukturu, dostáváme

$$\kappa = -\frac{75 k_B^2 T n^2}{8 m A_{11}} , \quad (638)$$

kde  $A_{11}$  závisí na detailním popisu interakcí mezi částicemi. Na druhou stranu se ukazuje, že explicitní tvar tohoto parametru může být napsán ve formě integrace přes rozptylové parametry, kde pak dostáváme

$$A_{11} = -4n^2 \Omega^{2,2} \quad (639)$$

kde v případě jednodimenzionálního plynu

$$\Omega^{(l,q)} = \sqrt{\frac{4\pi\kappa_B T}{m}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-y^2} y^{2q+3} (1 - \cos^l \theta) s ds dy . \quad (640)$$

Stejným způsobem budeme postupovat v případě koeficientu napětí a dostáváme

$$\eta = -\frac{5 k_B T n^2}{2 B_{11}} , \quad (641)$$

kde se dá ukázat, že

$$B_{11} = -4n^2 \Omega^{(2,2)} . \quad (642)$$

### 3.11.5 Srážkový integrál v prvním přiblížení-Alternativní postup

Začneme s následujícím zobecněním rozdělovací funkce

$$f(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) + g(\mathbf{x}, \mathbf{y}, t) , \quad (643)$$

kde  $g$  je malá porucha. Nyní uvažuje srážkový integrál

$$\mathcal{C}[f] = \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \sigma(\Omega) (f'_1 f'_1 - f f_1) . \quad (644)$$

Protože víme, že  $g$  je malá porucha, je přirozené předpokládat, že srážkový integrál závisí na této poruše pouze lineárně. Budeme tedy předpokládat, že distribuční funkce, přes které provádíme integraci  $(f', f'_1, f_1)$  mohou být reprezentovány lokálním Maxwellovským rozdělením  $f^{(0)'}, f_1^{(0)'}, f_1^{(0)}$ . Dále využijeme vlastnosti, že pro Maxwellovské rozdělení platí  $f^{(0)'} f_1^{(0)'} = f^{(0)} f_1^{(0)}$  která vyplývá z exponenciální formy Maxwellovské rozdělovací funkce a ze zákona zachování energie, který platí v dvou částicových srážkách. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{C}[f] &\approx \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \sigma(\Omega) (f^{(0)} f_1^{(0)} - f f_1^{(0)}) = \\ &= (f^{(0)} - f) \int d^3\mathbf{u}_1 \int d\Omega |\mathbf{u} - \mathbf{u}_1| \sigma(\Omega) f_1^{(0)} = \\ &= -g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \int d\Omega \sigma(\Omega) \int d^3\mathbf{u}_1 |\mathbf{u}_{rel}| f^{(0)}(\mathbf{x}, \mathbf{u}_1, t) = \\ &= -\sigma_{tot} n \langle \mathbf{u}_{rel} \rangle g(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) , \end{aligned} \quad (645)$$

kde  $\langle \mathbf{u}_{rel} \rangle$  ( $|\mathbf{u}|, T$ ) je střední relativní rychlost mezi srážejícími se částicemi a tedy  $\langle |\mathbf{u}_{rel}| \rangle n \sigma_{tot}$  udává střední srážkovou změnu částic o rychlosti  $|\mathbf{u}|$ .

Výsledkem dostáváme

$$\mathcal{C}[f] = -\sigma_{tot} n \langle \mathbf{u}_{rel} \rangle (f - f^{(0)}) . \quad (646)$$

Tento výsledek vedl (Bhatnagara, Grosse a Krooka) v roce 1954 k formulování tzv. BGK rovnice, která popisuje systém, jenž není příliš daleko od lokální termodynamické rovnováhy reprezentované lokální Maxwellovskou rozdělovací funkcí  $f^{(0)}$  a srážky způsobují jeho návrat do této rovnováhy. Tato rovnice má tvar

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} , \quad (647)$$

kde  $\tau$  je tzv. relaxační doba. Abychom našli fyzikální význam  $f$ , uvažujme distribuční funkci  $f$ , která závisí pouze na čase. Pak (647) dává

$$\frac{df}{dt} = -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} \quad (648)$$

Je jednoduché najít řešení této rovnice a dostáváme

$$f - f^{(0)} = K e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (649)$$

kde  $K$  je integrační konstanta. Vidíme, že distribuční funkce se blíží Maxwellovské distribuční funkci v limitě  $t \rightarrow \infty$ . Z této rovnice je také jasný význam relaxační doby  $\tau$ , která může být interpretována jako parametr dané teorie.

Ukážeme, že transportní jevy mohou být kvalitativně popsány pomocí BKG rovnice, ale s omezením, že hodnoty transportních koeficientů nejsou exatní. Důvod, proč tomu tak je, je ten, že Boltzmannův srážkový integrál ve skutečnosti závisí na  $1/\tau \propto \langle |\mathbf{u}_{rel}| \rangle$ , což je funkcí  $\mathbf{u}$  a tudíž není konstantní. Na druhou stranu, i když hodnoty transportních koeficientů nejsou zcela přesné, tento model poskytuje jasné schéma a postup, jak mohou být tyto transportní koeficienty určeny.

### 3.11.6 Odklon od Maxwellovského rozdělení

Jako první krok určíme jak velký je odklon daného rozdělení od Maxwellovského. Pak KGB rovnice dává

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla f &= -\frac{f - f^{(0)}}{\tau} \Rightarrow \frac{|\mathbf{u}| f^{(0)}}{L} \approx \frac{|g|}{\tau} \Rightarrow \\ |g| &\approx \frac{|\mathbf{u}| \tau}{L} f^{(0)} \approx \frac{\lambda}{L} f^{(0)}, \end{aligned} \quad (650)$$

kde  $L$  je charakteristická škála, na které se mění daný systém, a kde  $\lambda$  je střední dráha mezi srážkami. Vidíme, že modifikace Maxwellovského rozdělení bude malá za předpokladu, když střední volná dráha mezi srážkami je mnohem menší než škála změny daného systému. Když zavedeme parametr  $\alpha$  jako

$$\alpha = \frac{\lambda}{L} \quad (651)$$

můžeme psát rozdělovací funkci  $f$  ve formě Taylorovy řady podle parametru  $\alpha$

$$f = f^{(0)} + \alpha f^{(1)} + \alpha^2 f^{(2)} + \dots \quad (652)$$

kde  $f^{(i)}$  jsou veličiny, které nezávisí na parametru  $\alpha$  a tedy stejného řádu. Jestliže vložíme tento rozvoj do BKG rovnice dostaneme rekurzivní relaci pro každý příspěvek  $f^{(i)}$ . Například v prvním řádu dostáváme

$$g \equiv \alpha f^{(1)} = -\tau \left( \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \right) f^{(0)}. \quad (653)$$

Poznamenejme, že rozdělovací funkce  $f^{(0)}$  má tvar

$$f^{(0)} = n(\mathbf{x}, t) \left( \frac{m}{2\pi k_B T(\mathbf{x}, t)} \right)^{3/2} \exp \left( -\frac{m(\mathbf{u} - \mathbf{v})^2}{2k_B T(\mathbf{x}, t)} \right) \quad (654)$$

a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} &= \frac{\partial n}{\partial t} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} + \frac{\partial T}{\partial t} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} + \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^i}, \\ u^i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^i} &= u^i \frac{\partial n}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial n} + u^i \frac{\partial T}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial T} + u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial v^j} \end{aligned} \quad (655)$$

a s použitím (654) dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial f^{(0)}}{\partial t} &= \left( \frac{1}{n} \frac{\partial n}{\partial t} + \left( -\frac{3}{2}T + \frac{m}{2k_B T^2} c^2 \right) \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial v^i}{\partial t} \frac{m c_i}{k_B T} \right) f^{(0)}, \\ u^i \frac{\partial f^{(0)}}{\partial x^i} &= \left( \frac{1}{n} u^i \frac{\partial n}{\partial x^i} + u^i \left( -\frac{3}{2}T + \frac{m}{2k_B T^2} c^2 \right) \frac{\partial T}{\partial x^i} + u^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \frac{m c_i}{k_B T} \right) f^{(0)}. \end{aligned} \quad (656)$$

Dosadíme tyto pomocné výpočty do rovnice (653) dostaneme explicitní formu poruchy rozdělovací funkce ve tvaru

$$g = -\tau \left[ \frac{1}{T} \frac{\partial T}{\partial x^i} c^i \left( \frac{m}{2k_B T} c^2 - \frac{5}{2} \right) + \frac{m}{k_B T} \Lambda_{ij} \left( c^i c^j - \frac{1}{3} \delta^{ij} c^2 \right) \right] f^{(0)} \quad (657)$$

kde

$$c^i = u^i - v^i. \quad (658)$$



### 3.11.7 Teplotní tok

Naším cílem je vypočítat momenty pomocí funkce  $f = f^{(0)} + g$ , kde

$$n = \int d^3\mathbf{u}f, \quad n\mathbf{v} = \int d^3\mathbf{u}\mathbf{v}f, \quad 3nk_B T = m \int d^3\mathbf{u}u^2 f, \quad (659)$$

a také  $q^i, P_{ij}$ . V případě  $q^i$  dostáváme

$$\begin{aligned} q^i &= \frac{m}{2} \int d^3\mathbf{u}c^i c^2 g = \\ &= -\tau \frac{m}{2} \frac{\partial T}{\partial x^i} \int d^3\mathbf{u}c_i^2 c^2 \left( \frac{m}{2k_B T} c^2 - \frac{5}{2} \right) f^{(0)}. \end{aligned} \quad (660)$$

Protože tento integrál má stejnou hodnotu pro všechna  $i = 1, 2, 3$ , můžeme ho nahradit jednou třetinou sumy přes  $i$ . Pak dostaneme

$$q^i = -K \partial_i T, \quad (661)$$

kde

$$K = \frac{\tau m}{6T} \int d^3\mathbf{u}c^4 \left( \frac{m}{2k_B T} c^2 - \frac{5}{2} \right) f^{(0)}. \quad (662)$$

Tento integrál může být explicitně zintegrován a dostáváme

$$K = \frac{5}{2} \tau n \frac{k_B^2 T}{m}, \quad (663)$$

což je koeficient termální kondukce. Jinými slovy odvodili jsme pomocí mikroskopické fyziky Fourierův zákon teplotní kondukce.

### 3.11.8 P tensor

Uvažujme tensor  $P^{ij}$ , který je definován jako

$$P^{ij} = m \int d^3\mathbf{u}c^i c^j f = nk_B T \delta^{ij} + \pi^{ij}, \quad (664)$$

kde

$$\begin{aligned} \pi^{ij} &= m \int d^3\mathbf{u}c^i c^j g = \\ &= -\tau \frac{m^2}{k_B T} \Lambda^{kl} \int d^3\mathbf{u}c^i c^j (c_k c_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} c^2) f^{(0)}. \end{aligned} \quad (665)$$

Vidíme, že  $\pi^{ii} = 0$ , jež vyplývá ze skutečnosti, že integrand je lichý pro  $i \neq j$ , zatím co pro  $k = j$  integrand výrazu v závorce je roven nule. Protože je tento tensor lineární funkcí  $\Lambda_{ij}$ , můžeme psát

$$\pi_{ij} = -2\mu(\Lambda_{ij} - \frac{1}{3}\text{Tr}\Lambda) = -2\mu \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} \frac{\partial v^i}{\partial x^i} \right). \quad (666)$$

Vidíme, že tedy platí  $\pi_{ij}\delta^{ji} = -2\mu(\Lambda_{ij}\delta^{ji} - \Lambda_{ij}\delta^{ji}) = 0$ . Koeficient  $-2\mu$  můžeme vypočítat například z tohoto výrazu

$$\begin{aligned} \pi_{12} &= -2\mu\Lambda_{12} = -\frac{\tau m^2}{\kappa_B T} \Lambda^{kl} \int d^3 \mathbf{u} c_1 c_2 \left( c_k c_l - \frac{1}{3} \delta_{kl} c^2 \right) f^{(0)} = \\ &= -\frac{\tau m^2}{\kappa_B T} (\Lambda_{12} + \Lambda_{21}) \int d^3 \mathbf{u} c_1^2 c_2^2 f^{(0)} = -2\Lambda_{12} \tau n \kappa_B T \end{aligned} \quad (667)$$

což dává

$$\mu = \tau n \kappa_B T. \quad (668)$$

### 3.11.9 Momentové rovnice prvního řádu

Když nyní vyjádříme  $P_{ij}$  a  $q^i$  jako funkce  $n, T$  and  $v$  můžeme napsat momentové rovnice, které zahrnují transportní jevy. Jestliže vezmeme  $\mu$  jako konstantu, dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial P_{ij}}{\partial x^i} &= \frac{\partial p}{\partial x^j} - 2\mu \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \partial_i v^i \right) = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x^j} - \mu \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial v^j}{\partial x^i} + \frac{\partial v^i}{\partial x^j} \right) + \frac{2\mu}{3} \frac{\partial}{\partial x^j} \frac{\partial v^k}{\partial x^k} = \\ &= \frac{\partial p}{\partial x^j} - \mu \left( \frac{\partial^2 v^j}{\partial x^i \partial x_i} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x^j} \partial_k v^k \right) \end{aligned} \quad (669)$$

a tedy dostáváme pohybovou rovnici

$$\rho \left( \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \partial_j v^i \right) = -\partial_i p + \mu \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^k \partial x_k} v^i + \frac{1}{2} \partial_i (\partial_k v^k) \right] + \frac{\rho F^i}{m}. \quad (670)$$

Podobným způsobem dostaneme

$$P_{ij} \Lambda_{ij} = p \delta_{ij} \Lambda_{ij} + \pi_{ij} \Lambda_{ij} = p \partial_i v^i - 2\mu \Lambda_{ij} \Lambda_{ij} + \frac{\mu}{3} (\partial_i v^i)^2 \quad (671)$$

a tedy následující pohybovou rovnicí

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v^i \partial_i \epsilon \right) = -p \partial_i v^i + \partial_i (K \partial_i T) + 2\mu [\Lambda_{ij} \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} (\partial_i v^i)^2] \quad (672)$$

spolu s rovnicí zachování

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) = 0 . \quad (673)$$

Rovnice (670) a (672) tvoří uzavřený systém rovnic a tudíž nám definují dynamickou teorii tekutin.

### 3.11.10 Hydrodynamické rovnice

Předchozí momentové rovnice jsou parciálními diferenciálními rovnicemi, které mají složitou strukturu. Proto typicky uvažujeme jejich zjednodušení, které mají následující formu

- Zanedbáme prostorové variace  $\mu$ , což už jsme samozřejmě implicitně provedli, když jsme odvozovali rovnici (670).
- Zanedbáme efekt stlačitelnosti ( $\partial_i v^i$ ) ve viskozí síly v rovnici (670).
- Zanedbáme efekt viskozí produkce tepla v rovnici vyjadřující zákon zachování energie (672).
- Konečně, budeme psát  $F^i \rightarrow F^i/m$ . Jinými slovy budeme psát intenzity pole místo síly pole.

Poté dostáváme následující **hydrodynamické rovnice**

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) &= 0 , \\ \frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \partial_j v^i &= -\frac{1}{\rho} \partial_i p + F^i + \frac{\mu}{\rho} \partial^j \partial_j v^i , \\ \rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v^i \partial_i \epsilon \right) &= -p \partial_i v^i + \partial_i (K \partial^i T) \end{aligned} \quad (674)$$

kde druhá rovnice je slavná **Navier-Stokesova rovnice**.

Závěrem shrneme postup, jakým způsobem jsme odvodili tyto rovnice. Naším základním předpokladem bylo to, že distribuční funkce má být chápána jako malá porucha od Maxwellovského rozdělení. Jinými slovy předpokládali jsme malý odklon od lokální statistické rovnováhy, kde je možné použít BGK rovnici. Ukázali jsme, že tento předpoklad platí, jestliže střední volná dráha je mnohem menší než škála, na které se mění makroskopické vlastnosti systému. Pak je také jasné, že hydrodynamické rovnice přestanou platit v okamžiku, kdy tato podmínka nebude splněna. Samozřejmě, že je možné psát dále momentové rovnice, když budeme vycházet z obecného Chapman-Enskogova rozvoje, ale obecně všechny členy v daném rozvoji budou stejného řádu a tudíž není možné provést zanedbání členů vyšších řádů.

### 3.12 Další poznámky k nevratnosti

V této kapitole se vrátíme opět k nevratnosti systému, zavedeme pojmy jako ergodičnost a také míchání.

#### 3.12.1 Ergotický tok

My víme, že objemy ve fázovém prostoru jsou invariantní vůči kanonickým transformacím, kterými je i přirozený časový vývoj systému. V případě izolovaného systému je jasné, že se jeho energie zachovává a má smysl uvažovat pohyb po energetické ploše ve fázovém prostoru  $\Gamma$ , na které zavedeme invariantní míru vzhledem ke kanonickým transformacím  $d\Sigma$ . Pak invariantní míra množiny  $A$ , která je podmnožina energetické plochy, je dána integrálem

$$\mu(A) = \int_{A \in E} d\Sigma . \quad (675)$$

Pak invariantní míra bodů na energetické ploše je dána integrálem

$$\mu(E) = \int_E d\Sigma . \quad (676)$$

Nechť přirozený pohyb množiny  $A$  je dán operátorem  $\hat{T}$ , který definuje časový vývoj systému. Pak za časový interval  $t$  dostaneme

$$A \rightarrow A' = \hat{T}(t)A . \quad (677)$$

Protože míra  $d\Sigma$  je invariantní vůči kanonickým transformacím a protože časový vývoj je kanonická transformace, dostaneme

$$\mu(A') = \mu(A) . \quad (678)$$

### 3.12.2 Ergodická hypotéza

Ergodická hypotéza říká, že téměř všechny orbity na energetické ploše procházejí každou oblastí konečné míry a zůstávají v této oblasti po časový interval rovný podílu jejich míry k míře energetické nadplochy  $E$ . Stejně tvrzení se týká průměrné hodnoty dynamické proměnné  $g$ . Je zřejmé, že ergodická hypotéza říká, že všechny oblasti stejné míry na energetické ploše jsou stejně pravděpodobné. Odpovídající distribuční funkce je tedy

$$f(\mathbf{z}) = \frac{1}{\mu(E)}, \text{ pro } \mathbf{z} \in H = E \quad (679)$$

která splňuje normalizační podmínku

$$\int_{H=E} f(\mathbf{z}) d\Sigma = 1 . \quad (680)$$

Stejně můžeme definovat střední hodnotu dynamické veličiny  $g(\mathbf{z})$  přes fázový prostor

$$\langle g \rangle_{\Gamma} = \frac{1}{\mu(E)} \int_{H=E} g(\mathbf{z}) d\Sigma . \quad (681)$$

V rovnovážném případě můžeme definovat časovou střední hodnotu jako

$$\langle g \rangle_{\tau} = \lim_{\tau \rightarrow \infty} \frac{1}{\tau} \int_{t_0}^{t_0+\tau} g[\mathbf{z}(t)] dt \quad (682)$$

Ergodický teorém se snaží dokázat rovnost  $\langle g \rangle_{\Gamma}$  s  $\langle g \rangle_{\tau}$ . Je zřejmé, že nutnou podmínkou pro platnost této rovnosti je to, že  $\langle g \rangle_{\tau}$  nezávisí na počátečním čase  $t_0$  a počáteční hodnotě  $\mathbf{z}(0)$ . Tento teorém se nazývá **Birkhoffův teorém**. Tento teorém je založen na předpokladu, že  $\hat{T}(t)$  je metricky transitivní, což znamená, že množina, která je invariantní vůči působení  $\hat{T}(t)$  na energetické ploše, je buď celá množina nebo množina míry 0. Alternativně řečeno říkáme, že energetický povrch je metricky nerozdělitelný, jestliže nemůže být rozdělen do dvou invariantních částí pozitivní míry. Invariantní částí fázového je taková část, kde všechny body v tomto prostoru zde zůstávají během časové evoluce systému. S těmito předpoklady Birkhoffův teorém říká, že limita  $\langle g \rangle_{\tau}$  existuje v každém bodě na energetické ploše a že tato limita je nezávislá na počátečním čase a počátečním bodě  $\mathbf{z}_0$ . Tento teorém také implikuje

$$\langle \langle g \rangle_{\tau} \rangle_{\Gamma} = \langle g \rangle_{\Gamma} . \quad (683)$$

Protože  $\langle g \rangle_\tau$  nezávisí na  $\mathbf{z}_0$  a tedy je konstantní na energetické ploše, dostaneme

$$\langle g \rangle_\tau = A = \text{konst} \quad (684)$$

a tedy

$$\langle \langle g \rangle_\tau \rangle_\Gamma = A = \langle g \rangle_\tau . \quad (685)$$

Pak ale z (683) dostaneme

$$\langle g \rangle_\tau = \langle g \rangle_\Gamma . \quad (686)$$

Je podstatné, že tento výsledek platí pro rovnovážný stav systému. Dále, každý ohraničený systém, kde jedinou zachovávanou se veličinou je energie, je ergodický, což můžeme dokázat následujícím způsobem. Předpokládejme, že je zde další zachovávanou se veličina, kterou označíme jako  $B$ . Pak se systém pohybuje na podprostoru, který je průnikem plochy  $B = \text{konst}$  a  $H = E$ . Tento průnik je podprostorem energetické nadplochy, na které se daný systém pohybuje a tedy daný pohyb není ergodický.

Tedy vidíme, že ergodický systém při pohybu na energetické nadploše prochází oblastmi stejné míry se stejnou frekvencí a žádná oblast není privilegiovaná.

Typický příklad ergodického systému může být posuv na kružnici. Tento posuv může být dán zobrazením  $\mathbf{T}$

$$\mathbf{T}_\tau(\Theta_1) = \Theta_1 + \omega\tau \quad (687)$$

kde úhel  $\Theta_1$  se vlivem transformace  $\mathbf{T}_\tau$  změní na úhel  $\Theta_1 + \omega\tau$ , kde  $\tau$  můžeme považovat za časový úsek. Stejným způsobem můžeme uvažovat translaci elementu oblouku, který si označíme jako  $\Delta\sigma_1$ . Tento element prochází všemi částmi kruhu, který definuje náš ohraničený fázový objem a kde neexistují části křivky  $l$ , kam by transformace  $\mathbf{T}$  nedosáhla.

**Směšovací tok** Směšovací tok vede k tomu, že počáteční distribuce je rozprostřena na celé energetické nadploše. Obecně, směšovací tok je vždy ergodický ale opačně to neplatí, ergodický tok není vždy směšovací. Podrobněji, řekneme, že systém je směšovací, jestliže pro libovolné dvě funkce na fázovém prostoru  $f(\mathbf{z})$ ,  $h(\mathbf{z})$  a definované na nadploše  $H = E$  platí

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \pm\infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_{H=E} h(\mathbf{z}) f(\mathbf{z}(t)) d\Sigma &= \\ &= \frac{\int_{H=E} h(\mathbf{z}) d\Sigma \int_{H=E} f(\mathbf{z}) d\Sigma}{[\mu(E)]^2} . \end{aligned} \quad (688)$$

Uvažujme následující důsledek této hypotézy. Nechť jednou z funkcí, která vystupuje v této definici, je nerovnovážná distribuční funkce  $f(\mathbf{x})$  normalizována jako

$$\int_{H=E} f(\mathbf{z}) d\Sigma = 1 . \quad (689)$$

Pak z následující definice dostáváme

$$\langle h \rangle = \int_{H=E} h(\mathbf{z}) f(\mathbf{z}(t)) d\Sigma \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\mu(E)} \int_{H=E} h(\mathbf{z}) d\Sigma . \quad (690)$$

Jinými slovy, v případě směšovacího toku, střední hodnota veličiny  $h$  se blíží v limitě  $t \rightarrow \infty$  střední hodnotě počítané pomocí rovnovážné distribuční funkce  $f = \frac{1}{\mu(E)}$ .

## 4 Relativistická kinetická teorie

V této kapitole budeme studovat základní principy relativistické kinetické teorie, které má důležité uplatnění v astrofyzice či pro popis jistých aspektů kontrolované termonukleární fúze. Naš výklad začneme se stručným shrnutím základních poznatků týkajících se teorie relativity.

### 4.1 Postuláty teorie relativity

Základními postuláty jsou princip kovariance, který říká, že ve všech soustavách mají fyzikální zákony stejný tvar, a princip konstantní rychlosti světla. Všechny události jsou reprezentovány body v prostoročase, kterými je čtyřrozměrná varieta s metrickým tensorem  $g_{\mu\nu}$  tak, že délkový element mezi dvěma blízkými body prostoročasu má tvar

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu . \quad (691)$$

Princip relativity nám říká, že velikost délkového elementu je stejná pro všechny pozorovatele. Matematicky toto znamená, že při změně souřadnic

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\alpha) \quad (692)$$

máme

$$ds^2 = g'_{\mu\nu}(x') dx'^\mu dx'^\nu = g_{\alpha\beta}(x) dx^\alpha dx^\beta = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} dx'^\mu dx'^\nu \quad (693)$$

a porovnáním těchto dvou rovnic dostaneme transformační vztah pro metrický tensor

$$g'_{\mu\nu}(x') = g_{\alpha\beta}(x) \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} . \quad (694)$$

Poznamenejme, že inverzní  $g_{\mu\nu}$  je tensor  $g^{\nu\sigma}$ , pro který platí

$$g_{\mu\nu} g^{\nu\sigma} = \delta_\mu^\sigma . \quad (695)$$

Uvažujme nyní akci pro bodovou částici

$$S = - \int mc \sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} d\lambda , \quad (696)$$

kde  $\lambda$  parameterizuje křivku

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad (697)$$

a kde

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda} . \quad (698)$$

Z této akce dostaneme následující hybnosti

$$p_\mu = \frac{\delta L}{\delta \dot{x}^\mu} = mc \frac{g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu}} \quad (699)$$

Z předchozího výsledku dostaneme následující podmínku

$$p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu = m^2 c^2 \frac{\dot{x}^\mu g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu}{-g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} = -m^2 c^2 . \quad (700)$$

Což je známá podmínka pro hybnosti. Na druhou stranu z definice Hamiltonianu dostaneme, že je identicky roven nule

$$H = \dot{x}^\mu p_\mu - L = 0 . \quad (701)$$

Na druhou stranu se dá ukázat, že daná akce odpovídá systému s vazbami, který vyžaduje speciální diskuzi, proto nyní opustíme problematiku Hamiltoniánu pro relativistickou částici s tím, že budeme mít v paměti podmínku (700). Poznamenejme, že v případě, kdy  $\lambda = c\tau$ , kde  $\tau$  je vlastní čas definovaný vztahem

$$-c^2 d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (702)$$



dostaneme  $g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = -c^2$ .

Tak, jako v nerelativistickém případě, bude základní veličinou lokální hustota částic  $n(\mathbf{x}, t)$ , kde  $n(\mathbf{x}, t)\Delta^3x$  udává průměrné číslo částic v prostorovém objemu  $\Delta^3x$  v okolí bodu  $\mathbf{x}$  v čase  $t$ . Podobným způsobem definujeme tok částic  $\mathbf{j}(\mathbf{x}, t)$ . V teorii relativity tyto veličiny tvoří komponenty čtyřvektoru

$$N^\mu(x) = (cn(\mathbf{x}, t), \mathbf{j}(\mathbf{x}, t)) , \quad (703)$$

kde  $\mu = 0, 1, 2, 3$  a kde  $x = x^\mu = (ct, \mathbf{x})$  je prostoročasový bod. Konečně,  $c$  je rychlost světla.

Nyní uvažujeme systém relativistických část o hmotě  $m$ , kde z předchozí diskuze víme, že pro ně platí

$$p_\mu g^{\mu\nu} p_\nu = -m^2 c^2 . \quad (704)$$

V rovném prostoročase máme  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$  a  $g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = (-1, 1, 1, 1)$ . Pak předchozí podmínka dává

$$p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2} , \mathbf{p}^2 = p_i p^i . \quad (705)$$

Pro velký počet částic má smysl zavést funkci  $f(x, p)$ , která udává rozdělení čtyřhybnosti  $p = p_\mu = (p_0, \mathbf{p})$  v každém prostoročasovém bodě  $x$ . Její definice je taková, že  $f(x, p)\Delta^3x\Delta^3p$  udává počet částic, které jsou umístěny v objemovém elementu  $\Delta^3x$  v okolí bodu  $\mathbf{x}$  a které mají hybnost v intervalu  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$  v čase  $t$ . Tato definice opět předpokládá, že počet částic v objemu  $\Delta^3x$  je velké, na druhou stranu předpokládá, že  $\Delta^3x$  je malý vzhledem k makroskopickým rozměrům.

Stejným způsobem jako v nerelativistickém případě definujeme s pomocí distribuční funkce hustotu a tok částic

$$\begin{aligned} n(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{p} f(x, p) , \\ \mathbf{j}(\mathbf{x}, t) &= \int d^3\mathbf{p} \mathbf{p} f(x, p) , \end{aligned} \quad (706)$$

kde

$$\mathbf{u} = \frac{c\mathbf{p}}{p^0} . \quad (707)$$

je rychlost relativistické částice s hybností  $\mathbf{p}$ . Toto vyplývá ze skutečnosti, že čtyřvektor hybnosti v Minkowském prostoročase je definován jako

$$p_\mu = m \frac{\eta_{\mu\nu} dx^\nu}{d\tau} = m \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \eta_{\mu\nu} \frac{m}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \frac{dx^\nu}{dt} \quad (708)$$

kde jsme použili

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^i dx_i \Rightarrow d\tau^2 = dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (709)$$

Pak z (708) dostaneme

$$p^0 = \frac{mc}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}, p^i = \frac{mv^i}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Rightarrow p^i = \frac{p^i c}{p^0}. \quad (710)$$

Pak je možné napsat psát

$$\begin{aligned} N^0(x) &= cn(\mathbf{x}, t) = c \int d^3\mathbf{p} \frac{p^0}{p^0} f(x, p), \\ N^i(x) &= j^i(\mathbf{x}, t) = \int d^3\mathbf{p} \frac{cp^i}{p^0} f(x, p) \end{aligned} \quad (711)$$

a tedy v kovariantním zápisu

$$N^\mu = c \int \frac{d^3\mathbf{p}}{p^0} p^\mu f(x, p). \quad (712)$$

Poznamenejme, že  $p^0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}$ . Pak zavedeme integraci přes nezávislou proměnnou  $p^0$  s pomocí zavedení delta funkce  $\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2})$

$$N^\mu = c \int \frac{d^4 p}{p^0} p^\mu \delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2 c^2}) f(x, p). \quad (713)$$

Toto není plně kovariantní forma toku. Abychom ho našli, začneme s následující vlastností Dirakovy delta funkce

$$\delta(g(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|g'(x_i)|}, \quad (714)$$

kde  $x_i$  jsou kořeny rovnice  $g(x) = 0$ . Například pro  $g(x) = x^2 - \alpha^2$  dostaneme

$$\delta(x^2 - \alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|} [\delta(x + \alpha) + \delta(x - \alpha)]. \quad (715)$$

V našem případě ale musíme vzít pouze kladný kořen  $p_0 = \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}$ , což zajistíme pomocí funkce  $\theta(p^0)$ , která je rovna jedné pro  $p^0 \geq 0$  a 0 pro  $p^0 < 0$ . Pak tedy dostáváme konečný vztah

$$\theta(p^0)\delta(p^2 + m^2c^2) = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}}\delta(p^0 - \sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2c^2}) \quad (716)$$

a tedy

$$N^\mu(x) = 2c \int d^4p \theta(p^0)\delta(p^2 + m^2c^2)p^\mu f(x). \quad (717)$$

Protože  $N^\mu$  se musí transformovat jako čtyřvektor, vidíme, že  $f(x)$  je skalární funkce vzhledem k Lorentzovým transformacím, protože  $d^4p$  je invariantní objemový element,  $\delta(p^2 + m^2c^2)$  je také invariantní a to samé platí pro  $\theta$  funkci.

Nyní můžeme přistoupit k formulaci relativistické kinetické rovnice

#### 4.1.1 Relativistická kinetická rovnice

Jak víme, kinetická rovnice je uzavřená rovnice pro prostoročasový vývoj jednočásticové distribuční funkce, jejíž forma je založena na mnoha podmínkách. Předně, jak víme, srážkový člen v kinetické rovnici je založen na binárních srážkách. Dále, abychom mohli mít makroskopický popis, musíme předpokládat, že rozdělovací funkce se nemění na mikroskopických škálách. Dalším předpokladem je tzv. molekulární chaos, což je absence korelací před každou individuální kolizí. Nyní se pokusíme pomocí těchto předpokladů odvodit relativistickou formu kinetické rovnice.

##### **Předpoklady**

Základní předpoklad je existence relativistické distribuční funkce  $f(x, p)$ , která je skalární funkcí souřadnic  $x^\mu = (ct, \mathbf{x})$  a vektoru čtyřhybnosti  $p^\mu =$

$(p^0, \mathbf{p})$ , kde samozřejmě máme částice na hmotové slupce  $p^0 = \sqrt{m^2 c^2 + \mathbf{p}^2}$ . Abychom odvodili pohybovou rovnici pro tuto rozdělovací funkci, zavedeme stejné předpoklady jako v případě nerelativistické rozdělovací funkce kde navíc požadujeme, že daná pohybová rovnice je kovariantní. Explicitně

- Uvažujeme pouze dvoučásticové interakce.
- Předpokládáme hypotézu molekulárního chaosu, což je statistický předpoklad týkající se počtu dvoučásticových srážek, kdy předpokládáme, že tento počet je úměrný součinu distribuční funkce srážejících se částic a účinného průřezu.
- Distribuční funkce se pomalu mění v prostoru a čase, kde její změny na charakteristických interakčních délkách a během charakteristického interakčního času jsou zanedbatelně malé.

### Bezsrážková rovnice

Uvažujme čtyřvektor toku

$$N^\mu(x) = c \int \frac{d^3 \mathbf{p}}{p^0} p^\mu f(x, p) \quad (718)$$

kde  $N^0$  je rovno  $nc$  a kde  $N^i$  reprezentují tok částic měřený vzhledem k souřadnicové soustavě spojené s pozorovatelem. Zde  $f(x, p)$  a  $\frac{d^3 \mathbf{p}}{p^0}$  jsou skalární funkce. Uvažujme nyní skalární hustotu

$$\Delta N(x) = c^{-1} \int_{\Delta^3 \sigma} d^3 \sigma_\mu N^\mu(x) \quad (719)$$

kde  $d^3 \sigma_\mu$  je plošný element povrchu  $\sigma$  s normálním časupodobným vektorem  $\sigma_\mu$ , povrch  $\Delta^3 \sigma$  je malý element lokalizovaný v bodě  $x$ . Pak tedy máme

$$\Delta N(x) = \int_{\Delta^3 \sigma} \int d^3 \sigma_\mu \frac{d^3 p}{p^0} p^\mu f(x, p) . \quad (720)$$

V souřadnicové soustavě, kde vektor  $d^3 \sigma_\mu$  má pouze časovou komponentu, máme  $d^3 \sigma_\mu = (d^3 \mathbf{x}, 0, 0, 0)$ , kde pak dostaneme

$$\Delta N(x) = \int_{\Delta^3 x} \int d^3 p f(x, p) . \quad (721)$$

Je zřejmé, že tento výraz udává počet částic v objemovém elementu  $\Delta^3x$ .

Tomuto výsledku můžeme dát relativistickou interpretaci následujícím způsobem. Zavedeme počet světočar, které protínají element  $\Delta^3\sigma$  a mají směr odpovídající hybnostem z intervalu  $\Delta^3p$  v okolí bodu  $p$

$$\Delta N(x, p) = \int_{\Delta^3\sigma} \int_{\Delta^3p} d^3\sigma_\mu \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p) . \quad (722)$$

Pro kontrolu, jestliže uvažujeme tradiční situaci, kdy  $\Delta^3\sigma$  je čistě prostorový objem, pak normálový vektor má pouze časovou komponentu a tedy  $d^3\sigma_\mu p^\mu = p^0 d^3\mathbf{x}$  a tedy

$$\Delta N(x, p) = \int_{\Delta^3x} \int_{\Delta^3p} d^3x d^3p f(x, p) . \quad (723)$$

Nyní je jasné, že tyto stejné částice protnou prostorový element  $\Delta^3\hat{\sigma}$  za nějaký časový okamžik  $t$  a tedy můžeme psát

$$\int_{\Delta^3\hat{\sigma}} \int_{\Delta^3\mathbf{p}} d^3\sigma_\mu \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p) - \int_{\Delta^3\sigma} \int_{\Delta^3\mathbf{p}} d^3\sigma_\mu \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p) = 0 \quad (724)$$

Uvažujme nyní element Minkowskeho prostoročasu  $\Delta^4x$ , který je vymezen povrchovými elementy  $\Delta^3\sigma$ ,  $\Delta^3\hat{\sigma}$  a obalem světočar uvažovaných částic. Protože uvažujeme idealizovaný případ bezkolizního vývoje, pak žádná světočára částic nemůže procházet obalem dané trubice. Jinými slovy rovnice (724) vyjadřuje tu skutečnost, že celkový tok přes plochu vymezují objem  $\Delta^4x$  je roven nule

$$\int_{\partial\Delta^4x} \int_{\Delta^3\mathbf{p}} d^3\sigma_\mu \frac{d^3p}{p^0} p^\mu f(x, p) = 0 . \quad (725)$$

S pomocí Gaussovy věty můžeme tento výsledek přepsat do tvaru

$$\int_{\Delta^4x} \int_{\Delta^3p} d^4x \frac{d^3\mathbf{p}}{p^0} p^\mu \partial_\mu f(x, p) = 0 . \quad (726)$$

Protože  $\Delta^4x$  a  $\Delta^3p$  jsou libovolné, dostaneme konečný výsledek

$$p^\mu \partial_\mu f(x, p) = 0 . \quad (727)$$

V případě, když použijeme  $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} = (c^{-1}\partial_t, \partial_i)$ , můžeme přepsat předchozí

rovnici do tvaru

$$p^0 \frac{1}{c} \frac{\partial f(x, p)}{\partial t} + p^i \frac{\partial f(x, p)}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow$$

$$\partial_t f(x, p) + u^i \partial_i f(x, p) = 0, u^i = \frac{cp^i}{p^0}.$$
(728)

Samozřejmě, reálná situace je popsána kolizní kinetickou rovnicí.

### **Srážková relativistická kinetická rovnice**

Tak, jako v případě nerelativistické kinetické rovnice se musíme zaobírat srážkovým integrálem. Označíme si počet částic, které se změny v intervalu  $\Delta^4 x \Delta^3 p$  v důsledku srážek jako

$$\Delta^4 x \frac{\Delta^3 p}{p^0} C(x, p) \tag{729}$$

kde  $C(x, p)$  je skalární funkce, jejíž tvar musíme nalést pomocí předpokladů, které byly uvedeny v předchozí diskuzi. Uvažujme srážku mezi dvěma částicemi, které mají počáteční čtyřhybnosti  $p^\mu, p_1^\mu$  a konečné čtyřhybnosti  $p'^\mu, p_1'^\mu$ . Předpoklad molekulárního chaosu nám říká, že průměrný počet těchto srážek v elementu  $\Delta^4 x$  v okolí bodu  $x$ , t.j. v časovém intervalu  $\Delta t$  v okolí bodu  $t$  a v objemovém elementu  $\Delta^3 x$  v okolí bodu  $\mathbf{x}$  je úměrný následujícím veličinám

- Hustotě počtu částic s hybnostmi v intervalu  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p})$ , tedy  $\Delta^3 p f(x, p)$ .
- Hustotě počtu částic s hybnostmi v intervalu  $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_1 + \Delta \mathbf{p}_1)$ , tedy  $\Delta^3 p_1 f(x, p_1)$ .
- Velikostí elementů  $\Delta^3 p', \Delta^3 p_1'$  a  $\Delta^4 x$ .

Označíme si faktor úměrnosti jako

$$W(p, p_1 | p', p_1') \frac{1}{p^0 p_1^0 p'^0 p_1'^0}, \tag{730}$$

kde  $W(p, p_1 | p', p_1')$  je funkcí pouze čtyřhybností před a po srážce a ke tato veličina je skalární funkcí vzhledem k Lorentzovým transformacím.

Jestliže budeme předpokládat, že rozdělovací funkce se pomalu mění na vzdálenostech odpovídající charakteristické délce interakcí a odpovídajících

časových škál, pak rozdělovací funkce pro částice před a po srážce je definována ve stejném prostoročasovém bodě. Jinými slovy máme, že rozdělovací funkce závisí na  $x^\mu$  jako  $f(x, p), f(x, p_1)$ , zatím co předpokládáme, že  $W$  nezávisí na  $x^\mu$   $W(p, p_1|p', p'_1)$ .

Hypotéza molekulárního chaosu nám říká, že počet částic v elementu Minkowského prostoročasu  $\Delta^4x$  a s hybnostmi v intervalu  $(\mathbf{p}, \mathbf{p} + \Delta\mathbf{p})$ , které odcházejí z tohoto intervalu v důsledku srážek, je získána integrací přes počet srážek s částicemi s hybnostmi  $\mathbf{p}_1$ . Zavedeme také faktor  $1/2$  jako důsledek faktu, že koncový stav s hybnostmi  $(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)$  je nerozlišitelný od stavu  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}')$ . Pak počet částic, které odejdou z daného intervalu, je roven

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta^4x \frac{\Delta^3p}{p^0} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{p_1^0} \frac{d^3\mathbf{p}'}{p'^0} \frac{d^3\mathbf{p}'_1}{p_1'^0} \times \\ & \times f(x, p) f(x, p_1) W(p, p_1|p', p'_1) . \end{aligned} \quad (731)$$

Stejným způsobem určíme přírůstek částic do daného intervalu jako důsledek srážek částic s počátečními hybnostmi  $(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)$  a konečnými hybnostmi  $(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1)$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \Delta^4x \frac{\Delta^3p}{p^0} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{p_1^0} \frac{d^3\mathbf{p}'}{p'^0} \frac{d^3\mathbf{p}'_1}{p_1'^0} \times \\ & \times f(x, p') f(x, p'_1) W(p', p'_1|p, p_1) . \end{aligned} \quad (732)$$

Poté, stejně jako v nerelativistickém případě, dostáváme pro celkovou změnu počtu částic v intervalu  $\Delta^4x$  a  $\Delta^3p$  rovnu

$$\begin{aligned} C(x, p) = & \frac{1}{2} \int \frac{d^3\mathbf{p}_1}{p_1^0} \frac{d^3\mathbf{p}'}{p'^0} \frac{d^3\mathbf{p}'_1}{p_1'^0} [f(x, p') f(x, p'_1) W(p', p'_1|p, p_1) - \\ & - f(x, p) f(x, p_1) W(p, p_1|p', p'_1)] . \end{aligned} \quad (733)$$

S pomocí tohoto výrazu můžeme napsat explicitní tvar kinetické rovnice se srážkovým členem

$$\int_{\Delta^4x} \int_{\Delta^3p} d^4x \frac{d^3p}{p^0} p^\mu \partial_\mu f(x, p) = \Delta^4x \frac{\Delta^3p}{p^0} C(x, p) . \quad (734)$$

Protože intervaly  $\Delta^4x$  a  $\Delta^3p$  jsou libovolné, dostaneme pro dostatečně hladkou distribuční funkci

$$p^\mu \partial_\mu f(x, p) = C(x, p) , \quad (735)$$

kterou můžeme přepsat do tvaru podobném nerelativistické kinetické rovnici

$$\begin{aligned} & (\partial_t + u^i \partial_i) f(x, p) = \\ & = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{p}_1 d^3 \mathbf{p}' d^3 \mathbf{p}'_1 [f' f'_1 w(\mathbf{p}', \mathbf{p}'_1 | \mathbf{p}, \mathbf{p}_1) - f f_1 w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1)] , \end{aligned} \quad (736)$$

kde  $f = f(x, p)$ ,  $f_1 = f(x, p_1)$ ,  $f' = f(x, p')$ ,  $f'_1 = f(x, p'_1)$  a kde

$$w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) = \frac{cW(p, p_1 | p', p'_1)}{p^0 p_1^0 p'^0 p_1'^0} . \quad (737)$$

Nyní můžeme interpretovat veličinu  $w(\mathbf{p}, \mathbf{p}_1 | \mathbf{p}', \mathbf{p}'_1) d^3 p' d^3 p'_1$  jako hustotu pravděpodobnosti přechodu ze stavu, kdy dvě počáteční částice mají hybnosti  $\mathbf{p}, \mathbf{p}_1$  a přecházejí do stavu s konečnými hybnostmi v intervalech  $(\mathbf{p}', \mathbf{p}' + \Delta \mathbf{p}')$  a  $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{p}'_1 + \Delta \mathbf{p}'_1)$ .

**Diferenciální účinný průřez** Veličina  $W(p, p_1 | p', p'_1)$  byla definována jako skalární funkce, která je funkcí deseti skalárních invariantů, které mohou být vytvořeny z čtyřhybnosti  $p^\mu, p_1^\mu, p'^\mu$  a  $p_1'^\mu$ . Zjevně čtyři z těchto skalárů jsou dané parametry díky normalizaci  $p^2 = -m^2 c^2$ . Dále máme čtyři rovnice vyjadřující zákon zachování čtyřhybnosti

$$p^\mu + p_1^\mu = p'^\mu + p_1'^\mu , \quad (738)$$

které redukují počet volných parametrů na dva. Zavedeme dva známe invarianty

$$\begin{aligned} s & \equiv (p + p_1)^2 , \\ t & \equiv (p - p_1)^2 . \end{aligned} \quad (739)$$

Je zjevné, že tyto veličiny jsou invariantní vůči Lorentzovým transformacím. Poté s použitím zákona zachování můžeme předpokládat, že  $W(p, p_1 | p', p'_1)$  má tvar

$$W(p, p_1 | p', p'_1) = s \sigma(s, \Theta) \delta^{(4)}(p + p_1 - p' - p'_1) , \quad (740)$$

kde  $\sigma(s, \Theta)$  je funkce energie a rozptylového úhlu. Má rozměr  $m^2$  a ve skutečnosti odpovídá diferenciálnímu účinnému průřezu.



## 4.2 Relativistická kinetická teorie v křivém prostoročase

V této kapitole budeme studovat relativistickou teorii v křivém prostoročase. Jako první krok zavedeme jednočásticovou rozdělovací funkci pomocí alternativního popisu.

Začneme s nerelativistickou definicí jednočásticové rozdělovací funkce  $f_{nr}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ , kde z definice  $f_{nr}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}) \Delta^3 x \Delta^3 p$  udává průměrný počet částic, které najdeme v objemovém elementu  $\Delta^3 x$  v okolí bodu  $\mathbf{x}$  s hybnostmi v malém, ale konečném elementu  $\Delta^3 p$  v okolí bodu  $\mathbf{p}$ . Opět požadujeme, aby prostorový objem  $\Delta^3 x$  byl dostatečně velký, aby obsahoval velké množství molekul, na druhou stranu musí být dostatečně malý, abychom mohli uvažovat rozdělovací funkci v daném elementu konstantní.

Uvažujme velký makroskopický systém s částicemi  $r = 1, 2, 3, \dots$ , kde  $\mathbf{x}_r(t)$  popisuje trajektorii  $r$ -té částice. Dále, nechť  $\mathbf{p}_r(t)$  je hybnost  $r$ -té částice v čase  $t$ . Uvažujme nyní následující výraz

$$\sum_r \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_r(t)) ,$$

$$\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) = \prod_{i=1}^3 \delta(x^i - x_r^i(t)) .$$
(741)

Jestliže nyní provedeme integraci přes prostorové a objemové elementy  $\Delta^3 x, \Delta^3 p$ , pak daný výraz udává počet částic v čase  $t$ , které se nacházejí v elementu  $\Delta^3 x$  v okolí bodu  $\mathbf{x}$  s hybnostmi v elementu  $\Delta^3 p$  v okolí bodu  $\mathbf{p}$ .

Říkáme, že dvě tekutiny jsou makroskopicky ekvivalentní, jestliže jejich makroskopické veličiny jsou stejné. Samozřejmě, dvě makroskopické tekutiny se mohou lišit na mikroskopické úrovni. Uvažujme nyní velký počet makroskopicky ekvivalentních nerovnovážných systémů, které nazýváme ansámblem nerovnovážných systémů. Pak můžeme s každým takovým systémem spojit výraz (741). Jestliže nyní provedeme sumaci přes všechny tyto výrazy a následně je vydělíme číslem udávající počet systému v ansámbli, dostaneme průměrnou hustotu částic (průměr provedený přes ansámbl). Označme tuto střední hodnotu jako  $\langle \rangle_{av}$ . Pak definujeme jednočásticovou distribuční funkci následujícím výrazem

$$f_{nr}(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) = \left\langle \sum_r \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_r(t)) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{p}_r(t)) \right\rangle_{av} .$$
(742)

Tento výraz nazveme matematickou definicí nerelativistické distribuční funkce  $f_{nr}(t, \mathbf{x}, \mathbf{p})$ , která bude také určující definicí relativistické distribuční funkce  $f_*(t, x^i, p_i)$ .

Nechť  $M$  je prostoročasová varieta s metrikou  $g_{\mu\nu}(x)$ , kde  $g = \det g$  je determinant metriky v bodě  $x$ . Uvažujme tekutinu tvořenou identickými částicemi  $1, 2, \dots$  v okolí bodu  $x$ . Nechť  $x_r^i(t)$  a  $p_{ir}(t)$  jsou souřadnice a hybnosti  $r$ -té částice v čase  $t$ . Nyní definujeme  $f_*(t, x^i, p_i)$  stejným způsobem jako v nerelativistickém případě

$$f_*(t, x^i, p_i) = \left\langle \sum_r \delta(x^i - x_r^i) \delta(p_i - p_{ir}(t)) \right\rangle. \quad (743)$$

Abychom ukázali, že daný výraz je skalár, zavedeme funkci

$$I_*(x, p) = 2\theta(p_0) \delta(p^2 - m^2 c^2) f_*(t, x^i, p_i) \quad (744)$$

where  $p^2 = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu$ . Protože je zjevné, že  $\theta(p_0)$  a  $\delta(p^2 - m^2 c^2)$  jsou skalární funkce, tak když dokážeme, že  $I_*$  je skalární funkcí, pak i  $f_*(x, p)$  je skalární funkcí. Abychom dokázali, že  $I_*$  je skalár, použijeme identitu

$$\delta(H(z)) = \sum_k \frac{1}{|H'(z)|} \delta(z - z_k), \quad (745)$$

kde suma je provedena přes kořeny rovnice  $H(z) = 0$ . V našem případě  $H(p_0) = g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu - m^2 c^2$  a tedy

$$\frac{dH}{dz} \Big|_{z=p_0} = 2g^{00} p_0 + 2g^{0i} p_i = 2p^0 \quad (746)$$

a kořen rovnice  $H(z)$  má tvar

$$g^{00} p_0^2 + 2g^{0i} p_0 p_i + g^{ij} p_i p_j + m^2 c^2 = 0 \Rightarrow$$

$$p_0^*(x, p_i) = \frac{1}{g^{00}(x)} \left( -g^{0i}(x) p_i + \sqrt{(g^{0i} p_i)^2 - g^{00}(x) (g^{ij}(x) p_i p_j + m^2 c^2)} \right) \quad (747)$$

a tedy

$$\frac{dH}{dz}(p_0^*) = 2 \sqrt{(g^{0i} p_i)^2 - g^{00}(x) (g^{ij}(x) p_i p_j + m^2 c^2)} \quad (748)$$

Pak je zřejmé, že

$$2\theta(p_0)\delta(p^2 + m^2c^2) = \frac{1}{p^0(x, p_i)}\delta(p_0 - p_0(x, t)) . \quad (749)$$

Pak dostaneme

$$l_*(x, p) = \left\langle \sum_r \frac{1}{p_r^0(p_{ri}(t))} \delta(x^i - x_r^i(t)) \delta^4(p - p_{*r}(t)) \right\rangle_{av} \quad (750)$$

kde

$$p_r^0(p_{ri}(t)) = p^0(t, x_r^i(t), p_{ri}(t)) , p_{r0}(p_{ri}(t)) = p_0(t, x_r^i(t), p_{ri}(t)) , \quad (751)$$

kde funkce  $p_0$  je dána rovnicí (747). Jako další krok zavedeme další Diracovu distribuční funkci  $\delta(t - t_r)$  a současně zavedeme integraci vzhledem k  $t_r$ , čímž dostaneme

$$l_*(x, p) = \left\langle \int \sum_r \frac{1}{p_r^0(t_r)} \delta(t - t_r) \delta(x^i - x_r^i(t_r)) \delta^4(p - p_r(t_r)) dt_r \right\rangle_{av} \quad (752)$$

Z definice 4– hybnosti víme, že

$$p_{\mu r} = mg_{\mu\nu} \frac{dx_r^\nu}{d\tau_r} \Rightarrow p_r^\mu = g^{\mu\nu} p_{\nu r} = m \frac{dx_r^\mu}{d\tau_r} \Rightarrow p_r^0 = m \frac{dx_r^0}{d\tau_r} \quad (753)$$

kde  $\tau_r$  je vlastní čas podél trajektorie  $r$ -té částice. Pak tedy dostáváme

$$d\tau_r = \frac{mc}{p_r^0(t_r)} dt_r , t_r = \frac{x_r^0}{c} . \quad (754)$$

Poté, když nahradíme integrační proměnnou v (752)  $dt_r$  dostaneme

$$l_*(x, p) = \frac{1}{m} \int \left\langle \sum_r \delta^4(x - x_r(t_r(\tau_r))) \delta^4(p - p_r(t_r(\tau_r))) \right\rangle_{av} d\tau_r \quad (755)$$

Je možné ukázat, že  $\delta^4(x - x_r)/\sqrt{-\det g}$  a  $\sqrt{-\det g}\delta(p - p_r)$  jsou skalární funkce. Pak (755) je skalární funkce a tedy i  $f_*(x, p_i)$  je skalární funkce. Pak je tedy možné definovat  $f_*(x, p_i)$  jako jednočásticová distribuční funkce v sedmi dimensionálním prostoru  $(x, p_i)$ . Poté je možné najít stejný tvar Boltzmanovy rovnice jako v předchozí kapitole a z tohoto důvodu nebudeme dané výpočty ukazovat.

## 5 Ideální tekutina

Matemacký popis dynamické kapaliny je dán funkcí, která popisuje rychlost tekutiny  $v^i = v^i(x^i, t)$  kde  $x^i, i = 1, \dots, d$  kde  $x^i$  jsou souřadnice prostoru  $R^d$  a kde  $t$  odpovídá časové souřadnici. Tato funkce  $v^i = v^i(x^i, t)$  popisuje rozložení rychlosti v celém prostoru v určitém časovém okamžiku  $t$  však ještě ne zcela dostatečně popisuje kapalinu. Pro její další charakteristiku zavádíme jednu z následujících termodynamických veličin, například **tlak**  $p = p(x^i, t)$  a hustota  $\rho = \rho(x^i, t)$ . Všechny termodynamické veličiny jsou poté určeny těmito veličinami dohromady se stavovou rovnicí. Jinými slovy řečeno, když známe rozložení rychlosti popsáné  $d$  funkcemi  $v^i$ , dále tlak  $p$  a hustota  $\rho$ , pak stav tekutiny je plně určen.

Před tím, než přistoupíme k podrobnějšímu výkladu, uvedeme dva různé druhy časových derivací.

- **Eulerovská časová derivace:** Jedná se o částečnou časovou derivaci  $\frac{\partial}{\partial t}$  počítanou v daném pevném bodě v prostoru, kdy bereme  $\mathbf{x}$  jako konstantu.
- **Lagrangeovská časová derivace:** Jedná se o totální časovou derivaci  $\frac{d}{dt}$ , kterou provedeme v bodě, která sleduje element kapaliny pohybující se rychlostí  $\mathbf{v}$ .

Uvažujme veličinu  $Q(\mathbf{x}, t)$  definovanou pro danou tekutinu, například teplotu, hustotu a komponentu rychlosti. Za velmi malý časový okamžik  $\delta t$  element tekutiny, který v čase  $t$  se nachází v bodě  $\mathbf{x}$ , se posune do bodu  $\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta t$ . Tedy

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &\equiv \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{Q(\mathbf{x} + \mathbf{v}\delta t, t + \delta t) - Q(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = \\ &= \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{Q(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial Q}{\partial t}(\mathbf{x}, t)\delta t + \frac{\partial Q}{\partial x^i}(\mathbf{x}, t)v^i\delta t + \mathcal{O}(\delta t^2) - Q(\mathbf{x}, t)}{\delta t} = \\ &= \frac{\partial Q}{\partial t} + v^i\partial_i Q . \end{aligned} \tag{756}$$

### 5.1 Rovnice spjitosti

Nyní odvodíme základní rovnice mechaniky tekutin. Pro jednoduchost začneme s rovnicí, která vyjadřuje zákon zachování hmoty. Uvažujme libovolný objem

$V_0$ . Hmotu látky obsažené v tomto objemu je dána integrálem  $\int_{V_0} \rho dV$ , kde  $\rho$  je hustota tekutiny. Hmotu tekutiny, tekoucí za jednotku času skrz element  $dS_i$  povrchu, který ohraničuje objemový element  $V_0$  je rovna  $\rho v^i dS_i$ , kde velikost vektoru  $dS_i$  je rovna ploše tohoto povrchového elementu a jeho směr je dán normálou k danému elementu. Zavedeme konvenci, že tato normála směřuje ven z daného elementu. Následně dostáváme, že  $\rho v^i dS_i > 0$  pro tok kapaliny vytékající z dané oblasti, zatím co je negativní v případě, když kapalina vtéká do daného objemu. Poté dostáváme, že celková hmota kapaliny vytékající z daného objemu je dána následujícím integrálem

$$\oint_{S_0} \rho v^i dS_i , \quad (757)$$

kde  $S_0$  označuje oblast, která ohraničuje objem  $V_0$ . Dále, úbytek hmoty v daném objemu za jednotku času je roven

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV . \quad (758)$$

Je jasné, že (757) a (758) se musí rovnat

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho dV = - \oint_{S_0} \rho v^i dS_i \quad (759)$$

Jestliže použijeme Greenovu větu

$$\oint_{S_0} \rho v^i dS_i = \int_{V_0} \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) dV \quad (760)$$

dostáváme z rovnice (759)

$$\int_{V_0} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) \right] dV = 0 . \quad (761)$$

Protože tato rovnice platí pro libovolný objem dostáváme, že samotný integrant musí být roven nule, a tedy dostáváme *rovnici spojitosti*

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} (\rho v^i) = 0 . \quad (762)$$

Je také užitečné zavést vektor toku hustoty definovaný jako

$$j^i = \rho v^i . \quad (763)$$

Poznamenejme, že rovnici spojitosti (762) může být zapsána také ve formě

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + v^i \partial_i \rho + \rho \partial_i v^i = \frac{d\rho}{dt} + \rho \partial_i v^i = 0 . \quad (764)$$

Je intuitivně jasné, že můžeme definovat *nestlačitelnou tekutinu* jako tekutinu, pro kterou platí

$$\frac{d\rho}{dt} = 0 . \quad (765)$$

Vidíme, že nestlačitelná kapalina je také charakterizována podmínkou

$$\partial_i v^i = 0 . \quad (766)$$

## 5.2 Eulerova rovnice

V této kapitole odvodíme Eulerovu rovnici. Začneme s definicí s *hustotou hybnosti* která je definována jako

$$p^i = \rho v^i \quad (767)$$

a tedy celková hybnost obsažená v určitém objemu  $V$  je dána integrálem

$$P^i = \int_{V_0} p^i dV \quad (768)$$

Nyní určíme změnu celkového impulsu v daném objemu. První příčinou změny impulsu je dán tokem impulsu přes hranici daného objemu, který je dán výrazem

$$- \int_{S_0} \rho v^i v^j n_j dS \quad (769)$$

Další změna celkového impulsu je vyvolána působením tlaku z vnějšího objemu v každém bodě plochy ohraničující daný objem. Tato síla je rovna integrálu

$$- \int_{S_0} p n^i dS \quad (770)$$

kde - znaménko je dáno konvencí, kde normální vektor směřuje ven z dané plochy. Shrnutím všechny tyto skutečnosti dohromady dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho v^i dV = - \int_{S_0} \rho v^i v^j n_j dS - \int_{S_0} p n^i dS \quad (771)$$

Aplikace Gaussovy věty pro předchozí integrál není možný, neboť  $pn^i$  není vhodný výraz. Abychom toto vyřešili, zavedeme Kroneckerovo-delta

$$\delta_i^j, \delta_i^i = 1, \text{ pro } i = 1, \quad \delta_i^j = 0, \text{ pro } i \neq j. \quad (772)$$

Poté můžeme psát  $pn^i = p\delta_i^j n_j$  a tedy

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho v^i dV &= - \int_{S_0} [\rho v^i v^j n_j dS + p \delta^{ij} n_j] dS \Rightarrow \\ \frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho v^i dV &= - \int_{V_0} \partial_j [\rho v^i v^j + p \delta^{ij}] \end{aligned} \quad (773)$$

Protože tato rovnice platí pro libovolný objem, musí nutně platit také pro integrand a tedy dostáváme následující parciální diferenciální rovnici

$$\partial_t(\rho v^i) + \partial_j(\rho v^i v^j + \delta^{ij} p) = 0 \quad (774)$$

Je jasné, že daný problém se dá zobecnit, když zahrneme objemovou sílu působící na kapalinu. Pro gravitaci je daná síla daná gradientem skalárního potenciálu, a tedy zobecnění rovnice (774) má tvar

$$\partial_t(\rho v^i) + \partial_j(\rho v^i v^j + \delta^{ij} p) = -\rho \partial^i \phi. \quad (775)$$

Poznamenejme, že můžeme přepsat předchozí rovnici jako

$$(\partial_t \rho + \partial_j(\rho v^j)) v^i + \rho(\partial_t v^i + \partial_j v^i v^j + \frac{1}{\rho} \delta^{ij} \partial_j p + \partial^i \phi) = 0, \quad (776)$$

která, s pomocí rovnice spojitosti, vede ke slavným Eulerovým rovnicím

$$\partial_t v^i + \partial_j v^i v^j = -\frac{1}{\rho} \delta^{ij} \partial_j p - \partial^i \phi. \quad (777)$$

### 5.2.1 Alternativní odvození pohybových rovnic

Uvažujme element kapaliny o objemu  $\delta V$  a hmotnosti  $\rho \delta V$ . Urychlení tohoto elementu kapaliny  $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ , tak dostaneme, že Newtonův druhý pohybový zákon aplikovaný na tento element kapaliny má tvar

$$\rho \delta V \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \delta F = \delta \mathbf{F}_{tel} + \delta \mathbf{F}_{povr}. \quad (778)$$

Vidíme, že síla je rozdělena na dvě části.

- **Objemová síla:** Tuto sílu je možné vyjádřit jako

$$\delta \mathbf{F}_{tel} = \rho \delta V \mathbf{F}$$

a jedná se o sílu, která působí na všechny molekuly v daném objemovém elementu. V případě neutrálního plynu se jedná o vnější sílu.

- **Plošná síla:** Jedná se o sílu  $dF_{pov}^i = -P^{ij} dS_j$ , která působí na element tekutiny přes povrchový element  $dS$  daného malého objemu  $\delta V$ . Pak celková povrchová síla je dána integrálem přes hranici elementu  $\delta V$

$$(\delta F_{povr})^i = - \int_{\delta V} P^{ij} dS_j = - \int_{\delta V} \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} d^3V = - \frac{\partial P_{ij}}{\partial x^j} \delta V . \quad (779)$$

Poté dostáváme pohybové rovnice ve tvaru

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = - \frac{\partial P^{ij}}{\partial x^j} + \rho F^i . \quad (780)$$

### 5.2.2 Povrchové síly pro statické kapaliny. Eulerova rovnice

Je experimentálně dokázáno, že pro kapalinu ve statické rovnováze platí, že

$$d\mathbf{F}_{povr} \parallel \mathbf{n} \Rightarrow d\mathbf{F}_{povr} = -p \mathbf{n} dS , \quad (781)$$

kde  $p$  je tlak, což je skalární veličina. V tomto případě můžeme psát

$$P_{ij} = p \delta_{ij} . \quad (782)$$

Je důležité říci, že tento jednoduchý zákon platí pouze v případě, že kapaliny jsou v klidu a nebo v případě, že rychlost kapaliny  $\mathbf{v}$  je konstantní veličina v celé kapalině.

Na druhou stranu je užitečné uvažovat tekutinu, kde (782) platí bez ohledu na dynamiku tekutiny. V tomto případě pohybová rovnice má tvar

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \partial_j v^i = - \frac{1}{\rho} \partial_i p + F^i \quad (783)$$

což není nic jiného než slavná Eulerova rovnice a rovnice, které ji splňují, jsou známy jako **ideální tekutiny**.



### 5.3 Něco málo termodynamiky

Abychom plně pochopili termodynamické vztahy, které jsou nutné pro plné pochopení hydrodynamických rovnic, budeme se věnovat v této kapitole základním termodynamickým pojmům.

Uvažujme jednočásticový systém, kde kombinace prvního a druhého zákona termodynamiky dává rovnici

$$dE = TdS - pdV + \mu dN , \quad (784)$$

kde  $U$  je vnitřní energie,  $T$  je teplota,  $S$  je entropie a  $\mu$  je chemický potenciál, význam ostatních veličin je zřejmý. Předpokládejme, že máme stavovou rovnici, která nám říká  $E = E(S, V, N)$  kde

$$T = \left. \frac{\partial E}{\partial S} \right|_{V,N} , \quad p = - \left. \frac{\partial E}{\partial V} \right|_{S,N} , \quad \mu = \left. \frac{\partial E}{\partial N} \right|_{S,V} . \quad (785)$$

Celková energie  $E$ , entropie  $S$ , objem  $V$  a počet částic  $N$  jsou extenzivní veličiny, tj. když zdvojíme entropii, objem a počet částic, zdvojíme také vnitřní energii. Na druhou stranu teplota  $T$ , tlak  $p$  a chemický potenciál  $\mu$  jsou intenzivní veličiny, které nezmění své hodnoty, jestliže objem, počet částic a entropie jsou zdvojnásobeny. Podíváme se nyní na danou problematiku z matematického hlediska.

Označme veličiny s vlnovkou, jestliže jsou změněny stejnou hodnotou, to jest

$$\tilde{S} = \lambda S , \quad \tilde{V} = \lambda V , \quad \tilde{N} = \lambda N . \quad (786)$$

Nyní tvrzení, že vnitřní energie je extenzivní veličina, má následující matematické vyjádření

$$\tilde{E}(\tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{N}) = \lambda E(S, V, N) . \quad (787)$$

zatím co pro intenzivní veličiny platí

$$\tilde{T} = T , \quad \tilde{p} = p , \quad \tilde{\mu} = \mu \quad (788)$$

Pak tedy dostáváme

$$\begin{aligned} d\tilde{E} &= \lambda dE + E d\lambda = \tilde{T} d\tilde{S} - \tilde{p} d\tilde{V} + \tilde{\mu} d\tilde{N} = \\ &= \lambda(TdS - pdV + \mu dN) + (TS - pV + \mu N)d\lambda \end{aligned} \quad (789)$$

Porovnáním veličin u diferenciálu  $d\lambda$  dostáváme Eulerovu relaci

$$E = TS - pV + \mu N \quad (790)$$

Necht' nyní definujeme následující hustoty:

$$e = \frac{E}{V}, \quad s = \frac{S}{V}, \quad n = \frac{N}{V}. \quad (791)$$

Zavedením těchto veličin můžeme přepsat Eulerův vztah do tvaru

$$e + p = Ts + \mu n \quad (792)$$

Zajímavou vlastností extensivního systému je fakt, že počet parametrů nutných pro kompletní specifikaci termodynamického stavu může být redukován o jeden parametr takovým způsobem, že pouze dostaneme intenzivní parametry. Abychom toto ukázali, necht' máme

$$\lambda = 1/V \Rightarrow \tilde{S} = s, \quad \tilde{V} = 1, \quad \tilde{N} = n. \quad (793)$$

Poté  $\tilde{E} = E/V = e$  a také  $e = e(s, n)$  protože

$$e = \tilde{E}(\tilde{S}, \tilde{V}, \tilde{N}) = \tilde{E}(S/V, 1, N/V) = \tilde{E}(s, n). \quad (794)$$

Poté první zákon termodynamiky má tvar

$$\begin{aligned} d\tilde{E} &= \tilde{T}d\tilde{S} - \tilde{p}d\tilde{V} + \tilde{\mu}d\tilde{N} \Rightarrow \\ &de = Tds + \mu dn. \end{aligned} \quad (795)$$

Protože  $e = e(s, n)$  dostáváme z předchozího vztahu následující relace:

$$T = \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_n, \quad \mu = \left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_s. \quad (796)$$

Pomocí Eulerovy rovnice můžeme poté vyjádřit tlak jako funkce hustoty entropie a částic

$$p = -e(s, n) + s \left. \frac{\partial e}{\partial s} \right|_n + n \left. \frac{\partial e}{\partial n} \right|_s. \quad (797)$$

Můžeme brát vztah  $e = e(s, n)$  jako stavovou rovnici, která může být brána v každém bodě prostoru. Obecně, v případě termodynamických úvah v křivém

prostorochasu, můžeme hovořit o termodynamických relacích v malé oblasti, kde změny gravitačního pole jsou zanedbatelné, na druhou stranu dostatečně velké, aby obsahoval dostatečný počet částic, tak že hydrodynamické úvahy mohou být uplatněny. Poté předchozí termodynamické vztahy jsou nutné pro pochopení hydrodynamiky tekutin.

Ačkoliv tekutina není obecně v termodynamické rovnováze, první zákon termodynamiky může být použit pro malý element tekutiny o hmotnosti  $\delta m$ . Pak je možné definovat extenzivní proměnné pomocí proměnných definovaných na jednotku hmoty vynásobené  $\delta m$

$$\begin{aligned} dQ &= \delta m dq, & dU &= \delta m d\epsilon, \\ dV &= \delta m d\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\delta m \frac{d\rho}{\rho^2}, \end{aligned} \quad (798)$$

kde je dobré si uvědomit, že  $\rho$  je hustota hmoty, tedy hodnota hmoty v jednotce objemu. Jinými slovy

$$\rho = \frac{m}{V} \Rightarrow \frac{dVm - Vdm}{m^2} = -\frac{1}{\rho^2} d\rho \quad (799)$$

což pro  $m = \delta m, d\delta m = 0$  dává  $dV = -\delta m \frac{1}{\rho^2} d\rho$ . Alternativně, víme, že objem vztáhnutý k jednotce hmoty je  $v = \frac{1}{\rho}$ . Pak je jasné, že element  $dv$  je roven  $dv = -\frac{1}{\rho^2} d\rho$ . S použitím těchto veličin dostáváme první terodynamický zákon ve tvaru

$$dq = d\epsilon - \frac{p}{\rho^2} d\rho \quad (800)$$

Když podělíme tento výraz  $dt$  dostaneme

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dq}{dt} + \frac{p}{\rho^2} \frac{d\rho}{dt}. \quad (801)$$

S použitím rovnice spojitosti

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \partial_i v^i$$

dostaneme

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = -p \partial_i v^i - \mathcal{L}, \quad (802)$$

kde  $\mathcal{L} = -\rho \frac{dq}{dt}$  je teplotní ztráta na jednotku objemu (Podrobněji,  $\frac{dq}{dt}$  je ztráta tepla na jednotku hmotnosti, což vynásobeno  $\rho$  dává ztrátu tepla na jednotku objemu).

Víme, že teplo teče od teplejších k chladnějším částem systému úměrně rozdílu teplot. Tedy, teplotní tok je dán výrazem

$$q_i = -K \partial_i T , \quad (803)$$

kde  $K$  je koeficient termální kondukce a kde  $q_i$  je teplotní tok na jednotku objemu. Poté změna tepla způsobená kondukcí v objemovém elementu  $\delta V$  přes jeho povrch je rovna

$$\oint_{\partial \delta V} q_i dS^i = \int_{\delta V} \partial_i q^i d^3x . \quad (804)$$

Vidíme tedy, že teplotní úbytek na jednotku objemu je dán výrazem

$$\mathcal{L} = \partial_i q^i = -\partial_i (K \partial^i T) . \quad (805)$$

Použitím všech těchto výsledků dostáváme zákon zachování vnitřní energie

$$\rho \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial t} + v^i \partial_i \epsilon \right) = -p \partial_i v^i + \partial_i (K \partial^i T) \quad (806)$$

## 5.4 Zákon zachování energie-Konservativní forma

Energie existuje v mnoha formách. V případě hydrodynamiky se hlavně zabýváme dvěma formami energie: specifická termální energie, kterou označíme jako  $\epsilon$  a která odpovídá makroskopickému popisu příspěvku od mikroskopické struktury látky, a dále kinetická energie elementu kapaliny  $e_{kin} = \frac{1}{2} \rho v^2$ . Nyní počítáme časovou derivaci celkové hustoty energie

$$e_{tot} = \rho \epsilon + \frac{1}{2} \rho v^2 . \quad (807)$$

S použitím pohybových rovnic dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial e_{tot}}{\partial t} &= -\partial_i (\rho v^i) \epsilon - \rho (v^i \partial_i \epsilon) - p \partial_i v^i + \partial_i (K \partial^i T) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \partial_i (\rho v^i) v^2 - \rho (v^j \partial_j v^i + \frac{1}{\rho} \partial_i p) v^i = \\ &= -\partial_i \left[ \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) v^i - K \partial^i T \right] \end{aligned} \quad (808)$$

kde jsme definovali specifickou enthalpii na jednotku hmoty

$$w = \epsilon + \frac{p}{\rho} . \quad (809)$$

Jinými slovy, necht' definujeme tok energie jako

$$\mathcal{J}_{en}^i = \rho \left( \frac{1}{2} v^2 + w \right) v^i - K \partial^i T . \quad (810)$$

Pak dostaneme následující zákon zachování energie

$$\frac{\partial \epsilon_{tot}}{\partial t} + \partial_i \mathcal{J}_{en}^i = 0 . \quad (811)$$

Nyní uvažujme celkovou energii systému danou jako objemový integrál hustoty celkové energie  $\epsilon_{tot}$

$$\int_{V_0} d^d \mathbf{x} \rho \epsilon_{tot} . \quad (812)$$

Pak je jasné, že k úbytku celkové energie v daném objemu přispívá následující tok energie přes plochu ohraničující daný objem

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} dV \rho \epsilon_{tot} = - \int_{V_0} \partial_i \mathcal{J}_{en}^i dV = - \int_{S^{d-1}} \mathcal{J}_{en}^i n_i dS . \quad (813)$$

Vidíme, že úbytek energie v daném objemu je roven toku energie přes plochu, ohraničující daný objem.

### **Shrnutí makroskopického odvození Hydrodynamických rovnic**

Makroskopické odvození hydrodynamických rovnic vychází ze základní hypotézy, že hmota spojitě vyplňuje prostor. Tato tekutina může být rozdělena na malé myšlené elementy, kde každý element má rychlost  $\mathbf{v}$  a je nositelem fyzikálních veličin jako například hustoty  $\rho$  a teploty  $T$ . Poté zákon zachování hmoty okamžitě vede k rovnici

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \partial_i (\rho v^i) = 0 . \quad (814)$$

Newtonův druhý pohybový zákon použitý na element tekutiny dává rovnici

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = - \partial_j P^{ij} + \rho F^i \quad (815)$$

kde  $P^{ij}$  je tensor druhého řádu, který reprezentuje povrchovou sílu na jednotku plochy daného elementu tekutiny, která je vyvolána tekutinou obklopující daný element. V případě lokální termodynamické rovnováhy nám naše empirická zkušenost říká, že  $P^{ij} = p\delta^{ij}$ . Dále, když budeme opět předpokládat lokální termodynamickou rovnováhu a budeme uvažovat první termodynamický zákon, dostaneme energetickou rovnici pro tekutinu ve formě

$$\rho \frac{d\epsilon}{dt} = -p\partial_i v^i - \partial_i q^i, \quad (816)$$

kde  $\epsilon$  je vnitřní energie na jednotku hmotnosti a kde  $q^i$  je teplotní tok na jednotku hmotnosti.

Vidíme, že máme 14 proměnných  $\rho, v_i, P_{ij}, \epsilon, q_i$ . Na druhou stranu máme pět rovnic, tudíž je nutno vyjádřit těchto 14 proměnných pomocí pěti nezávislých proměnných. Při makroskopickém popisu tekutiny  $P_{ij}, \epsilon$  a  $g_i$  musí být vyjádřeny pomocí  $v^i$  a dvou termodynamických proměnných s pomocí základních rovnic, které v makroskopickém popisu jsou určeny empirickými relacemi. Relace  $P_{ij} = p\delta_{ij}$  a  $q_i = -K\partial_i T$  jsou příklady takových to vztahů, které samozřejmě závisí na materiálních vlastnostech tekutiny.

#### 5.4.1 Vířivost

Uvažujme Eulerovu rovnici pro systém, kde vnější síla je konservativní, t.j.  $F_i = -\partial_i \phi$  a tedy Eulerova rovnice má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \phi. \quad (817)$$

Protože pro libovolné pole platí následující identita

$$\mathbf{A} \cdot \nabla \mathbf{A} = \frac{1}{2} \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{A} \times (\text{rot} \mathbf{A}) \quad (818)$$

Pak Eulerova rovnice má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = \mathbf{v} \times (\text{rot} \mathbf{v}) - \frac{1}{\rho} \nabla p - \nabla \left( \phi + \frac{1}{2} \mathbf{v}^2 \right). \quad (819)$$

Nyní provedeme operaci rotace na obou stranách této rovnice a s použitím vztahu

$$\text{rot grad} = 0 \quad (820)$$

dostaneme

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \omega) + \frac{\nabla \rho \times \nabla p}{\rho^2}, \quad (821)$$

kde jsme zadefinovali vířivost tekutiny jako

$$\omega = \text{rot} \mathbf{v}. \quad (822)$$

Vidíme, že pro tekutinu o konstantní hustotě (nestlačitelnou tekutinu), rovnice pro vířivost velmi zjednoduší do tvaru

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \omega). \quad (823)$$

Je jasné, že podmínku nestlačitelnosti je možné použít pouze pro některé tekutiny, jako například pro vodu. Dále, jak jsme již dříve uvedli, pro nestlačitelné tekutiny platí

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (824)$$

Je známo, že je možné najít libovolný vektor, jestliže známe jeho rotaci a divergenci. Protože máme následující definici vířivosti  $\omega$

$$\omega = \text{rot} \mathbf{v} \quad (825)$$

vidíme, že pro nestlačitelnou tekutinu  $\mathbf{v}$  je určeno jeho vířivostí. Pak je možné formulovat dynamickou teorii pro nestlačitelné tekutiny pomocí rovnic (823), (824) a (825)

Je také zajímavé poznamenat, že v případě nestlačitelné jak ideální, nebo reálné tekutiny, odpovídající Euler, nebo Navier-Stokesova rovnice spolu s podmínkou  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  a  $\rho = \text{const}$  tvoří uzavřený systém rovnic. To vyplývá z faktu, že máme 4 proměnné  $\mathbf{v}$ ,  $p$  a 4 rovnice. Vidíme tedy, že pro nestlačitelné tekutiny, je energetická rovnice přebytečná.

Na druhou stranu se ukazuje, že v mnoha astrofyzikálních aplikacích je předpoklad nestlačitelnosti příliš restriktivní, například:

- Mnoho takových systémů má velkou variaci hustoty díky velké velikosti systému a díky silným gravitačním polím.
- Mnoho takových systémů se pohybuje rychlostmi, které jsou srovnatelné s rychlostí zvuku v daném médiu.

Ukazuje se, že v těchto případech musíme řešit energetickou rovnici spolu s momentovou rovnicí a rovnicí zákona zachování. Studium takového systému je známé pod pojmem dynamika plynů.

Na druhou stranu v určitých situacích je možné předpokládat, že tlak závisí na hustotě

$$p = p(\rho) . \quad (826)$$

Tato rovnice je známá jako *barotropní rovnice* a tekutina, pro kterou tato relace platí, je známa jako *barotropní tekutina*. Také pro této tekutiny je energetická rovnice přebytečná, kde pak dynamická teorie je tvořena rovnicí spojitosti a Eulerovou nebo (Navier-Stokesovou) rovnicí. Protože pro barotropní tekutinu platí rovnice (826) dostáváme, že

$$\nabla p = \frac{dp}{d\rho} \nabla \rho \quad (827)$$

a tedy dostáváme  $\nabla \rho \times \nabla p = 0$ . Pak je jasné, že pohybová rovnice vířivosti pro barotropní tekutinu má tvar

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \omega) . \quad (828)$$

### 5.4.2 Hydrostatika

Hydrostatika studuje statické rovnovážné řešení hydrodynamických rovnic. Tyto rovnice odpovídají situaci, kdy  $\mathbf{v} = 0$  a kdy  $\frac{\partial}{\partial t} = 0$ . Poté rovnice spojitosti je automaticky splněna, zatím co momentová rovnice a energetická rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla p + \rho \mathbf{F} , \\ 0 &= \nabla \cdot (K \nabla T) . \end{aligned} \quad (829)$$

Vidíme, že pro obecnou tekutinu máme tři neznáme ( $\rho, p, T$ ), zatím co zde máme 4 hydrostatické rovnice, což znamená, že momentové rovnice nemají řešení pro libovolné silové pole  $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ .

Například, pro nestlačitelné ( $\rho = \text{const}$ ) nebo barotropní tekutiny pro které platí  $p = p(\rho)$  můžeme použít  $\rho^{-1} \nabla p = \nabla \mathcal{P}$  kde

$$\mathcal{P} = \int \frac{dp}{\rho} . \quad (830)$$



Pak dostáváme, že podmínka rovnováhy sil dává

$$\nabla \mathcal{P} = \mathbf{F} . \quad (831)$$

Vidíme, že tato rovnice má řešení pouze za předpokladu, kdy síla  $\mathbf{F}$  je konservativní, t.j.

$$\nabla \mathcal{P} = \mathbf{F} = -\nabla \phi \Rightarrow \mathcal{P} = \mathcal{P}_0 - \phi \quad (832)$$

kde  $\mathcal{P}_0$  je konstanta. Například, pro **nestlačitelné** tekutiny dostáváme

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_0 - \phi(\mathbf{x}) = \mathcal{P} &= \int \frac{dp}{\rho} = \frac{p}{\rho} \Rightarrow \\ \Rightarrow p(\mathbf{x}) &= p_0 - \rho \phi(\mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (833)$$

V případě homogenního gravitačního pole  $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$  máme  $\phi = gz$  a tedy

$$p(z) = p_0 - g\rho z . \quad (834)$$

Vidíme, že v případě nestlačitelné tekutiny hydrostatický tlak je lineární funkcí rostoucí hloupkou  $(-z)$ .

**Isothermální ideální plyn** kde platí  $p = \frac{\kappa_B}{m} \rho T$ , kde  $T$  je konstantní. Pak dostáváme

$$\mathcal{P}_0 - \phi(\mathbf{x}) = \frac{\kappa_B}{m} T \int \frac{dp}{p} = \frac{\kappa_B}{m} T \ln p \quad (835)$$

a tedy

$$p(\mathbf{x}) = p_0 \exp\left(-\frac{m\phi(\mathbf{x})}{\kappa_B T}\right) . \quad (836)$$

Pro speciální případ  $\phi = gz$  dostaneme

$$p(z) = p_0 \exp\left(-\frac{z}{H}\right) , \quad H = \frac{\kappa_B T}{mg} . \quad (837)$$

### 5.4.3 Archimedův princip

Uvažujme nestlačitelnou tekutinu ve statistické rovnováze v homogenním gravitačním poli  $\mathbf{F} = (0, 0, -g)$ . Pak máme

$$p(z) = p_0 - g\rho z . \quad (838)$$

Předpokládáme, že pevné těleso o oběmu  $V$  a hmotnosti  $M$  je vnořeno do tekutiny a že toto těleso je v klidu vzhledem k této tekutině. Otázka je, jaká je výsledná síla, která působí na těleso?

Síla, kterou kapalina působí na povrch tělesa, která je důsledkem tlaku v tekutině je rovna

$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{povrch} &= - \oint_{\partial V} p d\mathbf{S} = - \oint_{\partial V} p(\mathbf{I}) \cdot d\mathbf{S} = \\
 &= - \int_V \nabla \cdot (p\mathbf{I}) d^3\mathbf{x} = - \int_V d^3\mathbf{x} \nabla p = -\mathbf{e}_z \int_V \frac{\partial p}{\partial z} d^3\mathbf{x} = \\
 &= \mathbf{e}_z \int_V g\rho d^3\mathbf{x} = g\rho V \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_z M_{tekut} g
 \end{aligned} \tag{839}$$

kde při transformaci povrchového integrálu na objemový integrál, jsme pole tlaku prodloužili i do oblasti, kterou zaujímá dané pevné těleso. Dále jsme použili vektorovou terminologii, kde  $\mathbf{I} = \delta^{ij}$  a kde  $\mathbf{e}_z$  je jednotkový vektor ve směru osy  $z$ .

Interpretace rovnice (839) je známý **Archimédův princip**: *Těleso, které je vnořeno do kapaliny, je nadnášeno silou, rovnající se tíze kapaliny stejného objemu jako je ponořená část tělesa.*

Dále na těleso působí gravitační síla o velikosti  $Mg$ , a tedy výsledná síla působící na těleso je rovna

$$\mathbf{F}_{vys} = -(M - M_{tekut})g\mathbf{e}_z . \tag{840}$$

## 5.5 Lagrangeovská forma hydrodynamických rovnic

Předchozí rovnice byly napsány jako rovnice pole, tedy vyjadrují změnu veličin, jako rychlost kapaliny, hustota a tlak v závislosti na jejich poloze a na časovém vývoji. Na druhou stranu je možné formulovat hydrodynamické rovnice, které mají podobnou strukturu jako klasické pohybové rovnice pro jednotlivé částice. Tyto pohybové rovnice jsou známy jako *Lagrangeovská formulace rovnic hydrodynamiky*. Abychom odvodili tuto formulaci pohybových rovnic zavedeme tzv. unášenou časovou derivaci

$$D_t \equiv \partial_t + v^i \partial_i . \tag{841}$$

Pomocí této derivace dostáváme, že rovnice spojitosti má tvar

$$D_t \rho = -\rho \nabla_i v^i . \tag{842}$$

Tato rovnice má následující fyzikální interpretaci, jenž nám říká, že malý element kapaliny mění svou hustotu za předpokladu, že pohyb kapaliny je konvergentní. Jinými slovy, komprese elementu kapaliny je dána výrazem  $-\partial_i v^i$ .

Podobným způsobem můžeme postupovat v případě Eulerových rovnic:

$$\partial_t v^i + \nabla_j v^i v^j = -\frac{1}{\rho} \delta^{ij} \nabla_j p - \partial^i \phi , \quad (843)$$

která s použitím unášivé časové derivace je rovna

$$D_t v^i = -\frac{1}{\rho} \delta^{ij} \nabla_j p - \partial^i \phi . \quad (844)$$

Opět tato rovnice má fyzikální interpretaci, která říká, že element kapaliny je urychlován silou, která je dána gradientem tlaku a také gradientem potenciálu objemové síly.

## 6 Lagrangeovský a Eulerovský popis tekutiny a jejich vzájemný vztah

Lagrangeovský popis tekutiny je založen na popisu dynamiky a souřadnic individuálních částic kapaliny. Tyto částice splňují Newtonovy pohybové rovnice, alespoň v jejich nerelativistickém případě. Na druhou stranu Eulerova formulace je založena na popisu, kdy tekutina je popsána hustotou  $\rho$ , rychlostí  $v^i$ , které jsou vzájemně svázány rovnicí spojitosti, zatím co Eulerovy rovnice popisují jejich dynamiku. Eulerova metoda je založena na pojmu pole, které má fundamentální význam v moderní teoretické fyzice.

Je velice užitečné studovat vztah mezi těmito dvěma popisy. Pro jednoduchost uvažujme částici, která má hmotnost  $m$  a je popsána pomocí souřadnicové funkce  $X^i(t)$ , jejíž časová závislost je dána rovnicí

$$\ddot{X}^i(t) = \frac{1}{m} F^i(X(t)) . \quad (845)$$

Toto je Lagrangeovský popis dynamiky částice, nyní napsaný v její Newtonské formě. Jako další krok zavedeme Eulerovu jedno-částicovou hustotu

(poznamenejme, že se nyní jedná o souřadnici teorie pole)

$$\rho(t, \mathbf{x}) = m\delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) \quad (846)$$

kde delta funkce znamená, že tato hustota je nenulová pouze v místě lokalizace částice. Když provedeme časovou derivaci této funkce, dostáváme

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) &= m \frac{\partial}{\partial X^i} \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) \dot{X}^i = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \left( \dot{X}^i(t) m \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) \right) = -\frac{\partial}{\partial x^i} [v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x})] \end{aligned} \quad (847)$$

kde Eulerova rychlost je definována jako

$$v^i(t, \mathbf{x}) = \dot{X}^i(t), \text{ pro } \mathbf{x} = \mathbf{X}(t). \quad (848)$$

Vidíme, že Eulerova rychlost je definována pouze v bodě, kde je daná částice lokalizována ( $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ ). Pak je jasné, že rovnice spojitosti má tvar

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) + \partial_i j^i(t, \mathbf{x}) &= 0, \\ j^i(t, \mathbf{x}) &= v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) = \dot{X}^i(t) m \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}). \end{aligned} \quad (849)$$

Abychom obdrželi Eulerovy rovnice, provedeme derivaci  $j^i$  vzhledem k času

$$\begin{aligned} \partial_t j^i(t, \mathbf{x}) &= \partial_t v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) + \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) v^i(t, \mathbf{x}) = \\ &= \ddot{X}^i(t) m \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) + \dot{X}^i m \frac{\partial}{\partial X^j} \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) \dot{X}^j(t) \end{aligned} \quad (850)$$

Nyní použijeme na levé straně rovnici spojitosti, zatím co na pravé straně pohybovou rovnici, čímž dostaneme

$$\begin{aligned} \partial_t v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) - v^i(t, \mathbf{x}) \partial_j (\rho(\mathbf{x}, t) v^j(\mathbf{x}, t)) &= \\ &= \ddot{X}^i(t) m \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) + \dot{X}^i(t) m \frac{\partial}{\partial X^j} \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) \dot{X}^j(t) = \\ &= F^i(\mathbf{X}(t)) \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \dot{X}^i(t) \dot{X}^j(t) m \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{x}) \right) \end{aligned} \quad (851)$$

S použitím (846) dostáváme, že tato rovnice má tvar Eulerovy rovnice (pro jednočásticovou kapalinu)

$$\partial_t v^i(t, \mathbf{x}) + v^i(t, \mathbf{x}) \partial_j v^j(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{m} F^i(t, \mathbf{x}) . \quad (852)$$

Přesněji řečeno, tato rovnice platí pouze v bodě  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$ . Na druhou stranu je možné provést vhodné prodloužení dané funkce z bodu  $\mathbf{x} = \mathbf{X}$  tak, že tato rovnice platí v celém prostoru.

Daný přístup je možné také provést v případě  $N$  částic, kde pohybová rovnice pro  $n$ -tou částici má tvar

$$\ddot{\mathbf{X}}_n(t) = \frac{1}{m_n} \mathbf{F}(\mathbf{X}_1(t), \dots, \mathbf{X}_n(t)) . \quad (853)$$

Protože předpokládáme, že všechny částice jsou identické, hmotnost částice  $m$  nenese index  $n$ . Dále, síla  $\mathbf{F}_n$  má funkcionální závislost na  $\mathbf{X}_n$  nezávislou na  $n$  a je symetrickou funkcí vzhledem k zbývajícím  $N - 1$  funkcím

$$\ddot{\mathbf{X}}_n(t) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{X}_n(t); \{\mathbf{X}_k(t), k \neq n\}) . \quad (854)$$

Eulerovská hustota hmoty, rychlost a tok jsou definovány jako

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= m \sum_{n=1}^N \delta(\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{x}) , \\ \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) = m \sum_{n=1}^N \dot{\mathbf{X}}_n(t) \delta(\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (855)$$

Je jasné, že funkce  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  je definována pouze v bodech  $\mathbf{x} = \mathbf{X}(t)$ . Je jasné, že odvození rovnice spojitosti a Eulerových rovnic je stejné, jako v případě jednočásticové situace studované výše.

Pro skutečnou formulaci tekutiny musíme přejít od diskrétního popisu ke spojitému. Toho dostaneme tím, že přejdeme od diskrétního symbolu  $n$  ke spojitému symbolu  $\mathbf{x}$  a tedy Lagrangeovská souřadnice  $\mathbf{X}_n(t)$  se stane funkcí  $\mathbf{X}(t, \mathbf{x})$ . Běžně se setkáváme s formulací, kdy  $\mathbf{x}$  je specifikována podmínkou, že popisuje souřadnici tekutiny  $\mathbf{X}$  v počátečním čase  $t = 0$

$$\mathbf{X}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{x} . \quad (856)$$

Je také užitečné nahlížet na funkci  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  z rozdílného úhlu pohledu. Je jasné, že oborem hodnot  $\mathbf{X}$  tak  $\mathbf{x}$  je prostor  $R^3$ . Tudíž můžeme interpretovat  $\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)$  jako zobrazení z  $R^3 \rightarrow R^3$ . Jestliže budeme předpokládat, že uvažujeme konservativní systémy, kdy se trajektorie částic nepřekrývají, pak dostáváme, že toto zobrazení je diffeomorfismus s tím, že existuje jeho inverzní zobrazení  $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)$  tak, že

$$\mathbf{X}(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)} = \mathbf{X} , \mathbf{x}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(\mathbf{X}, t)} = \mathbf{x} . \quad (857)$$

Dynamika částice je opět popsána pomocí Newtonovy pohybové rovnice

$$\ddot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(\mathbf{X}(t, \mathbf{x})) . \quad (858)$$

Hustota a rychlost jsou definovány jako

$$\begin{aligned} \rho(t, \mathbf{x}) &= \rho_0 \int d^D \mathbf{y} \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}) , \\ \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) &= \rho_0 \int d^D \mathbf{y} \dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}) . \end{aligned} \quad (859)$$

Hustota  $\rho_0$  je konstatní hustota hmoty, tak že objemový integrál funkce  $\rho(t, \mathbf{x})$  je celková hmotnost kapaliny. Samozřejmě předpokládáme, že funkce  $\mathbf{v}(t, \mathbf{x})$  je hladkou spojitou funkcí, což je fundamentální předpoklad v teorii kapalin.

Nyní odvodíme rovnici spojitosti a Eulerovu rovnici pro tyto hustoty a tok. Časová derivace hustoty dané (859) je rovna

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) &= \rho_0 \int d^D \mathbf{y} \dot{X}^i \frac{\partial \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x})}{\partial X^i} = \\ &= -\rho_0 \int d^D \mathbf{y} \dot{X}^i(t, \mathbf{y}) \frac{\partial \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x})}{\partial x^i} = \\ &= -\frac{\partial}{\partial x^i} \left[ \rho_0 \int d^D \mathbf{y} \dot{X}^i(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}) \right] = -\partial_i j^i(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (860)$$

čoř je rovnice spojitosti ve tvaru

$$\partial_t \rho(t, \mathbf{x}) + \text{div} \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) = 0 . \quad (861)$$

Co se týká Eulerových rovnic, postupujeme následovně

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{j}(t, \mathbf{x}) &= \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) + \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \partial_t \rho(t, \mathbf{x}) = \\ &= \int d^D \mathbf{y} \rho_0 (\ddot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}) + \dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \dot{X}^i(t, \mathbf{y}) \frac{\partial \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x})}{\partial x^i}) \end{aligned} \quad (862)$$

Nyní opět použijeme rovnici spjitosti na levé straně, zatím co na pravé straně použijeme pohybovou rovnici, čímž dostáváme

$$\begin{aligned} & \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \operatorname{div}(\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x})) = \\ &= \int d^D \mathbf{y} \rho_0 (\ddot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}) + \dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \dot{X}^i(t, \mathbf{y}) \frac{\partial \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x})}{\partial X^i}) = \\ &= \int d^D \mathbf{y} \rho_0 (\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^i} \int d^D \mathbf{y} \rho_0 \dot{\mathbf{X}}(t, \mathbf{y}) \dot{X}^i(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x})) = \end{aligned} \quad (863)$$

Nyní definujeme sílu jako

$$\frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) = \frac{\rho_0}{m} \int d^D \mathbf{y} (\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) \delta(\mathbf{X}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{x})) \quad (864)$$

tak, že pravá strana má tvar

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) - \frac{\partial}{\partial x^i} [\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x})] = \\ &= \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) - \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \frac{\partial}{\partial x^i} [v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x})] - \partial_i \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) v^i(t, \mathbf{x}) \rho(t, \mathbf{x}) \end{aligned} \quad (865)$$

Porovnáním levé a pravé strany dostáváme Eulerovy rovnice ve tvaru

$$\partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + v^i(t, \mathbf{x}) \partial_i \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) = \frac{1}{m} \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) . \quad (866)$$

Je nutné ale vysvětlit definici síly dané v této rovnici. Pro vnější síly je  $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$  je známá síla, která je funkcí pouze  $\mathbf{x}$ . Na druhou stranu, jestliže vezmeme do úvahy možnost, že tato síla také závisí na vnitřní struktuře kapaliny, pak tato síla může být nelokální síla závislá na distribuci částic kapaliny. Budeme tedy postulovat, že mezi částicové síly jsou krátko dosahové a tudíž závisí pouze

na distribuci částic bezprostředně sousedících s danou částicí. Pro takové síly,  $\mathbf{F}$  závisí pouze na hustotě částic a jejich derivací v bodě  $\mathbf{x}$ . Poté je jasné, že tato síla je dána gradientem tlaku v bodě  $\mathbf{x}$ , takže nahradíme pravou stranu výrazem  $-\frac{1}{\rho}\nabla p$ , kde  $p$  je tlak. Poté, je-li dána stavová rovnice mezi tlakem a hustotou  $p = p(\rho)$ , dostáváme následující uzavřený systém rovnic

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(r, \mathbf{x}) + \nabla(\mathbf{v}(t, \mathbf{x})\rho(r, \mathbf{x})) &= 0, \\ \partial_t \mathbf{v}(t, \mathbf{x}) + (\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) \cdot \nabla)\mathbf{v}(t, \mathbf{x}) &= -\frac{1}{\rho}\nabla p(\rho). \end{aligned} \tag{867}$$

Jak již víme z předchozích kapitol, tyto rovnice popisují ideální tekutinu.

## 6.1 Lagrangián a Hamiltonián pro mechaniku tekutin

Jak již víme, pro popis tekutiny máme dva druhy popisů: První, známý jako Eulerovský, používá prostorově závislé pole rychlostí, hustoty a některých termodynamických proměnných. Na druhou stranu Lagrangeovský popis používá souřadnice částice  $X^i(\xi^i, t)$ , kde  $\xi^i$  označuje souřadnice částice v čase  $t = 0$ . Tyto počáteční souřadnice, stejně, jako souřadnice  $X^i(\xi^i, t)$  vyplňují stejnou oblast  $D \subseteq R^d$ . Jestliže uvažujeme pouze konservativní systémy, kde trajektorie různých částic se neprotínají, pak je jasné, že funkce  $X^i = (\xi^i, t)$  definují diffeomorphismus z  $D \subseteq R^d$  a také, že existuje inverzní funkce  $\xi^i(X^i, t)$ , která splňuje následující podmínky:

$$X^i(\xi^j, t)|_{\xi^i=\xi^i(t, X^j)} = X^i, \quad \xi^i(X^j, t)|_{X=X(\xi, t)} = \xi^i. \tag{868}$$

Prostorová hustota částic v čase  $t$  je rovna

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int d^d \xi \rho_0(\xi) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(t, \xi)). \tag{869}$$

kde  $\rho_0(\xi)$  je počáteční hustota v čase  $t = 0$ . Pole rychlosti  $\mathbf{v}$ , jako funkce  $\mathbf{x}, t$

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \dot{\mathbf{X}}(\xi^i(\mathbf{x}, t), t) \tag{870}$$

kde  $\xi^i$  je inverzní funkce daná v (868). Tuto funkci můžeme také přepsat do tvaru

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\int d^d \xi \rho_0(\xi) \dot{\mathbf{X}}(\xi, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t))}{\int d^d \xi \rho_0(\xi) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t))} \tag{871}$$



nebo ekvivalentně

$$\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \int d^d\xi \rho_0(\xi)\dot{\mathbf{X}}(\xi, t)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) . \quad (872)$$

Abychom viděli ekvivalenci mezi (870) a (871) provedeme integraci přes  $\xi$  v (871) dostaneme  $\xi = \xi(\mathbf{x}, t)$ , jak vyplývá z definice zobrazení (868).

Je opět jednoduché najít rovnici kontinuity v tomto popisu. Když vezmeme časovou derivaci hustoty definované v (869) podle času dostaneme

$$\begin{aligned} \partial_t \rho(\mathbf{x}, t) &= \int d^d\xi \rho(\xi) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) = \\ &= - \int d^d\xi \rho_0(\xi) \dot{\mathbf{X}}(\xi, t) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) = \\ &= - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left( \int d^d\xi \rho_0(\xi) \dot{\mathbf{X}}(\xi, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) \right) = - \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\rho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) \end{aligned} \quad (873)$$

Nyní přejdeme k Lagrangeovské formulaci hydrodynamiky. S použitím souřadnic  $\mathbf{X}(\xi, t)$  jako konfiguračních proměnných můžeme uvažovat nejjednodušší možnost jak popsat pohyb tekutiny pomocí Lagrangiánu

$$L = \int d^d\xi \left( \frac{m}{2} \dot{\mathbf{X}}^2(\xi, t) - \mathcal{V}(\mathbf{X}) \right) , \quad (874)$$

kde  $\mathcal{V}(\mathbf{X})$  je potenciál, jehož specifický tvar odvodíme níže. Pak s pomocí tohoto Lagrangiánu můžeme lehce najít pohybové rovnice pro kapalinu v Lagrangeovské formulaci, když provedeme variaci vzhledem k  $\mathbf{X}$

$$m\ddot{\mathbf{X}}(\xi) = - \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta \mathbf{X}(\xi)} = \mathbf{F}(\mathbf{X}(\xi)) , \quad \mathbf{F}(\mathbf{X}(\xi)) = -\nabla \mathcal{V}(\mathbf{X}(\xi)) . \quad (875)$$

Je také zřejmé, že je možné jednoduše přejít k Hamiltonovské formulaci tekutiny. Zavedeme-li združené impulsy

$$\mathbf{P}(\xi) = m\dot{\mathbf{X}}(\xi) \quad (876)$$

pak můžeme jednoduše najít odpovídající Hamiltonián

$$H = \int d^d\xi \left( \mathbf{P}(\xi)\dot{\mathbf{X}} - L \right) = \int d^d\xi \left( \frac{1}{2m} \mathbf{P}^2(\xi) + \mathcal{V}(\mathbf{X}(\xi)) \right) . \quad (877)$$

Fundamentálním objektem v kanonickém formalismu jsou následující Poissonovy závorky

$$\{X^i(\xi), P_j(\xi')\} = \delta_i^j \delta(\xi - \xi') . \quad (878)$$

Vidíme, že fázový prostor tekutiny je dán proměnnými

$$X^i(\xi, t), P_i(\xi, t) . \quad (879)$$

Nyní přejdeme k detailnímu popisu potenciálu  $\mathcal{V}$ . Jak víme, funkce  $\mathbf{X}(\xi, t)$  definují diffeomorfismus na prostoru  $R^3$ . Pak je jasné, že matice

$$A_k^j(\xi, t) = \frac{\partial X^j(\xi, t)}{\partial \xi^k} \quad (880)$$

je negenerativní pro libovolné  $\xi^i$  a  $t$ . Necht' nyní uvažujeme následující potenciál

$$\mathcal{V}(\mathbf{X}) = f(\det A(\xi(\mathbf{X}, t), t)) . \quad (881)$$

Variace tohoto potenciálu je rovna

$$\begin{aligned} \int d^d \xi \frac{\delta \mathcal{V}}{\delta X^i} &= f'(\det A) \frac{\delta \det A}{\delta X^i} = \int d^d \xi f'(\det A) \frac{\delta A_l^k}{\delta X^i} (A^{-1})_k^l \det A = \\ &= - \int d^d \xi \frac{\partial}{\partial \xi^l} ((A^{-1})_i^k \det A f'(\det A)) \end{aligned} \quad (882)$$

Pak je jasné, že pohybové rovnice v Lagrangovské formulaci mají tvar

$$m \ddot{X}_i(\xi, t) - \frac{\partial}{\partial \xi^k} ((A^{-1})_i^k(\xi, t) f'(\det A) \det A) = 0 . \quad (883)$$

Abychom našli pohybové rovnice v Eulerovské formulaci uvažujme časovou derivaci následujícího výrazu

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)) &= \int d^d \xi \rho_0(\xi) \ddot{\mathbf{X}}(\xi, t) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) + \\ &+ \int d^d \xi \rho_0(\xi) \dot{\mathbf{X}}(\xi, t) \frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) . \end{aligned} \quad (884)$$

S použitím následujícího výrazu

$$\frac{\partial}{\partial t} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) = - \frac{\partial \mathbf{X}(\xi, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) \quad (885)$$

a dále s použitím pohybové rovnice (883) dostáváme

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\rho(\mathbf{x}, t)v^i(\mathbf{x}, t)) + \frac{\partial}{\partial x^k}(\rho(\mathbf{x}, t)v^i(\mathbf{x}, t)v^k(\mathbf{x}, t)) = \\ & = \int d^d\xi \frac{\rho_0(\xi)}{m} \frac{\partial}{\partial \xi^k} ((A^{-1})_i^k(\xi, t)f'(\det A) \det A) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) . \end{aligned} \quad (886)$$

Nyní použijeme následující úpravu

$$\begin{aligned} & \int d^d\xi \frac{\rho_0(\xi)}{m} \frac{\partial}{\partial \xi^k} ((A^{-1})_i^k(\xi, t)f'(\det A) \det A) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) = \\ & = -\frac{1}{m} \int d^d\xi \frac{\partial}{\partial \xi^k} (\rho_0(\xi)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t))) (A^{-1})_i^k(\xi, t)f'(\det A) \det A = \\ & = -\frac{1}{m} \int d^d\xi \frac{\partial}{\partial \xi^k} \rho_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) (A^{-1})_i^k(\xi, t)f'(\det A) \det A + \\ & \quad + \frac{1}{m} \int d^d\xi \rho_0 \frac{\partial \mathbf{X}^l}{\partial \xi^k} (A^{-1})_i^k \partial_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) f'(\det A) \det A = \end{aligned} \quad (887)$$

Nechť nyní předpokládejme, že máme počáteční homogenní rozložení hustoty částic  $\rho_0(\xi) = \text{const}$ . Budeme také normalizovat tuto hustotu tak, že je rovna  $\rho_0(\xi) = 1$ , což odpovídá efektivně jedné částici v elementárním objemu. Pak první integrál daný v (887) je roven nule. Konečně když použijeme

$$\frac{\partial \mathbf{X}^l}{\partial \xi^k} (A^{-1})_i^k = A_k^l (A^{-1})_i^k = \delta_i^l \quad (888)$$

dostaneme

$$\begin{aligned} & \frac{1}{m} \int d^d\xi \rho_0 \frac{\partial \mathbf{X}^l}{\partial \xi^k} (A^{-1})_i^k \partial_l \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) f'(\det A) \det A = \\ & = \frac{1}{m} \int d^d\xi \rho_0 \frac{\partial}{\partial x^i} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}) f'(\det A) \det A = \\ & = \frac{1}{m} \partial_i \int d^d\xi \rho_0 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{X}(\xi, t)) f'(\det A) \det A = \frac{1}{m} \partial_i f'(\det A)|_{\xi^i = \xi^i(x, t)} \end{aligned} \quad (889)$$

kde faktor  $\det A$  se vyruší z faktorem  $\frac{1}{\det A}$  vystupující při výpočtu delta funkce.

Kombinací těchto výsledků dostaneme pohybovou rovnici

$$m\rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) v_j(\mathbf{x}, t) - \frac{\partial}{\partial x^j} (f'(\det A(\xi, t))|_{\xi^i = \xi^i(x, t)}) = 0 \quad (890)$$

Je zřejmé, že když identifikujeme  $-\frac{1}{m}f'(\det A(\xi, t))|_{\xi^i = u^i(x, t)}$  s tlakem  $p(\mathbf{x}, t)$  rovnice (890) má tvar Eulerovy rovnice

$$\rho(\mathbf{x}, t) \left( \frac{\partial}{\partial t} + v^k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial}{\partial x^k} \right) v^i(\mathbf{x}, t) = -\frac{\partial}{\partial x^i} p(\mathbf{x}, t) . \quad (891)$$

Je dobré zdůraznit, že tlak  $p(\mathbf{x}, t)$ , který vystupuje v této rovnici, není vyvolán vnější silou ale je důsledkem interakcí mezi částicemi. Důležité je ale zdůraznit následující fakt, Navier-Stokesova rovnice nemůže být určena z variačního principu, jinými slovy není možné najít odpovídající Lagrangian. Toto vyplývá ze skutečnosti, že Navier-Stokesova rovnice obsahuje disipativní část, která není časově symetrická. Poznamenejme, že je také nemožné najít Lagrangeovskou formulaci pro disipativní síly v klasické fyzice.

## 7 Viskozní kapalina

V kapitole týkající se mikroskopické formulaci teorie tekutin jsem odvodili následující formu tensoru tlaku

$$P_{ij} = p\delta_{ij} + \pi_{ij} , \quad (892)$$

kde  $\pi_{ij}$  je tensor s nulovou stopou, který lineárně závisí na  $\Lambda_{ij} = \frac{1}{2}(\partial_i v_j + \partial_j v_i)$ . V případě ideální tekutiny máme, že  $\pi_{ij} = 0$ . Na druhou stranu víme, že tento předpoklad vede k nefyzikálním výsledkům. Pokusíme se nyní určit fyzikální význam tohoto tensoru čistě pomocí makroskopických úvah.

Ze zkušenosti víme, že v reálné tekutině existuje vnitřní tření. Toto tření je známé jako **Viskozita kapaliny** působí proti relativnímu pohybu sousedících vrstev tekutiny. Uvažujme tekutinu, kde její vrstvy v  $xz$  rovině se pohybují ve směru osy  $x$ . Pro pole rychlosti se smykem je známo, že vrstvy, které se pohybují menší rychlostí  $v_x$  a které jsou položeny níže pod danou vrstvou  $xz$ , budou působit proti pohybu této vrstvy  $xz$ , která je položena výše. Na druhou stranu toto platí i naopak, že tedy vrstva s položená výše a která se pohybuje vyšší rychlostí urychluje níže položenou vrstvu. Vidíme tedy, že tato síla musí působit ve směru osy  $x$  aby způsobovala změnu rychlosti. Na

druhou stranu je jasné, že musí působit podél celé roviny  $xz$ . Víme, že síla podél elementu plochy s normálou  $n^i$  je rovna

$$(dF_{povrch})_i = -P_{ij}n_j dS = -pdS_i - \pi_{ij}dS_j . \quad (893)$$

Protože tato síla musí působit podél roviny  $xz$ , normála je dána vektorem  $n^y$  a protože tato síla má komponentu ve směru osy  $x$  je zřejmé, že tato síla je způsobena komponentou tensoru  $\pi_{xy}$ . Tato síla je rostoucí funkcí gradientu rychlosti, to znamená musí být úměrná  $\frac{\partial v_x}{\partial y}$ . Tento předpoklad vedl Newtona k formulaci smykové síly ve tvaru

$$\pi_{xy} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} , \quad (894)$$

kde  $\mu$  je koeficient viskozity. Tekutiny, pro které platí tento vztah mezi tensorem smyku a gradientem rychlosti jsou známy jako **Newtonovské tekutiny**.

Jak bude vyplývat z následující úvahy, tensor smyku musí mít komplikovanější tvar než ten, který je uveden výše. Toto můžeme názorně demonstrovat na případu rotaci tekutiny jako pevného tělesa. Uvažme těleso rotující s úhlovou rychlostí  $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ , což vede k následujícím komponentům rychlosti

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x} = (-y\Omega, x\Omega, 0) . \quad (895)$$

Pak jasně dostaneme

$$\pi_{xy} = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} = \mu\Omega \quad (896)$$

kteří je nenulový ačkoliv můžeme předpokádat, že zde neexistuje smyk v případě rotace tekutiny jako rotace tuhého tělesa. Na druhou stranu dostáváme, že  $\mu(\partial_y v_x + \partial_x v_y) = 0$ . Obecně můžeme psát

$$\frac{\partial v^i}{\partial x^j} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} - \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) = \Lambda_{ij} + \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \omega_k , \quad (897)$$

kde  $\omega_k = \epsilon_{krs} \partial_r v_s$  je vířivost. Vidíme, že  $\Lambda_{ij}$  vyjadřuje deformaci, zatím co druhý člen odpovídá rotaci. Z tohoto důvodu tensor smyku pro Newtonovské kapaliny by měl raději záviset na symetrické části gradientu rychlosti, což je  $\Lambda_{ij}$ , než na samotném gradientu rychlosti. Nechť tedy uvažujeme nejobecnější formu tensoru druhého řádu, který je lineární funkcí symetrické kombinaci gradientu rychlosti

$$a \left( \frac{\partial v^i}{\partial x^j} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right) + b \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \delta^{ij} = 2a\Lambda^{ij} + b\Lambda^{kk} \delta^{ij} . \quad (898)$$

Poté můžeme tedy napsat nejobecnější formu tensoru tlaku ve tvaru

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - 2\mu \left( \Lambda_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\Lambda_{kk} \right) - \zeta\Lambda_{kk}\delta_{ij} = \left( p - \zeta\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \delta_{ij} - \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3}\delta_{ij}\frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \quad (899)$$

což můžeme napsat v ekvivalentním tvaru

$$P_{ij} = \bar{p}\delta_{ij} + \pi_{ij}, \quad \bar{p} = p - \zeta\text{Tr}\Lambda, \quad \pi_{ij} = -2\mu\left(\Lambda_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\text{Tr}\Lambda\right). \quad (900)$$

Zde  $\pi_{ij}$  je bezstopý tensor viskozního napětí způsobený rychlostním smykem. Koeficient  $\mu$  je koeficient dynamické viskozity. Na druhou stranu první člen je roven

$$\bar{p} = \frac{1}{3}P_{kk} = p - \zeta\partial_i v^i = p + \zeta\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}, \quad (901)$$

kde jsme použili rovnici spojitosti

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v^i}{\partial x^i} + v^i\frac{\partial\rho}{\partial x^i} = 0 \Rightarrow \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = -\frac{1}{\rho}\frac{d\rho}{dt}. \quad (902)$$

Koeficient  $\zeta$  je znám jako koeficient objemové viskozity, který je způsoben viskozními silami odpovědné za objemové deformace. Ukazuje se, že objemová viskozita je důležitá pouze v případě, kdy stlačitelnost tekutiny je důležitá, například v případě rázových vln.

Nyní bychom rádi ukázali alternativní postup, které vede k formulaci dynamiky viskozní tekutiny. Tento postup je založen na efektu disipace energie během pohybu tekutiny na samotný pohyb dané tekutiny. Tento proces je výsledkem termodynamické nevratnosti, který vždy existuje v reálné tekutině a je výsledkem vnitřního tření a teplotní konduktce.

Abychom formulovali pohyb viskozní tekutiny, je nutné dodat další členy do pohybové rovnice pro ideální tekutinu. Je jasné, že rovnice spojitosti musí platit pro libovolnou tekutinu, buď viskozní, nebo ideální. Na druhou stranu Eulerova rovnice musí být modifikována.

Poznamenejme, že Eulerova rovnice může být zapsána ve tvaru (bez vnějších sil)

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho v_i) = -\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \quad (903)$$

kde  $\Pi_{ij}$  je hustota toku hybnosti, která má tvar

$$\Pi_{ik} = p\delta_{ik} + \rho v_i v_k. \quad (904)$$

Abychom dokázali, že (903) vede k Eulerovým rovnicím, dosadíme (904) do (903), tak dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\partial_i p - \partial_k v_i v_k \rho - v_i \partial_k (\rho v_k) \Rightarrow \\ -\partial_k (\rho v_k) v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} &= -\partial_i p - \partial_k v_i v_k \rho - v_i \partial_k (\rho v_k) \Rightarrow \\ \frac{\partial v_i}{\partial t} + \partial_k v_i v_k &= -\frac{1}{\rho} \partial_i p \end{aligned} \quad (905)$$

kde jsme v prvním kroku použili rovnici spojitosti.

Pohybové rovnice pro viskozni tekutinu mohou být tedy určeny z rovnice (903), kde provedeme modifikaci její pravé strany. Jinými slovy musíme zavést dodatečné členy do  $\Pi_{ij}$ , které vezmou do úvahy efekt viskozniho přenosu hybnosti v tekutině. Budeme tedy psát

$$\Pi_{ij} = p\delta_{ij} + \rho v_i v_j - \sigma'_{ij} = -\sigma_{ij} + \rho v_i v_j . \quad (906)$$

Formu tensoru  $\sigma'_{ij}$  je možné určit pomocí následujících úvah. Proces vnitřního tření vzniká za předpokladu, když rozdílné částice tekutiny se pohybují rozdílnými rychlostmi. Pak je zřejmé, že  $\sigma'_{ij}$  může být funkcí pouze prostorových derivací rychlosti. Jestliže také jsou tyto derivace malé, může předpokládat, že viskozni transfer hybnosti závisí pouze na prvních derivacích rychlosti. Vidíme, že  $\sigma'_{ij}$  nemůže obsahovat členy, které nezávisí na  $\partial_i v_j$ , neboť  $\sigma'_{ij}$  musí být roven nule pro  $\mathbf{v} = \text{const}$ . V případě rovnoměrného rotačního pohybu můžeme použít stejné argumenty, jako jsme použili v předchozí diskuzi. Pak je jasné, že  $\sigma'_{ik}$  má tvar

$$\sigma'_{ij} = \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \zeta \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} . \quad (907)$$

kde koeficienty  $\mu, \zeta$  nezávisí na rychlosti, ale mohou záviset na souřadnicích, případně jiných termodynamických veličin.

Je možné ukázat, že koeficienty  $\mu$  a  $\zeta$  musí být kladné

$$\mu > 0 , \quad \zeta > 0 . \quad (908)$$

Nyní, když jsme odvodili tvar tensoru toku hybnosti, můžeme jednoduše určit pohybové rovnice pro viskozni tekutinu, když dosadíme (906) spolu s (907)

do (903), což nám dává

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \right) &= -\partial_i p + \partial_j \sigma'_{ij} = \\ &= -\partial_i p + \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \zeta \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right) \end{aligned} \quad (909)$$

Toto je nejobecnější forma viskozí tekutiny. Koeficienty  $\mu, \zeta$  jsou funkcemi tlaku a teploty, které obecně nejsou konstantní, a tudíž tyto veličiny nemohou být vyneseny mimo parciální derivace. Na druhou stranu v mnoha případech koeficienty viskozity mohou být brány jako konstanty. Poté rovnice (909) má tvar

$$\rho \left( \frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} v_k \right) = -\partial_i p + \mu \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) + \left( \zeta + \frac{1}{3} \mu \right) \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \frac{\partial v^k}{\partial x^k} \right) \quad (910)$$

Toto je slavná, *Navier-Stokesova rovnice*. Ukazuje se také, že v mnoha případech je možné uvažovat tekutinu jako nestlačitelnou  $\partial_i v^i = 0$ , a tedy poslední člen na pravé straně (910) je roven nule. Pak rovnice (910) se zjednoduší do tvaru

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \partial_j v_i = -\frac{1}{\rho} \partial_i p + \nu \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right), \quad (911)$$

kde  $\nu$  je **koeficient kinematické viskozity**

$$\nu = \frac{\mu}{\rho}. \quad (912)$$

### 7.0.1 Porovnání Navier-Stokes a Eulerovy rovnice

Je užitečné provnat Navier-Stokesovu rovnici (Budeme uvažovat její zjednodušenou formu danou rovnicí (911)) s Eulerovou rovnicí. Vidíme, že tyto rovnice se odlišují pouze dodatečným členem v Navier-Stokesově rovnici  $\nu \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^k} \right)$ , který ovšem kompletně změní fyzikální podstatu teorie. Tento dodatečný člen obsahuje prostorové derivace druhého řádu, zatím co Eulerova rovnice obsahuje derivace prvního řádu. Vidíme tedy, že potřebujeme více hraničních podmínek, abychom našli řešení N-S rovnice, než v případě Eulerovy rovnice. V případě Eulerovy rovnice, běžná hraniční podmínka říká,



že komponenta rychlosti, kolmá na zafixovanou pevně danou hraniční plochu, je rovna nule. Tato podmínka pak vede k jednoznačnému řešení.

Na druhou stranu N-S rovnice, která obsahuje prostorové derivace druhého řádu, dovoluje uložit podmínku  $\mathbf{v} = 0$  na pevných hranicích, což je charakteristická podmínka pro viskozni tekutinu. Tato podmínka má hluboký fyzikální význam, protože dovoluje studovat efekt tření tekutiny na tělesa vnořená do ní.

Otázka je proč hraniční podmínka  $\mathbf{v} = 0$  na hranicích je ta správná. Můžeme podat následující fyzikální vysvětlení. Víme, že jistě existují přitažlivé síly, mezi molekulami tekutiny a molekulami, které tvoří povrch ohraničující danou tekutinu. Tyto síly mají za následek, že vrstva tekutiny, která přiléhá k danému povrchu se nemůže pohybovat a tedy je v klidu. Tudiž je přirozené položit hraniční podmínku  $\mathbf{v} = 0$  na hranici.

### 7.0.2 Rovnice pro vířivost pro viskozni tekutiny

V případě, že provedeme rotaci N-S rovnice, dostaneme rovnici pro vířivost ve tvaru

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \omega) + \nu \nabla^2 \omega , \quad (913)$$

kde

$$\nabla^2 = \frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^i} . \quad (914)$$

Jako další krok zavedeme **Cirkulaci** definovanou jako

$$\Gamma(\mathcal{C}) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} , \quad (915)$$

kde  $\mathcal{C}$  je uzavřená materiální křivka, t.j. křivka protínající sousední elementy tekutiny a která sleduje jejich pohyb. Pomocí Stokesova věty můžeme napsat

$$\Gamma(\mathcal{C}) = \oint \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{S} = \int_S \omega \cdot d\mathbf{S} = \Gamma(S(t), t) , \quad (916)$$

kde  $S$  je libovoný povrch, který je ohraničen  $\mathcal{C}$ . Tedy, cirkulace je rovna toku vířivosti.

S pojmem cirkulace je spojen následující teorém, známý jako **Kelvinův teorém**. Tento teorém v případě ideální tekutiny říká, že

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \lim_{t_1 \rightarrow t} \frac{\Gamma(S_1, t_1) - \Gamma(S, t)}{t_1 - t} = 0 . \quad (917)$$

Nyní vysvětlíme význam jednotlivých pojmů. Význam  $S$  je zřejmý a není to nic jiného než libovolný povrch v kapalině, který je ohraničen křivkou  $\mathcal{C}$ . Pak povrch  $S_1$  je tvořen body tekutiny, které se vyvíjejí pomocí svých dynamických rovnic z bodů na ploše  $S$ .

Nyní provedeme důkaz tohoto teoremu. Nechť máme vektorové pole  $\mathbf{Q}$ , které splňuje rovnici

$$\operatorname{div} \mathbf{Q} = 0 . \quad (918)$$

Nechť toto pole splňuje pohybovou rovnici

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q}) . \quad (919)$$

A konečně definujme  $\Gamma = \int_S \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S}$  a počítejme

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \lim_{\delta t \rightarrow 0} = \frac{\Gamma(S_1, t_1) - \Gamma(S, t)}{\delta t} , t_1 = t + \delta t . \quad (920)$$

Pak máme

$$\begin{aligned} \Gamma(S_1, t_1) &= \int_{S_1} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t + \delta t) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} [\mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) + \delta t \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t)] \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \int_{S_1} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} + \delta t \int_S \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} + O(\delta t^2) . \end{aligned} \quad (921)$$

Pak máme

$$\begin{aligned} &\frac{\Gamma(S_1, t + \delta t) - \Gamma(S, t)}{\delta t} = \\ &= \frac{1}{\delta t} \left[ \int_{S_1} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} + \int_S \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t)(-d\mathbf{S}) \right] + \int \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} , \\ [ \ ] &= \oint_{\partial V} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} - \int_{CC_1} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \int_V d^3\mathbf{x}(\operatorname{div} \mathbf{Q} - \int_{CC_1} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S}) = - \int_{CC_1} \mathbf{Q}(\mathbf{x}, t) \cdot d\mathbf{S} , \end{aligned} \quad (922)$$

kde  $V$  je objem, jehož hranice  $\partial V$  je dána následujícím sjednocením

$$\partial V = S_1 \cup S \cup CC_1 \quad (923)$$

Jinými slovy povrch  $CC_1$  je vytvořen body na křivce, která se pohybuje ze své počáteční konfigurace  $C$  do konfigurace  $C_1$ , přičemž body sledují své pohybové rovnice. Poznamenejme také, že při přechodu z druhého na třetí řádek v (922) jsme nejdříve použili Gaussovu větu a pak jsme využili předpokladu (918). Pro další postup je důležité si uvědomit, že normální vektor k ploše  $CC_1$  je dán

$$d\mathbf{S} = -\delta t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{l} , \quad (924)$$

kde  $d\mathbf{l}$  je drahový element definovaný na křivce  $S$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{CC_1} \mathbf{Q} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{CC_1} \mathbf{Q} \cdot (-\delta t \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{l}) = \\ &= \delta t \oint_C (\mathbf{v} \times \mathbf{Q}) \cdot d\mathbf{l} = \delta t \oint_S [\nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q})] \cdot d\mathbf{S} \end{aligned} \quad (925)$$

kde jsme také využili vlastnosti vektorového součinu

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) , \quad \mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A} \quad (926)$$

pro libovolné vektory  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ . S použitím (925) pak dostaneme

$$\frac{d\Gamma}{dt} = \int_S \left[ \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{Q}) \right] \cdot d\mathbf{S} . \quad (927)$$

Konečně s použitím (919) nám předchozí rovnice říká, že

$$\frac{d\Gamma}{dt} = 0 . \quad (928)$$

### Rozvětvení Kelvinova teorému-Helmholyovy teorémy

Tyto teorémy přímo vyplývají z Kelvinova teorému. Před tím, než provedeme jejich formulaci, musíme zadefinovat pojem **virové trubice**, což jsou trubice tvořeny ze svazků křivek, jejichž tečny jsou vektory  $\omega$ . Pak z předchozí diskuse je jasné, že tok vířivosti přes plochu trubice je konstantní a roven cirkulaci podél uzavřené křivky, která ohraničuje danou trubici. Helmholyovy teorémy pak říkají

- Cirkulace se zachovává s časem.
- Virové čáry se pohybují v tekutině, aniž by docházelo k jejich vzniku a zániku.

- Díky identitě  $\text{div}\boldsymbol{\omega} = 0$  platí, že křivky vířivosti a trubice musí mít tvar uzavřených křivek nebo být nekonečně dlouhé či začínají nebo končí na pevných hranicích, které vymezují tekutinu.

Nyní se vrátíme k problematice viskozní tekutiny, přesněji řečeno ke studiu chování vířivosti. V tomto případě časová závislost cirkulace je rovna

$$\begin{aligned} \frac{d\Gamma(t)}{dt} &= \int_S \left[ \frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t} - \nabla \times (\mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}) \right] \cdot d\mathbf{S} = \\ &= \nu \int_S (\nabla^2 \boldsymbol{\omega}) \cdot d\mathbf{S} = \nu \oint_C (\nabla^2 \mathbf{v}) \cdot d\mathbf{l} \end{aligned} \quad (929)$$

kde poslední rovnost platí pro nestlačitelnou tekutinu. Vidíme tedy, že konečná viskozita vede ke vzniku a také k možnému zániku vírů. Například, při pohybu tyče ve vodě vidíme, že se za ní tvoří víry. Z předchozí diskuze je zřejmé, že toto je pouze možné za předpokladu nenulové viskozity kapaliny.

Poznamenejme také, že i v případě nestlačitelné viskozní tekutiny je energetická rovnice prebytečná.

### 7.0.3 Disipace energie v případě nestlačitelné tekutiny

Existence viskozity má za následek disipaci energie, která se přeměňuje na teplo. Pro jednoduchost se omezíme na případ nestlačitelné tekutiny kde  $\rho = \rho_0$ .

Uvažujme kinetickou energii pro nestlačitelnou tekutinu

$$E_{kin} = \frac{\rho_0}{2} \int d^3\mathbf{x} v^2 . \quad (930)$$

Nyní vezmeme časovou derivaci této kinetické energie

$$\frac{dE_{kin}}{dt} = \rho_0 \int d^3\mathbf{x} v_i \partial_t v^i \quad (931)$$

Výjdeme z N-S rovnice pro nestlačitelnou tekutinu ve tvaru

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k} . \quad (932)$$

Pak  $\rho_0 \partial_t v_i v^i$  je rovno následujícímu výrazu

$$\begin{aligned} \rho_0 \partial_t v_i v^i &= -\rho_0 \frac{1}{2} v_k \frac{\partial}{\partial x^k} v^2 - \frac{\partial}{\partial x^k} v^k + \frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x^k} v^i = \\ &= -\partial_k [\rho_0 v_k (\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho_0}) - v_i \sigma'_{ik}] - \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (933)$$

kde jsme využili skutečnosti, že v případě nestlačitelné tekutiny platí  $\partial_k v^k = 0$ .

Vidíme, že výraz v závorce je tok hustoty energie, kde  $\rho \mathbf{v} (\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho})$  je tok energie zprostředkovaný skutečným transportem hmoty a je stejný jako tok energie v případě ideální nestlačitelné tekutiny. Druhý člen, daný jako  $v^i \sigma'_{ij}$  je tok energie zprostředkovaný vnitřním třením.

Nyní, když provedeme integraci (933) přes objem, dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V d^3 \mathbf{x} \frac{1}{2} \rho v^2 = - \oint_{\partial V} \left[ \rho_0 v_k (\frac{1}{2} v^2 + \frac{p}{\rho_0}) - v_i \sigma'_{ik} \right] n^k dS - \int_V d^3 \mathbf{x} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k}. \quad (934)$$

První člen na pravé straně udává změnu energie díky toku energie přes povrch, který ohraničuje  $V$ . Na druhou stranu druhý člen udává úbytek kinetické energie za jednotku času díky disipativním silám.

Jestliže předpokládáme, že je možné rozšířit integraci na celý objem tekutiny, pak povrchový integrál je roven nule, buď z důvodu, že uvažujeme nekonečně velkou integrační oblast a pak předpokládáme, že rychlost je nulová na nekonečně vzdálené ploše, nebo uvažujeme tekutinu ohraničenou pevným povrchem, kde ale povrchový integrál je roven nule díky hraničním podmínce  $\mathbf{v} = 0$ . Pak dostaneme výraz pro disipaci energie za jednotku času v celém objemu

$$\dot{E}_{kin} = - \int d^3 \mathbf{x} \sigma'_{ik} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = - \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{x} \sigma'_{ik} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \quad (935)$$

díky faktu, že tensor  $\sigma'_{ij}$  je symetrický. V případě nestlačitelné kapaliny dostaneme

$$\dot{E}_{kin} = - \frac{1}{2} \mu \int d^3 \mathbf{x} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (936)$$

Protože disipace vede k úbytku mechanické energie, vidíme z předchozího výrazu, že  $\mu$  musí být kladné číslo.

#### 7.0.4 Couettův tok

Uvažujme nestlačitelnou tekutinu mezi dvěma rovnoběžnými deskami lokalizované v bodě  $x = 0$  a  $x = h$ . Předpokládejme, že horní deska se pohybuje rychlostí  $V$  podél  $z$  osy, zatím co dolní deska je v klidu. Poté můžeme předpokládat, že tok mezi deskami probíhá pouze podél osy  $z$  a nezávislé na souřadnicích  $y$  a  $z$ . Tedy,  $\mathbf{v} = (0, 0, v(x))$ . Protože také předpokládáme, že tento pohyb je ustálený, a že rychlost se nemění podél osy  $z$ , pak dostaneme

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + v^i \partial_i v_z = 0 + v^z \partial_z v_z = 0 . \quad (937)$$

Poté N-S rovnice se redukuje do následujícího jednoduchého tvaru

$$-\partial_i p + \mu \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right) = 0 . \quad (938)$$

Explicitně dostáváme

$$\partial_x p = \partial_y p = 0 , \quad \frac{dp}{dz} = \mu \frac{d^2 v}{dx^2} . \quad (939)$$

Protože levá strana této rovnice závisí pouze na  $z$ , zatím co pravá strana závisí pouze na  $x$  dostaneme, že obě strany se musí rovnat konstantě. Tedy

$$\mu \frac{d^2 v}{dx^2} = c_x \Rightarrow \frac{dv}{dx} = \frac{1}{\mu} c_x x + c_1 , \Rightarrow v = \frac{1}{2\mu} c_x x^2 + c_1 x + c_0 . \quad (940)$$

kde

$$c_x = \frac{dp}{dz} . \quad (941)$$

Abychom určili integrační konstanty, použijeme podmínky, že pro  $x = 0, v = 0$  a že pro  $x = h, v = V$ . První podmínka dává

$$c_0 = 0 \quad (942)$$

zatím co druhá vede k rovnici

$$V = \frac{1}{2\mu} c_x h^2 + c_1 h \Rightarrow h c_1 = V - \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} h^2 . \quad (943)$$

Výsledkem dostaneme následující profil rychlosti

$$v = \frac{1}{2\mu} \frac{dp}{dz} (x^2 - xh) + \frac{Vx}{h} . \quad (944)$$

### 7.0.5 Škálování a Reynoldsovo číslo

Je zajímavé, že při studiu dynamiky viskozní tekutiny je možné získat množství důležitých vlastností pomocí jednoduchých argumentů týkajících se dimenze různých fyzikálních veličin. Uvažujme například pohyb tělesa určitého tvaru v dané tekutině. V případě, že dané těleso není koule, je nutné také specifikovat směr pohybu. Pak říkáme, že tělesa stejného tvaru jsou geometricky podobná, jestliže mohou být získány jedno z druhého díky jednoduché změně jeho lineárních rozměrů ve stejném poměru. Jinými slovy řečeno, jestliže je dán tvar tělesa, pak je dostačující specifikovat libovolný z jejich lineárních rozměrů, například poloměr sféry či válcové trubice, abychom kompletně určili její dimenze.

Budeme také uvažovat ustálený tok, například, když budeme uvažovat tok okolo pevného tělesa, rychlost musí být konstantní. Dále budeme předpokládat, že tekutina je nestlačitelná.

Víme, že parametr, který charakterizuje nestlačitelnou tekutinu, je kinematická viskozita  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Pohybové rovnice musí být řešeny pro neznámé  $\mathbf{v}$  a  $p/\rho$  kde  $\rho$  je konstantní. Dále, tok závisí, díky hraničním podmínkám, na tvaru a rozměrech tělesa, které se pohybuje v tekutině a na jeho rychlosti. Protože předpokládáme, že tvar tělesa je předem dán, jeho geometrické vlastnosti jsou určeny jedním lineárním rozměrem, který označíme jako  $L$ , který může být také interpretován jako charakteristický rozměr tělesa. Označme také rychlosti hlavního toku jako  $V$ , kterou můžeme interpretovat jako typickou rychlost tekutiny. Pak libovolný tok je specifikován třemi parametry,  $\nu, V$  a  $L$  a také charakteristickou časovou škálou  $L/V$ . Poznamenejme, že tyto parametry mají fyzikální rozměr

$$[\nu] = m^2 s^{-1}, [L] = m, [V] = m s^{-1}. \quad (945)$$

Nechť nyní předpokládejme, že budeme měřit vzdálenosti jako násobky  $L$ , rychlosti jako násobky  $V$  a konečně času jako  $L/V$ . Jinými slovy, máme

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}'L, \quad \mathbf{v} = \mathbf{v}'V, \quad t = t'L/V, \quad \omega = \omega'V/L, \quad (946)$$

kde nyní všechny čárkované proměnné jsou bezrozměrné. Vidíme tedy, že rovnice pro vířivost může být napsána pomocí bezrozměrných veličin jako

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} = \text{rot}'(\mathbf{v}' \times \omega') + \frac{1}{\text{Re}} \nabla'^2 \omega', \quad (947)$$

kde  $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}'} = L \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} = L \nabla$  a kde jsme definovali bezrozměrnou veličinu

$$\text{Re} = \frac{LV}{\nu} , \quad (948)$$

která je známá jako **Reynoldsovo číslo**. Pro dva geometricky podobné toky, bezrozměrná struktura jejich toků je podobná, což může být splněno za předpokladu, když jejich Reynoldsova čísla jsou stejná. Alternativně, protože vidíme, že jedinou bezrozměrnou veličinou v teorii je Reynoldsovo číslo, dostaneme, že řešením pohybové rovnice nestlačitelné tekutiny musí mít následující tvar

$$\mathbf{v} = Lf\left(\frac{\mathbf{x}}{L}, \text{Re}\right) . \quad (949)$$

Z tohoto výsledku je zřejmé, že ve dvou rozdílných tocích toho samého typu, jako například tok okolo dvou koulí o dvou rozdílných poloměrech tekutinami o různých viskozitách, rychlosti  $\mathbf{v}'$  jsou stejnými funkcemi  $\mathbf{x}'$ , jestliže Reynoldsova čísla pro tyto dva rozdílné toky souhlasí. Toky, které mohou být získány pomocí jiných toků díky jednoduché změně jednotek souřadnic a rychlostí, se nazývají **podobnými**. Tedy toky toho samého typu s těmi samými Reynoldsovými čísly jsou podobné. Tomuto výsledku se říká *Zákon podobnosti*, formulovaný O. Reynoldsem v roce 1883.

Je také dobré diskutovat případ nestacionárního pohybu. Tyto toky nejsou charakterizovány pouze  $\nu, V, L$  ale také charakteristickou časovou škálou  $\tau$ , která je charakteristickým časovým intervalem, za které se změní vlastnosti toku. Například v případě oscilačního pohybu je přirozenou časovou škálou perioda pohybu. Ze čtyř veličin  $\nu, L, V, \tau$  můžeme konstruovat dvě bezrozměrné veličiny, kterým může být Reynoldsovo číslo a také **Strouhalovo číslo**

$$S = V\tau/L . \quad (950)$$

### 7.0.6 Tok v případě malého Reynoldsova čísla

Ukázali jsme, že pro nestlačitelnou tekutinu, pohybová rovnice pro bezrozměrné veličiny má tvar

$$\frac{\partial \omega'}{\partial t'} = \nabla' \times (\mathbf{v}' \times \omega') + \frac{1}{\text{Re}} \nabla'^2 \omega' . \quad (951)$$

Vidíme, že v případě  $\text{Re} \ll 1$  rovnice pro ustálený pohyb ( $\partial_{t'} \omega' = 0$ ) dostává jednoduchou tvar

$$\nabla'^2 \omega = 0 . \quad (952)$$



Od této chvíle už nebudeme používat čárkované proměnné. V případě nestlačitelné kapaliny  $\nabla \cdot \mathbf{v} = 0$  můžeme psát

$$\mathbf{v} = \nabla \times \psi , \quad (953)$$

kde  $\psi$  je vektorový potenciál toku. Ve dvou dimensích máme

$$\psi = (0, 0, -\psi(x, y)) , \mathbf{v} = \left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}, \frac{\partial\psi}{\partial x}, 0\right) . \quad (954)$$

Dále použijeme relaci  $\omega = \nabla \times (\nabla \times \psi) = \nabla(\nabla \cdot \psi) - \nabla^2\psi$  kde první člen je roven nule ve dvou dimensích. Tedy dostaneme, že  $\psi$  splňuje rovnici

$$\nabla^4\psi = 0 \quad (955)$$

v případě viskozní tekutiny.

### 7.0.7 Tok v případě velkého Reynoldsova čísla

Mohli bychom očekávat, že v případě velkého Reynoldsova čísla, viskozní členy mohou být zanedbány a tok okolo pevného tělesa, by měl být stejný jako v případě ideální tekutiny. Ukazuje se, že reálná situace, ověřená experimentálně, je zcela odlišná. Uvažujme na příklad pohybu válce v reálné kapalině. Když je  $Re \geq 20$  dostaneme, že se objeví dva viry za válcem, na druhou stranu v případě ideální tekutiny není možné objevení vírů z důvodu zachování virových prstenců v ideální tekutině. Když budeme poté zvyšovat Reynoldsovo číslo, viry se budou střídavě objevovat na obou dvou stranách za válcem. Konečně, pro  $Re \geq 10^4$  dostáváme turbulentní pohyb kapaliny.

## 7.1 Turbulence

### 7.1.1 Co je turbulence

Turbulence je stav tekutiny, který je charakterizován náhodnou a chaotickou tří dimenzionální vířivostí. Turbulence je také charakteristická velkou disipací energie, míšením, přenosem tepla.

Je zřejmé, že turbulence vykazuje velké množství náhodnosti, otázkou ale je, co je jejím původem. Základní fyzikální principy nám říkají, že toky okolo nás jsou řešením pohybových rovnic. Na druhou stranu z podstaty turbulence není zřejmé, zda-li tyto rovnice sami o sobě nemají nějaký skrytý člen, který

generuje náhodnost, například šum. Druhá možnost je, že pohybové rovnice samy o sobě jsou čistě deterministické, ale pouze jejich řešení může vykazovat prvky náhodnosti.

Ukazuje se, že teprve moderní přístup ke studiu silně nelineárních dynamických systémů nám dává odpověď na tyto otázky. Dokonce i v případě jednoduché nelineární rovnice s deterministickými řešeními a danými počátečními podmínkami je možné najít chaotické a náhodné chování. Například, ve struktuře turbulentního toku vidíme prostorovou a časovou neurčitost, dissipaci, závislost na okamžitém pohybu a dokonce téměř fraktální distribuci škál.

## 7.2 Popis turbulence

Ukazuje se, že pro popis turbulentních jevů je nutné opustit čistý rámec hydrodynamického popisu. Uvažujme trajektorie dynamického systému ve fázovém prostoru okolo nestabilního rovnovážného bodu  $P$ . Klasicky, jestliže systém bude v čase  $t = 0$  v tomto bodě, pak zde zůstane stále. Na druhou stranu, jakakoliv malá porucha má za následek, že systém se bude exponenciálně vzdalovat od tohoto bodu a za konečný časový okamžik je systém leží v velmi vzdáleném bodu fázového prostoru. Pak je prakticky nemožné deterministicky předpovědět stav systému za konečný časový interval. Jinak řečeno, očekáváme, že v případě nestabilního stavu tekutiny, rostoucí fluktuační mohou vést ke ztrátě naší schopnosti předpovědět další vývoj systému.

Přesněji řečeno, pro libovolný viskozí tok, daný hraničními podmínkami, zde existuje přesné stabilní řešení pohybových rovnic viskozí tekutiny. Tyto řešení formálně existuje pro všechna Reynoldsova čísla. Přesto ne každé řešení, dokonce i když je přesné, se ve skutečnosti objevuje. Aby tomu skutečně tak bylo, tak jakakoliv malá porucha, která se objeví v systému, se musí s časem zmenšovat. Naopak, když nějaká malá porucha, která se nevyhnutelně musí objevit v toku, s časem roste, tok je nestabilní a není možné, aby ve skutečnosti existoval.

Matematický popis stability daného toku vzhledem k nekonečně malým poruchám se provádí následujícím způsobem. Libovolné řešení odpovídající stabilnímu toku  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  porušíme časově a prostorově závislou poruchou  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ , která musí být taková, že výsledná rychlost  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1$  splňuje pohybové rovnice. Pohybovou rovnici pro  $\mathbf{v}_1$  obdržíme, když vložíme

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 + \mathbf{v}_1, \quad p = p_0 + p_1 \quad (956)$$

do N-S rovnice pro nestlačitelnou tekutinu

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad \operatorname{div} \mathbf{v} = 0, \quad (957)$$

kde  $\mathbf{v}_0, p$  splňují časově nezávislou N-S rovnici

$$(\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_0 + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_0, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_0 = 0. \quad (958)$$

Jakmile se omezíme na členy lineární v  $\mathbf{v}_1$ , dostaneme následující rovnici pro  $\mathbf{v}_1$

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_1, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad (959)$$

s hraničními podmínkami, že  $\mathbf{v}_1$  je rovno nule na hranici systému.

Vidíme tedy, že  $\mathbf{v}_1$  splňuje systém homogenních lineárních diferenciálních rovnic, kde koeficienty závisejí pouze na prostorových souřadnicích. Obecné řešení těchto rovnic může být representováno jako suma partikulárního řešení, kde  $\mathbf{v}_1$  závisí na čase jako

$$e^{-i\omega t}$$

kde  $\omega$  není samozřejmě libovolné, ale jsou určeny řešením rovnice (959) s vhodnými hraničními podmínkami. Obecně, tyto frekvence mohou být komplexní. Jestliže pak najdeme takové  $\omega$ , jehož imaginární části jsou kladné, pak  $e^{-i\omega t}$  bude neomezeně růst s časem. Jinými slovy, tyto poruchy budou růst a tok bude nestabilní vzhledem k těmto poruchám. Pak je jasné, že nutná podmínka stabilního toku je ta, že imaginární část jakékoliv možné frekvence je záporná.

Ukazuje se, že tento matematický popis podmínek stability je extrémně komplikovaný a ve skutečnosti plně vyvinutý aparát pro teoretický popis stability ustáleného toku okolo těles konečných rozměrů ještě nebyl vypracován. Je jasné, že ustálený tok je stabilní pro dostatečně malá Reynoldsova čísla. Dále je experimentálně ověřeno, že když  $Re$  bude růst, může dosáhnout své kritické hodnoty  $Re_{kr}$ , za kterou je tok nestabilní vzhledem k nekonečně malým poruchám. Jinými slovy řečeno, pro dostatečně velká Reynoldsova čísla  $Re > Re_{kr}$  není možné mít ustálený tok okolo pevného tělesa. Je jasné, že kritické Reynoldsovo číslo není univerzální konstanta, ale

má rozdílné hodnoty v závislosti na druhu toku. Tyto kritické hodnoty leží v intervalu  $10 \preceq Re_{kr} \preceq 100$ . Například, v případě toku v trubici se ukazuje, že  $Re_{kr} = \frac{ud}{\nu} \cong 30$ , kde  $d$  je průměr trubice.

Nechť nyní diskutujeme podstatu nestabilního toku podrobněji. Budeme analyzovat vlastnosti toku pro Reynoldsova čísla, která nejsou o moc vyšší než  $Re_{kr}$ . Pro  $Re < Re_{kr}$  imaginární části komplexní frekvence  $\omega = \omega_1 + i\gamma_1$  jsou záporné, pro všechny možné poruchy  $\gamma_1 < 0$ . Pro  $Re = Re_{kr}$  zde existuje jedna frekvence s nulovou imaginární částí. Pro  $Re > Re_{kr}$  imaginární část frekvence je kladná, ale protože  $Re$  je blízko  $Re_{kr}$  můžeme předpokládat, že  $\gamma_1$  je malé vzhledem k reálné části  $\omega_1$ . Na tomto místě je vhodné poznamenat, že množina všech možných poruchových frekvencí pro daný typ toku obsahuje jak separované izolované body, tzv. diskrétní spektrum, tak celé intervaly frekvencí, tzv. spojité spektrum. Ukazuje se ale, že tok okolo těles o konečných rozměrech, frekvence, pro které platí  $\gamma_1 > 0$ , se vyskytuje pouze v diskrétním spektru. Funkční závislost  $\mathbf{v}_1$  odpovídající této frekvenci má tvar

$$\mathbf{v}_1 = A(t)f(\mathbf{x}), \quad (960)$$

kde  $f$  je obecně komplexní funkce a  $A(t)$  má tvar

$$A(t) = Ce^{\gamma_1 t} e^{-i\omega_1 t}. \quad (961)$$

Je jasné, že tento vztah je platný pouze pro krátký časový interval po porušení ustáleného toku, protože exponent  $e^{\gamma_1 t}$  rychle roste s časem a tudíž je za krátký okamžik porovnatelný s neporušeným řešením  $\mathbf{v}_0$  a tedy předpoklady, pomocí kterých jsme odvodili rovnici pro  $\mathbf{v}_1$ . Je také jasné, že ve skutečnosti modulus  $|A|$  neroste neomezeně, ale dosáhne určité konečné hodnoty. Pro  $Re$  blízko  $Re_{kr}$  tato konečná hodnota je malá a můžeme jí určit následujícím způsobem.

Začneme s určením časové derivace veličiny  $|A|^2$ . Pro velmi malé  $t$ , kdy platí (961) dostaneme

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 \quad (962)$$

kde samozřejmě můžeme interpretovat pravou stranu jako první člen v mocninné řadě  $A$  a  $A^*$ . Je jasné, že jakmile  $|A|$  roste (ale stále uvažujeme, že je malý), tak další členy v rozvoji by měly být uvažovány. Další členy tedy budou členy třetího řádu v  $A$ . Na druhou stranu nás nezajímá přesné řešení této rovnice, ale pouze její časová střední hodnota, kterou budeme počítat přes časový interval mnohem větší než perioda  $2\pi/\omega_1$ . Poznamenejme, že tato

perioda je malá vzhledem k času  $1/\gamma_1$ , za kterou se projeví časová změna modulu. To vyplývá z předpokladu  $\omega_1 \gg \gamma_1$ . Protože ale tyto mocniny třetího řádu musí obsahovat exponenciální faktor  $e^{-i\omega_1 t}$ , které dávají nulový příspěvek, když počítáme časové střední hodnoty. Pak člen čtvrtého řádu dává  $A^2 A^{*2} = |A|^4$ , který bude dávat nenulový příspěvek, když budeme počítat časovou střední hodnotu. Pak tedy dostáváme

$$\frac{d|A|^2}{dt} = 2\gamma_1 |A|^2 - \alpha |A|^4, \quad (963)$$

kde  $\alpha$  je tzv. Landauova konstanta, kde budeme předpokládat, že  $\alpha > 0$ . Dále čára nad levou stranou této rovnice znamená časové středování přes intervaly, které jsou krátké vzhledem k hodnotě  $1/\gamma_1$ , a tudíž na těchto intervalech se časové změny veličin  $|A|^2$ ,  $|A|^4$  dostatečně neprojeví. Ze stejného důvodu můžeme vypustit symbol časového středování nad levou stranou této rovnice a můžeme přistoupit k jejímu řešení, které má tvar

$$\frac{1}{|A|^2} = \frac{\alpha}{2\gamma_1} + C e^{-2\gamma_1 t}. \quad (964)$$

Vidíme tedy, že asymptoticky  $|A|^2$  dosahuje konečné hodnoty

$$|A|_{max}^2 = 2\gamma_1/\alpha. \quad (965)$$

kde  $\gamma_1$  je funkcí Reynoldsova čísla. Blízko  $Re_{kr}$  můžeme vyjádřit tuto závislost jako mocnou řadu v parametru  $Re - Re_{kr}$ . Na druhou stranu z definice máme  $\gamma(Re_{kr}) = 0$ , což nám dává vyjádření pro  $\gamma_1$  do prvního řádu

$$\gamma_1 = K(Re - Re_{kr}). \quad (966)$$

Když vložíme tuto závislost do rovnice (965) dostaneme, že maximální amplituda závisí na  $Re$  následujícím způsobem

$$|A_{max}| \sim \sqrt{Re - Re_{kr}}. \quad (967)$$

Tento výsledek má následující fyzikální interpretaci v případě nestacionárního toku, který se objeví v případě  $Re > Re_{kr}$ . Víme, že tento stav je důsledek nestability systému vzhledem k malým poruchám. Pro  $Re$  blízko  $Re_{kr}$ , tento tok může být reprezentován jako superpozice stacionárního řešení  $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$  a periodického toku  $\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t)$ , s malou ale **konečnou** amplitudou, která ale

roste s rostoucím Reynoldsovým číslem. Rozložení rychlosti v tomto toku má tvar

$$\mathbf{v}_1(\mathbf{x}, t) = f(\mathbf{x})e^{-i(\omega_1 t + \beta_1)} , \quad (968)$$

kde  $\beta_1$  je počáteční fáze. Ukazuje se, že pro velké  $Re - Re_{kr}$  rozdělení rychlosti na stacionární  $\mathbf{v}_0$  a na flukтуаční část  $\mathbf{v}_1$  už není příliš smysluplné. Jednoduše dostáváme periodický tok s frekvencí  $\omega_1$ . Když zavedeme fázi  $\phi_1 = \omega_1 t + \beta_1$  jako nezávislou proměnnou místo času, tak dostáváme, že  $\mathbf{v}(\mathbf{x}, \phi_1)$  je periodickou funkcí s periodou  $2\pi$ . Tato funkce ale není jednoduchou trigonometrickou funkcí, ale má komplikovanější formu danou Fourierovým rozvojem

$$\mathbf{v} = \sum_p A_p(\mathbf{x})e^{-i\phi_1 p} , \quad (969)$$

kde sčítáme přes všechny hodnoty  $p$ , kde tato suma obsahuje členy s frekvencemi, které jsou násobky fundamentální frekvence  $\omega_1$ .

Poznamenejme také, že rovnice (963) určuje pouze modulus časového faktoru  $A(t)$  a ne jeho fázi  $\phi_1$ , která zůstává v podstatě neurčitelná a závisí na počátečních podmínkách. Počáteční fáze  $\beta_1$  může mít libovolné hodnoty právě v závislosti na počátečních podmínkách. Tedy periodický tok není jednoznačně určen svými statickými vnějšími podmínkami a jedna veličina, počáteční fáze rychlosti, zůstává libovolná. Můžeme toto interpretovat také tak, že tento tok má jeden stupeň volnosti, zatím co stabilní tok nemá žádné stupně volnosti.

### 7.2.1 Stabilita toku v trubici

Uvažujme trubici, jejíž osa směřuje ve směru osy  $x$ , kde předpokládáme, že daná trubice je nekonečně dlouhá. Pak dostáváme, že tok nezávisí na souřadnici  $x$  a tedy rychlost  $\mathbf{v}_0$  je nezávislá na souřadnici  $x$ . Poznamenejme, že pohybová rovnice pro poruchy má tvar

$$\frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial t} + (\mathbf{v}_0 \cdot \nabla) \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_1 \cdot \nabla) \mathbf{v}_0 = -\frac{1}{\rho} \nabla p_1 + \nu \nabla^2 \mathbf{v}_1 , \quad \text{div} \mathbf{v}_1 = 0 \quad (970)$$

a budeme hledat její řešení ve tvaru

$$\mathbf{v}_1 = e^{ikx - \omega t} f(y, z) . \quad (971)$$

Ukazuje se, že pro tento konkrétní případ opět existuje  $Re_{kr}$ , pro které  $\gamma = \text{Im}\omega$  je rovné nule pro určitou hodnotu  $k$ , zatím co reálná část funkce  $\omega(k)$  je nenulová.

Jakmile  $Re$  lehce převíší  $Re_{kr}$ , interval hodnot  $k$  pro které  $\gamma(k) > 0$  je malý a leží blízko bodu, kde  $\gamma(k)$  je maximální, tedy kde  $\frac{d\gamma}{dk} = 0$ . Představme si, že se objevila malá porucha v toku, její vlnové klupko má tvar superpozice komponent (971). Za určitý časový okamžik komponenty s  $\gamma(k) > 0$  jsou zesíleny, zatím co ostatní jsou tlumeny. Zesílené amplitudy tvoří vlnové klupko o grupové rychlosti  $\frac{d\omega}{dk}$ , které je nesené po proudu toku. Protože uvažujeme vlny, jejich vlnová čísla leží v malém intervalu okolo bodu  $\frac{d\gamma}{dk} = 0$ , pak rychlost

$$\frac{d\omega}{dk} \cong \frac{d(\text{re}\omega)}{dk} \quad (972)$$

je reálná a tedy skutečně odpovídá aktuální rychlosti vlnového klubka.

Skutečnost, že kladné  $\omega$  implikuje zesílení poruch, které jsou nesené po proudu toku, vede ke dvou možnostem. V prvním případě, bez ohledu na pohyb vlnového klubka, poruchy rostou bez omezení během časového vývoje v libovolném pevně zafixovaném prostorovém místě. Tento druh nestability vzhledem k malým poruchám, se nazývá jako *absolutní nestabilita*. V druhém případě, vlnový balík je tak rychle unášen, že v libovolném pevném bodě v prostoru porucha se blíží k nule v limitě  $t \rightarrow \infty$ . Tento druh nestability se nazývá *proudovou nestabilitou*.

Rozdíl mezi těmito dvěma případy je relativní ve smyslu, že závisí na souřadnicové soustavě, ve které danou nestabilitu sledujeme. Nestabilita, která se jeví jako proudová v jedné souřadnicové soustavě, se jeví jako absolutní nestabilita v druhé soustavě, která se pohybuje s daným klubkem. Na druhou stranu absolutní nestabilita se bude jevit jako proudová nestabilita v soustavě, která se pohybuje dostatečně rychle od daného klubka. Na druhou stranu v případě proudění tekutiny v trubici existuje preferovaná souřadnicová soustava, což je soustava, ve které trubice je v klidu.

Závěrem bych rád zdůraznil, že kompletní teoretický popis dané nestability je velmi komplikovaný a zatím nebyl zcela vyřešen.

### 7.3 Pohybové rovnice pro střední hodnoty

Uvažujme rovnici pro nestlačitelnou viskozni tekutinu

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x^j \partial x^j}, \quad (973)$$

kde  $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ . Poznamenejme, že tuto rovnici můžeme přepsat do tvaru

$$\rho \left[ \frac{\partial v}{\partial t} + v^j \frac{\partial v_i}{\partial x^j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad (974)$$

kde

$$T_{ij} = 2\mu \left[ \Lambda_{ij} - \frac{1}{3} \Lambda_{kk} \delta_{ij} \right] \quad (975)$$

Tato druhá forma pohybové rovnice má tu výhodu, že můžeme přesně sledovat vliv viskozního smyku.

Nyní budeme studovat tuto rovnici podrobněji s ohledem na turbulentní chování. Jak víme, turbulentní tok odpovídá chaotickému stavu, který je řešením předchozí rovnice pro vysoká Reynoldsova čísla. Ačkoliv je známo, že laminární řešení předchozí rovnice, které jsou konsistentní s hraničními podmínkami, existují, poruchy, jakkoliv malé, vedou k jejich přeměně na turbulentní proudění. Abychom tomuto lépe porozumněli, je vhodné studovat tok ve dvou částech, střední komponentu rychlosti a flukтуаční část. Jinými slovy zavedeme následující notaci

$$\begin{aligned} v_i &= V_i + u_i, \\ p &= P + \tilde{p}, \\ T_{ij} &= \bar{T}_{ij} + \tau_{ij}, \end{aligned} \quad (976)$$

kde  $V_i, P, \bar{T}_{ij}$  reprezentují střední hodnoty a  $u_i, p, \tau_{ij}$  odpovídají fluktuujícím hodnotám. Poznamenejme, že tato technika rozdělení veličin se nazývá *Reynoldsovo rozdělení*. Poznamenejme, že když definujeme střední hodnoty jako střední hodnoty v ansamblu, pak jsou obecně časově závislé. Dále předpokládáme, že hustota je konstantní a tedy její fluktuace jsou nulové.

Nyní tedy vložíme předchozí rozdělení veličin do pohybové rovnice a dostaneme

$$\rho \left[ \frac{\partial(V_i + u_i)}{\partial t} + (V_j + u_j) \frac{\partial(V_i + u_i)}{\partial x_j} \right] = - \frac{\partial(P + p)}{\partial x_i} + \frac{\partial(\bar{T}_{ij} + \tau_{ij})}{\partial x_j}. \quad (977)$$

Nyní můžeme provést středování dané rovnice, abychom dostali rovnici pro střední hodnoty. Z definice je zřejmé, že operace středování a diferencování komutují, to jest střední hodnota derivace je stejná jako derivace střední



hodnoty. Také střední hodnota fluktuující veličiny je nula, jak vyplývá z definice

$$\langle v \rangle = \langle V \rangle + \langle u \rangle \Rightarrow V = V + \langle u \rangle \Rightarrow \langle u \rangle = 0 . \quad (978)$$

Pak tedy dostaneme pohybovou rovnici pro střední pohyb

$$\rho \left[ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x^j} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial \bar{T}_{ij}}{\partial x_j} - \rho \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle . \quad (979)$$

kde jsme přesunuli střední hodnotu fluktuačního členu na pravou stranu, abychom vyjádřili jeho vliv na dynamiku střední hodnoty. Samozřejmě, je otázkou, zda-li tento člen je rovne nule a odpověď závisí na korelaci členů, které vystupují v součinu. Obecně tyto korelace jsou nenulové.

Stejným způsobem můžeme postupovat v případě zákona zachování

$$\frac{\partial (V_i + u_i)}{\partial x^i} = 0 , \quad (980)$$

Jestliže vezmeme její střední hodnotu, tak dostaneme

$$\frac{\partial V_i}{\partial x^i} = 0 . \quad (981)$$

Poznamenejme, že díky těmto dvěma rovnicím dostaneme zachovávající se rovnici pro fluktuační rychlost

$$\frac{\partial u_i}{\partial x^i} = 0 . \quad (982)$$

Jestliže nyní vynásobíme tuto rovnici  $u_j$  a provedeme její středování, tak dostaneme

$$\left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x^i} \right\rangle = 0 , \quad (983)$$

což tedy můžeme přidat do výrazu  $\left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \right\rangle$  a tedy dostaneme

$$\left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \right\rangle + \left\langle u_i \frac{\partial u_j}{\partial x^j} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_j} \langle u_i u_j \rangle . \quad (984)$$

kde jsme opět použili fakt, že operace středování a derivace komutují. Poté rovnice pro střední rychlost má tvar

$$\rho \left[ \frac{\partial V_i}{\partial t} + V_j \frac{\partial V_i}{\partial x^j} \right] = - \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} [\bar{T}_{ij} - \rho \langle u_i u_j \rangle] . \quad (985)$$

Členy na pravé straně mají dimenzi napětí. První člen je napěťový člen. Druhý člen vyjadřuje příspěvek fluktuací k nelineárním členům na levé straně. Teno tvar ukazuje, že alespoň co se týká středního pohybu, střední hodnota vystupují tak, jako by se jednalo o napětí, proto se někdy nazývá jako **Reynoldsovo napětí**. Ve skutečnosti Reynoldsovo napětí je důvod, proč je problém turbulence tak obtížný. Ačkoliv je nazýváno napětím, jeho původ je velmi rozdílný od viskozního napětí. Víme, že smykové napětí je přímo spojeno s vlastnostmi tekutiny a je definován přímo z mikroskopické kinetické teorie. Na druhou stranu Reynoldsovo napětí je důsledkem samotného pohybu tekutiny. Dále, škály fluktuačního pohybu, které vedou k jeho vzniku, jsou právě škály, které nás zajímají. Jinými slovy dostáváme se k problému turbulence:

- Pohybové rovnice pro střední hodnoty nejsou uzavřené.
- Jednoduché hypotézy, jak dodat další rovnice obecně nefungují. Jinými slovy, když budeme schopni nějakým způsobem dodat rovnice pro konkrétní tok, například tok v trubici, nebudeme schopni předpovědět stav v trochu rozdílné konfiguraci.

Jak víme, turbulentní tok se objeví z laminárního toku při zvyšování Reynoldsova čísla. Tuto skutečnost je možné popsat pomocí rovnic, které jsme odvodili výše, kdy ale budeme předpokládat následující rozdělení rychlosti, kdy provedeme rozdělení na základní tok-laminární a poruchový tok, který reprezentuje fluktuační část nad základní část. Toto je postup, který jsme prováděli v předchozích odstavcích. Na druhou stranu, aby laminární tok byl skutečně laminárním tokem, pak rovnice pro střední hodnoty musí vytvářet ten samý laminární tok, který byl součástí původního předpokladu. Toto je ale možné pouze za předpokladu, kdy Reynoldsovo napětí je identicky rovno nule. Toto je samozřejmě pouze možné, když poruchy jsou velmi malé a tedy tyto extra členy mohou být zanedbány, to jest tyto poruchy nemohou růst. Jinými slovy tyto poruchy mohou růst pouze do konečné velikosti.

Abychom toto určili, musíme najít rovnice pro tyto poruchy. Tyto rovnice můžeme určit, když z rovnice pro okamžitou rychlost odečteme rovnice pro základní pohyb. Jestliže toto provedeme, dostaneme rovnici

$$\rho \left[ \frac{\partial u_i}{\partial t} + V^j \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \right] = - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} - \rho [u_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j}] - \rho \left( u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \left\langle u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right\rangle \right) . \quad (986)$$

Nyní musíme pečlivě vysvětlit členy v této rovnici. Na levé straně je derivace fluktuální rychlosti, která sleduje střední rychlost. První dva členy na pravé straně mají stejnou formu jako v případě středního pohybu a reprezentují gradient fluktuálního tlaku a fluktuálního viskozního namětí. Třetí člen na pravé straně je nový a jeho důsledkem je to, že fluktuace extrahují energii ze středního pohybu. Poslední člen je kvadratický ve fluktuálních rychlostech. Poznamenejme, že tato rovnice je identicky rovna nule, když provedeme její středování.

Otázka je, když poruchy jsou malé. V tomto případě můžeme zanedbat poslední člen v předchozí rovnici, který je kvadratický ve fluktuacích a dostaneme lineární rovnici pro poruchy. Tyto rovnice jsou analyzovány v teorii lineární stability dynamiky tekutin. Je zřejmé, že tyto rovnice jsou uzavřeny, protože zde neexistuje žádné Reynoldsovo napětí. Je také zřejmé, že tyto rovnice popisují pouze velmi krátké okamžiky od počátku, kdy poruchy začnou růst, protože pak již nelze zanedbat Reynoldsovo napětí. Pak dostáváme, že rovnice pro střední rychlost jsou modifikovány a je zjevné, že dané řešení už není možné identifikovat s laminárním prouděním. Jinými slovy, teorie stability může předpovědět, kdy tok se stane nestabilním, ale mnoho neříká o přechodu k turbulenci, protože tento proces je vysoce nelineární.

### 7.3.1 Plně vyvinutá turbulence

Turbulentní tok v případě velkého Reynoldsova čísla je charakterizován extrémně nepravidelnou změnou rychlosti v každém bodě během časového vývoje. Tento stav tekutiny je znám jako *Plně vyvinutá turbulence*. Rychlost spojitě fluktuuje okolo nějaké střední hodnoty rychlosti. Podobná náhodná variace rychlosti existuje mezi body v toku a daném okamžiku, jinými slovy když se podíváme na tekutinu v určitém časovém bodě jako celek, pak rozložení rychlosti v prostoru je naprosto nepravidelné. Ukazuje se, že plná teorie turbulence ještě není formulována, na druhou stranu je možné získat množství důležitých kvalitativních výsledků. Jinými slovy v praxi se často setkáváme s tekutinami, kde se zdá, že rozložení rychlosti v prostoru a v čase je náhodné. Takový stav systému je znám jako **turbulence**.

Zavedeme koncept střední rychlosti, což je veličina získaná středováním přes určitý dlouhý časový interval rychlosti v daném bodě. Díky tomuto vystředování jsou všechny nepravidelnosti vyhlazeny a rychlost se mění spojitě v prostoru. V následujícím budeme označovat střední rychlost jako  $\bar{v}$ .

Pak rozdíl

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \quad (987)$$

což je definováno jako rozdíl mezi skutečnou rychlostí a střední rychlostí. Tato rychlost se mění nahodně v závislosti na charakteru turbulence.

Ze své podstaty není možné najít deterministickou teorii turbulence, a proto je nutné najít statistický popis tekutiny založený na středních hodnotách. V principu máme dva druhy středních hodnot. Časová střední hodnota, kdy studujeme jeden systém a určujeme střední hodnoty jako hodnoty přes určitý časový interval. Nebo máme ansámbl systémů a středování se provádí v tomto ansámblu. V případě ergodických systémů tyto dva statistické popisy jsou ekvivalentní. Budeme dále předpokládat, že se zabýváme ergodickými systémy a označíme statistické střední hodnoty vodorovnou čarou na dané proměnné.

Studujme nyní detailněji vlastnosti tohoto nepravidelného pohybu, který je superponován nad středním tokem. Ukazuje se, že tento pohyb může být chápán jako souhrn turbulentních virů o různé velikosti, velikostí víru myslíme vzdálenost, na kterou se dostatečně změní rychlost. Při růstu Reynoldsova čísla nejdříve se objevují velké víry, později víry o menší charakteristické velikosti. Pro velmi velká Reynoldsova čísla se objevují víry všech velikostí. Důležitou roli při turbulentním proudění hrají víry o největší velikosti, jejichž velikost (*základní nebo také vnější škála* turbulence je řádově rovna velikosti oblasti, v které probíhá daný turbulentní tok. Označme tuto škálu jako  $L$ . Rychlosti ve víru jsou porovnatelné se změnou střední rychlosti na vzdálenost charakteristické délky  $L$ . Označíme si hodnotu této změny rychlosti jako  $\Delta\bar{v}$ , kde nyní uvažujeme řád dané velikosti, nemluvíme o střední hodnotě rychlosti, ale o její změně  $\Delta\bar{v}$ , což je veličina, která charakterizuje rychlost turbulentního toku. Samozřejmě, střední hodnota může mít libovolné velikosti v závislosti na souřadnicové soustavě. Frekvence odpovídající těmto virům jsou řádu  $\bar{v}/L$ . Poznamenejme, že tyto frekvence jsou definovány pomocí střední rychlosti, ne její změny  $\Delta v$ . Frekvence nám určují periodu, za kterou se opakuje struktura toku v dané souřadnicové soustavě. Samozřejmě, v závislosti na dané souřadnicové soustavě, celá struktura je unášena tokem o střední rychlosti  $\bar{v}$ . Když budeme uvažovat také malé víry, ukazuje se, že mají daleko větší frekvenci a mohou být chápány jako jemné detaily struktury, která doplňuje fundamentální velké víry. Je podstatné, že pouze malá část kinetické energie je uložena v malých virech.

Pomocí obrázku turbulence, jak byla nastíněna v předchozích řádcích, si

můžeme udělat závěr týkající se variace flukтуаční rychlosti od bodu k bodu v určitém, pevném časovém okamžiku. Na velké vzdálenosti, porovnatelné s  $L$ , změna flukтуаční rychlosti je dána změnou rychlosti velkých virů a tudíž je porovnatelná s  $\Delta\bar{v}$ . Na malé vzdálenosti (když porovnááme vzhledem k  $L$ ), je určena malými viry a je tedy malá, když ji porovnááme s  $\Delta\bar{v}$ . Ten samý obrázek dostaneme, když pozorujeme změnu rychlosti s časem v daném pevném bodě. Přes krátké časové okamžiky, malé vzhledem k  $T \sim L/\bar{v}$  se rychlost ztelně nemění. Na druhou stranu pro větší časové intervaly její změna je přibližně  $\Delta\bar{v}$ .

Délka  $L$  je charakteristická délková škála, která se objevuje v Reynoldsově čísle, které určuje vlastnosti daného toku. Kromě Reynoldsova čísla můžeme také zavést kvalitativní koncept Reynoldsových čísel pro turbulentní viry různých velikostí. Jestliže  $\lambda$  je řádově velikost daného viru a  $v_\lambda$  velikost rychlosti, pak odpovídající Reynoldsovo číslo je

$$R_\lambda \sim \frac{v_\lambda \lambda}{\nu}$$

Vidíme, že toto číslo klesá s velikostí viru. Pro velké Reynoldsovo číslo jsou Reynoldsova čísla  $Re_\lambda$  velkých virů také velká. Na druhou stranu velké Reynoldsovo číslo je ekvivalentní malé viskozitě. Vidíme tedy, že pro velké viry, které jsou základem turbulentního proudění, viskozita nehraje velkou roli. Jinými slovy, neexistuje zde významná disipace energie v případě velkých virů.

Situace se samozřejmě změní v případě nejmenších virů jejichž Reynoldsova čísla jsou řádově rovna jedné. Označíme velikost těchto virů jako  $\lambda_0$ . Je zajímavé, že právě v těchto nejmenších virech, které nejsou důležité z hlediska obecné struktury turbulentního toku, dochází k disipaci energie.

Nyní můžeme přistoupit k následujícímu popisu disipace energie v turbulentním toku. Energie je přenášena od největších virů k nejmenším, prakticky bez disipace energie během tohoto procesu. Můžeme tedy říci, že zde je spojitý tok energie od velkých virů k malým, kde kinetická energie se přeměňuje na teplo. Abychom zachovali stabilní stav, musíme nutně zavést vnější zdroje energie, kteří spojitě dodávají energii velkým virům.

Protože viskozita je důležitá pouze pro nejmenší viry, můžeme říci, že žádná z veličin, které přísluší virům o velikostech  $\lambda \geq \lambda_0$  nemůže záviset na  $\nu$ . Tato okolnost redukuje počet veličin, které určují vlastnosti turbulentního toku, a výsledkem je to, že argumenty založené na podobnostních úvahách, jsou velmi důležité, když studujeme vlastnosti turbulence.

Použijeme tyto argumenty, když se budeme snažit určit řádovou hodnotu disipace energie v turbulentním toku. Nechť  $\epsilon$  je střední hodnota disipace energie za jednotku času na jednotku hmotnosti tekutiny, kde nyní  $\epsilon$  odpovídá disipativní energii, né její vnitřní energii. Tato energie je získána z velkých virů a pak je spojitě přenášena na menší víry dokud není disipována ve vírech o velikosti  $\sim \lambda_0$ . Protože tedy nedochází ke ztrátě energie od virů největší velikosti k nejmenším, můžeme odhadnout energii  $\epsilon$  z veličin, které charakterizují největší viry, ačkoliv k disipaci energie dochází na nejmenších škalách. Tyto veličiny jsou hustota tekutiny  $\rho$ , délka  $L$  a rychlost  $\Delta\bar{v}$ . Z těchto tří veličin můžeme vytvořit veličinu, která má dimensi  $\epsilon$  jako

$$\epsilon \sim (\Delta\bar{v})^3/L . \quad (988)$$

Tato veličina určuje velikost disipace energie v turbulentním toku.

Z určitého pohledu můžeme charakterizovat turbulentní tekutinu pomocí tzv turbulentní viskozity  $\nu_{turb}$ , která se liší od kinematické viskozity  $\nu$ . Protože  $\nu_{turb}$  charakterizuje vlastnosti turbulentního toku, jeho velikost musí být určena  $\rho$ ,  $\Delta\bar{v}$  a  $L$ . Jediná veličina, která může být vytvořena z těchto veličin a která má dimensi kinematické viskozity, je  $L\Delta\bar{v}$  a tedy dostáváme

$$\nu_{turb} \sim L\Delta\bar{v} . \quad (989)$$

Vidíme tedy, že podíl  $\nu_{turb}$  k  $\nu$  je roven

$$\frac{\nu_{turb}}{\nu} \sim Re \quad (990)$$

a roste se zvětšujícím se Reynoldsovým číslem. Pak energie disipace může být vyjádřena pomocí  $\nu_{turb}$  jako

$$\epsilon \sim \nu_{turb}(\Delta\bar{v}/L)^2 \quad (991)$$

což je v souladu s běžnou definicí viskozity. Zatím co,  $\nu$  určuje disipaci energie díky členům, které závisejí na prostorových derivacích skutečné rychlosti,  $\nu_{turb}$  se vztahuje ke gradientu ( $\sim \Delta\bar{v}/L$  střední rychlosti).

Podobnými argumenty můžeme určit velikost změny tlaku v prostoru vyplněném turbulentním tokem. Jediná veličina, která má rozměr tlaku a která může být vytvořena z  $\rho$ ,  $L$  a  $\Delta\bar{v}$  je  $\rho(\Delta\bar{v})^2$ . Tedy

$$\Delta p \sim \rho(\Delta\bar{v})^2 . \quad (992)$$

Nyní uvažujme vlastnosti virů o velikosti  $\lambda$ , které jsou malé vzhledem k fundamentální škále  $L$ . Tyto vlastnosti se nazývají lokálními vlastnostmi turbulence. Budeme dále předpokládat, že tyto viry jsou daleko od pevných hranic, které vymezují tekutinu. Pak je možné předpokládat, že taková malá turbulence je homogenní a isotropní, což znamená, že na vzdálenostech, které jsou malé vzhledem k  $L$ , nejsou vlastnosti turbulence závislé na směru. Konkrétně, nezávisejí na směru střední rychlosti. Je důležité zdůraznit, že když mluvíme o vlastnostech turbulence v malé oblasti toku, tak máme na mysli relativní pohyb částic tekutiny v této oblasti a nemyslíme absolutní pohyb této oblasti jako celek, který je způsoben velkými viry.

Nechť nyní studujeme lokální vlastnosti turbulence, které byly poprvé získány Kolmogorovem v roce 1941. Pro plné porozumnění tohoto problému musíme najít veličiny, které nám dávají informace o oblastech, které jsou malé vzhledem k  $L$ , ale na druhou stranu jsou velké vzhledem k  $\lambda_0$ , kde efekt viskozity je významný. Parametry, které máme k dispozici, je hustota tekutiny  $\rho$  a dále energie  $\epsilon$ , což je energie disipována za jednotku času na jednotku hmoty tekutiny. Přednesli jsme argumenty, že tento tok energie spojitě přechází od větších virů k menším. Jinými slovy, ačkoliv disipace energie je způsobena výhradně disipací energie a probíhá na úrovni nejmenších virů, energie  $\epsilon$  určuje vlastnosti větších virů. Pak je přirozené předpokládat, že pro dané  $\rho$  a  $\epsilon$  lokální vlastnosti turbulence jsou nezávislé na rozměru  $L$  a rychlosti  $\Delta\bar{v}$ . Jinými slovy viskozita tekutiny nemůže vystupovat v libovolné z těchto veličin, neboť se zajímáme o jevy na délkových škálách  $\lambda \gg \lambda_0$ .

Určeme nyní velikost rychlosti  $v_\lambda$ , což je turbulentní rychlost na délkové škále  $\lambda$ . Je jasné, že může záviset pouze na  $\epsilon$  a na  $\lambda$ . Z těchto veličin můžeme vytvořit pouze jednu veličinu, která má rozměr rychlosti, a to  $(\epsilon\lambda)^{1/3}$ . To vyplývá ze skutečnosti, že rozměr  $\epsilon$  je

$$[\epsilon] = m^2 s^{-3} . \quad (993)$$

neboť  $\epsilon$  je definována jako hustota energie na jednotku hmoty za jednotku času. pak je jasné, že

$$\begin{aligned} v_\lambda = K \epsilon^p \lambda^q &\Rightarrow [v_\lambda] = [K] + p[\epsilon] + q[\lambda] \Rightarrow \\ [m] : 1 = 2p + q , \quad [s] : -1 = -3p &\Rightarrow \\ p = \frac{1}{3} , \quad q = \frac{1}{3} & \end{aligned} \quad (994)$$

kde  $K$  je bez rozměrná veličina  $[K] = 0$ . Poté dostáváme

$$v_\lambda \sim (\epsilon\lambda)^{1/3}. \quad (995)$$

Tato závislost je známá jako Kolmogorův zákon. Můžeme také interpretovat  $v_\lambda$  jako rychlost turbulentních virů, jejichž velikost je řádově rovna  $\lambda$ . To vyplývá z faktu, že variace střední rychlosti na malých vzdálenostech je malá vzhledem ke změně flukтуаční rychlosti na tyto vzdálenosti, a tedy může být zanedbána.

Podívejme se nyní na daný problem z druhého hlediska a určíme velikost  $v_\tau$  změny rychlosti v daném bodě za časový interval  $\tau$ , který je malý vzhledem k časové škále  $T \sim L/\bar{v}$ , která charakterizuje tok jako celek. Uvažme, že díky existenci středního toku, libovolný kousek tekutiny je posunut za časový interval  $\tau$  do vzdálenosti  $\tau\bar{v}$ , kde  $\bar{v}$  je střední rychlost. Tedy část tekutiny, která je v daném bodě v čase  $\tau$ , byla ve vzdálenosti  $\tau\bar{v}$  v počátečním okamžiku. Poté dostaneme  $v_\tau$  tím, že vložíme  $\lambda = \tau\bar{v}$  do Kolmogorova zákona

$$v_\tau \sim (\epsilon\tau\bar{v})^{1/3}. \quad (996)$$

Konečně, s použitím  $\epsilon \sim (\Delta\bar{v})^3/L$ , dostaneme

$$\begin{aligned} v_\lambda &\sim \Delta\bar{v}(\lambda/L)^{1/3}, \\ v_\tau &\sim \Delta\bar{v}(\tau/T)^{1/3}. \end{aligned} \quad (997)$$

Položme si nyní otázku, pro jaké vzdálenosti začne viskozita tekutiny hrát důležitou roli. Tyto délkové škály  $\lambda_0$  také určují velikost nejmenších virů v turbulentním toku a proto jsou také nazývány jako vnitřní škály turbulence. Poznamenejme, že vnější škála turbulence je charakteristická délka  $L$ . Abychom určili  $\lambda_0$ , zavedeme lokální Reynoldsovo číslo  $R_\lambda$

$$R_\lambda \sim v_\lambda\lambda/\nu \sim \Delta\bar{v}\lambda^{4/3}/\nu L^{1/3} \sim R(\lambda/L)^{4/3} \quad (998)$$

kde jsme zavedli Reynoldsovo číslo

$$R \sim L\Delta\bar{v}/\nu \quad (999)$$

pro tok jako celek. Definujme škálu  $\lambda_0$  jako vzdálenost, kde  $R_{\lambda_0} \sim 1$ . Z této podmínky dostaneme

$$\lambda_0 \sim \frac{L}{R^{3/4}} \quad (1000)$$



Ten samý výraz můžeme vytvořit z  $\epsilon$  a  $\nu$ . Jediná kombinace, kterou můžeme vytvořit y těchto veličin a která má rozměr délky, je

$$\lambda_0 \sim (\nu^3/\epsilon)^{1/4} . \quad (1001)$$

Vidíme tedy, že vnitřní škála turbulence se rychle snižuje se zvětšujícím se Reynoldsovým číslem.

Rozsah délkových škál, kde  $\lambda \sim L$  se nazývá energetický interval, kde většina kinetické energie toku je koncentrována právě na těchto škálách. Hodnoty, kdy  $\lambda \succ \lambda_0$  tvoří disipativní interval. Toto je interval, kdy dochází k disipaci kinetické energie. Pro velmi velká Reynoldsova čísla, tyto dva intervaly jsou od sebe velmi vzdáleny. Interval, který leží mezi těmito dvěma intervaly, se nazývá vnitřní interval.

Kolmogorův zákon může být také formulován v ekvivalentní spektrální formě. Nahradíme škálu  $\lambda$  odpovídajícím vlnovým číslem  $k \sim \frac{1}{\lambda}$  daného viru. Nechť poté definujeme  $E(k)dk$  jako kinetická energie na jednotku hmoty tekutiny ve virech s hodnotami vlnového vektoru  $k$  v intervalu  $(k, k + dk)$ . Funkce  $E(k)$  má rozměr

$$[E(k)] = m^3 s^{-2} \quad (1002)$$

a tedy jediná veličina, která může být zformulována z  $\epsilon$  a  $k$  má formu

$$\begin{aligned} E &= K \epsilon^p k^q \Rightarrow \\ m &: 3 = 2p - q , \\ s &: -2 = -3p \Rightarrow \\ p &= \frac{2}{3} , q = -\frac{5}{3} \end{aligned} \quad (1003)$$

a tedy

$$E(k) \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} . \quad (1004)$$

Tento vztah je v souladu s Kolmogorovým zákonem  $v_\lambda \sim (\epsilon\lambda)^{1/3}$ , neboť  $v_\lambda^2$  řádově udává velikost celkové energie ve virech o velikosti  $\lambda$  nebo menších. Tento samý výsledek ale dostaneme, když provedeme následující integraci

$$\int_k^\infty E(k')dk' \sim -\epsilon^{2/3} [k'^{-2/3}]_k^\infty = \epsilon^{2/3} k^{-2/3} \sim (\epsilon\lambda)^{2/3} = v_\lambda^2 \quad (1005)$$

kde jsme užili vztah  $k \sim \frac{1}{\lambda}$ .

### 7.3.2 Korelační délka

Rychlost v každém bodě  $\mathbf{x}$  může být napsána jako

$$\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} + \mathbf{v}' \quad (1006)$$

kde  $\bar{\mathbf{v}}$  je statistická střední hodnota a kde  $\mathbf{v}'$  je fluktuální část. Z této definice je zřejmé, že

$$\bar{\mathbf{v}}' = 0 . \quad (1007)$$

Vidíme tedy, že je nutné použít komplikovanější objekt na popis fluktuací, abychom popsali jejich statistické vlastnosti. Ukazuje se, že jednou z nejjednodušších modifikací je následující střední hodnota fluktuací

$$\overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} . \quad (1008)$$

Pro  $\mathbf{r} = 0$  tento výraz je roven  $\overline{v'^2(\mathbf{x}, t)}$  což je úměrné hustotě průměrné kinetické energie fluktuací. Pro  $r \rightarrow \infty$  fluktuálními rychlostmi jsou nezkorelovány a tedy

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = \overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t)} \cdot \overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} = 0 . \quad (1009)$$

Vidíme tedy, že  $\overline{\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)}$  nabývá podstatných hodnot pouze v intervalu  $r \succeq$  konečná hodnota. Tato vzdálenost se nazývá **Korelační délka** turbulence. Vidíme tedy, že tato střední hodnota  $\mathbf{v}'(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}'(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)$  obsahuje informace o síle turbulence a zároveň o korelační délce turbulence a tudíž ji můžeme považovat za vhodnou míru vlastností turbulence. Víme také, že variace rychlosti na malých vzdálenostech je způsobena malými viry. Na druhou stranu vlastnosti lokální turbulence nezávisejí na průměrném toku. Můžeme tedy předpokládat zidealizovaný případ, kdy isotropie a homogenita není pouze na malých škálách, ale na velkých škálách, kde průměrná rychlost je pak nula.

#### Korelační tensor

Korelační tensor rychlosti pro turbulentní tok je definován následujícím způsobem

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x}, t) = \overline{v'_i(\mathbf{x}, t)v'_j(\mathbf{x} + \mathbf{r}, t)} . \quad (1010)$$

Obecně tento tensor má devět nezávislých komponent, ale díky symetriím je možné velmi redukovat počet nezávislých komponent.

V předchozí části jsme argumentovali, že v případě nestabilní rovnováhy je nemožné přesně určit okamžité hodnoty fluktuací polí. Na druhou stranu je možné se ptát, zda-li není možné určit alespoň hodnoty korelatoru  $R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x})$  nebo korelačních funkcí vyšších řádů  $\overline{v_i(\mathbf{x}_1)v_j(\mathbf{x}_2)v_k(\mathbf{x}_3)}$ , jestliže známe počáteční a hraniční podmínky na střední hodnoty a statistiku fluktuací. Ukazuje se ale bohužel, že taková teorie nebyla dosud formulována.

V následujícím budeme uvažovat případ nestlačitelné, homogenní a isotropní turbulence. Druhý předpoklad znamená, že korelační tensor nezávisí na  $\mathbf{x}$ . Třetí předpoklad znamená, že medium nemá žádný preferovaný směr, t.j. jediný vektor, na kterém korelační tensor může záviset, je vektor  $\mathbf{r}$ . Toto implikuje také to, že

$$\bar{\mathbf{v}} = 0 . \quad (1011)$$

Předpoklady homogenity a isotropie implikují

$$\begin{aligned} R_{ij}(\mathbf{r}) &= \overline{R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x})} = \overline{R_{ij}(\mathbf{r}, \mathbf{x} - \mathbf{r})} = \overline{v_i(\mathbf{x} - \mathbf{r})v_j(\mathbf{x})} = \overline{\mathbf{v}_j(\mathbf{x})\mathbf{v}_i(\mathbf{x} - \mathbf{r})} = R_{ji}(-\mathbf{r}) , \\ \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} &= \overline{v_i(\mathbf{x})\frac{\partial v_j(\mathbf{x} + \mathbf{r})}{\partial r_j}} = \overline{v_i(\mathbf{x})(\nabla \cdot \mathbf{v})(\mathbf{x} + \mathbf{r})} = 0 \Rightarrow \frac{\partial R_{ji}}{\partial r_j} = 0 , \end{aligned} \quad (1012)$$

kde jsme využili předpoklad nestlačitelnosti tekutiny.

Formu korelačního tensoru pro případ isotropní turbulence můžeme určit následujícím způsobem. Uvažujme kartezský systém souřadnic  $\tilde{K}$ , kde jeden z bázových vektorů, řekněme  $\tilde{\mathbf{e}}_z$ , souhlasí s vektorem korelace  $\mathbf{r} = r\tilde{\mathbf{e}}$ . Označíme korelační funkci jako

$$\tilde{R}_{33} = \overline{\tilde{v}_3(\mathbf{x})\tilde{v}_3(\mathbf{x} + r\tilde{\mathbf{e}}_3)} = \frac{1}{3}\overline{v^2}f(r) , \quad (1013)$$

s podmínkou  $f(0) = 1$ . Díky symetrii, korelační funkce komponent rychlosti kolmé k  $\mathbf{r}$  musí souhlasit,

$$\tilde{R}_{ii} = \overline{\tilde{v}_i(\mathbf{x})\tilde{v}_i(\mathbf{x} + r\tilde{\mathbf{e}}_3)} = \frac{1}{2}\overline{v^2}g(r) \quad (1014)$$

s  $i = j = 1, 2$  a s  $g(0) = 1$ . Mimo diagonální komponenty  $\tilde{R}_{ij}$  musí být rovné nule v dané souřadnicové soustavě, protože můžeme předpokládat, že fluktuace komponent rychlosti jsou na sobě nezávislé

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{\overline{v^2}}{2} \begin{pmatrix} g(r) & 0 & 0 \\ 0 & g(r) & 0 \\ 0 & 0 & f(r) \end{pmatrix} \quad (1015)$$

Při transformaci do jiné souřadnicové soustavy danou bází  $\mathbf{e}_i$ , která je vstáhnutá k první bázi pomocí relace  $\tilde{\mathbf{e}}_i = M_i^j \mathbf{e}_j$  dostaneme pro libovolný vektor  $\mathbf{v}$

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i = \tilde{v}^j \tilde{\mathbf{e}}_j = \tilde{v}^j M_j^k \mathbf{e}_k, \quad M_{ik} M_{kj} = \delta_{ij} \quad (1016)$$

což dává

$$v^i = \tilde{v}^j M_j^i, \quad R_{ij} = M_{ik} M_{jl} \tilde{R}_{kl}. \quad (1017)$$

Pak dostaneme

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \frac{\overline{v^2}}{3} [(M_{i1} M_{j1} + M_{i2} M_{j2}) g(r) + M_{i3} M_{j3} f(r)] = \\ &= \frac{1}{3} \overline{v^2} [M_{ik} M_{jk} g(r) + M_{i3} M_{j3} (f(r) - g(r))] = \\ &= \frac{1}{3} \overline{v^2} [\delta_{ij} g(r) + M_{i3} M_{j3} (f(r) - g(r))]. \end{aligned} \quad (1018)$$

Uvažme, že  $M_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_j$ , pak dostaneme  $M_{i3} = \mathbf{e}_i \cdot \tilde{\mathbf{e}}_3 = \mathbf{e}_i \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r}\right) = \frac{r_i}{r}$ . Pomocí tohoto výpočtu dostaneme

$$R_{ij} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \left[ \delta_{ij} g(r) + \frac{r_i r_j}{r^2} (f(r) - g(r)) \right]. \quad (1019)$$

Abychom našli vztah mezi  $f(r)$  a  $g(r)$  použijeme podmínku nestlačitelnosti ve tvaru

$$\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = 0. \quad (1020)$$

Pomocí explicitní formy (1019) dostaneme

$$0 = \frac{\partial R_{ij}}{\partial r_i} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \frac{r_j}{r} \left[ \frac{df}{dr} + \frac{2[f(r) - g(r)]}{r} \right] \quad (1021)$$

což nám dává

$$g(r) = f(r) + \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \quad (1022)$$

a konečně korelační tensor má tvar

$$R_{ij} = \frac{1}{3} \overline{v^2} \left[ \delta_{ij} \left[ f(r) + \frac{r}{2} \frac{df}{dr} \right] - \frac{r_i r_j}{2r} \frac{df}{dr} \right]. \quad (1023)$$

Vidíme tedy, že korelační tensor pro nestlačitelnou, homogenní a isotropní turbulenci je plně určen longituální funkcí  $f(r)$ .

### 7.3.3 Energetické spektrum turbulentních fluktuací

V této kapitole budeme uvažovat Fourierovu transformaci tensoru fluktuací  $R_{ij}$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(\mathbf{r}) e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3r \quad (1024)$$

a inverzní transformaci

$$R_{ij}(\mathbf{r}) = \int \Phi_{ij}(\mathbf{k}) e^{-i\mathbf{k}\mathbf{r}} d^3k . \quad (1025)$$

Podmínka nestlačitelnosti  $\frac{\partial R_{ij}}{\partial r_j} = 0$  implikuje

$$k_i \Phi_{ij} = -\Phi_{ij} k_j . \quad (1026)$$

Jestliže budeme opět uvažovat symetrickou situaci jako v případě tensoru  $R_{ij}$  dostaneme následující formu  $\Phi_{ij}$

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = C(k) k_i k_j + D(k) \delta_{ij} . \quad (1027)$$

Poté s užitím podmínky nestlačitelnosti dostaneme

$$k^2 C(k) = -D(k) . \quad (1028)$$

Pak dostaneme

$$\Phi_{ij} = D(k) \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \equiv \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left( \delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) \quad (1029)$$

kde jsme zadefinovali novou funkci  $E(k)$ . Nyní uvažujme kinetickou energii turbulence

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \overline{v^2} &= \frac{1}{2} R_{ii}(0) = \frac{1}{2} \int d^3k \Phi_{ii}(k) = \\ &= \frac{1}{2} \int d^3k \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left( \delta_{ii} - \frac{k_i k_i}{k^2} \right) = \\ &= \int d^3k \frac{E(k)}{4\pi k^2} \Rightarrow \frac{1}{2} \overline{v^2} = \int_0^\infty E(k) dk \end{aligned} \quad (1030)$$

Vidíme tedy, že  $E(k)$  je energetické spektrum turbulence a  $E(k)dk$  udává množství turbulentní kinetické energie v intervalu  $[k, k + dk]$  vlnového vektoru. Je také jasné, že když určíme  $E(k)$ , pak dostáváme kompletní popis tensoru  $R_{ij}$  pro případ isotropní a homogenní turbulence.

Nyní stručně nastíníme známou Kolgorovovu universální teorii isotropní a homogenní turbulence, kde pomocí rozměrové analýzy je dána forma  $E(k)$ .

### 7.3.4 Rovnovážný turbulentní tok

Naším úkolem je najít výraz pro distribuci kinetické energie  $E(k)$  odpovídající dynamické rovnováze pohybových rovnic tekutiny.

Budeme předpokládat, že jsme v ustáleném stavu, kdy turbulentní tekutina je spojitě buzena, t.j. kinetická energie turbulentních fluktuací je konstantě sycena v systému. Protože kinetická energie je spojitě disipována viskozními silami, což implikuje, že ve stabilním stavu podíly vložené a disipativní energie jsou stejné. Budeme předpokládat, že tento stav nastal a tedy máme turbulentní stav, který je homogenní a isotropní. V roce 1941 Kolmogorov jako první navrhl teorii takového turbulentního stavu.

Můžeme si představit, že turbulentní pole rychlosti je tvořen viry o různé velikosti. Dále, vkládaná energie je typicky indukována do systému na největších škálách. Kolmogorovův přístup je založen na předpokladu, že největší viry předávají energii menším virům a tyto ještě menším atd, což produkuje kaskádu energetického transportu od největších po nejmenší škály, kde dochází k disipaci energie.

**Turbulentní kaskáda** Je přirozené předpokládat, že viry o velikosti  $l$  mají určitou rychlost, která je s nimi spojená. Odpovídající Reynoldsovo číslo je  $Re_l = \frac{vl}{\nu}$  a je očekáváno, že bude velké pro velké viry. Pak můžeme předpokládat, že energie, která je dodávána do systému v rozsahu  $\epsilon$  za jednotku hmoty a za jednotku času v rozsahu největšího víru velikosti  $L$  a rychlosti  $V$ , tak dostaneme

$$Re = \frac{VL}{\nu} \geq 1 . \quad (1031)$$

Energie je poté se přenáší kaskádovým způsobem na menší a menší škály. Pro viry o dostatečně malé velikosti,  $l_d$ , očekáváme, že  $Re \sim 1$  a tedy

$$l_d v_d \sim \nu . \quad (1032)$$

Poté energie obsažená v těchto vírech je disipována v množství  $\epsilon$  na jednotku hmoty za jednotku času takovým způsobem, aby se ustanovila rovnováha. Viry na přechodných škálách slouží k transféru energie od škály  $L$  ke škále  $d$ . Tyto přechodné viry jsou charakterizovány jejich rychlostí  $v$ . Díky dimensionální analýze je jasné, že jediná možnost, jak vyjádřit  $\epsilon$  pomocí  $v$  a  $l$  je

$$\epsilon \sim \frac{v^3}{l} \Rightarrow v = (\epsilon l)^{1/3} . \quad (1033)$$

Tento předpoklad můžeme použít i na menší škály, což dává

$$\begin{aligned} \epsilon &\sim \frac{v_d^3}{l_d} = \frac{v_d^3 l_d^3}{l_d^4} \sim \left( l_d \sim \frac{\nu}{v_d} \right) \frac{\nu^3}{l_d^4} \sim \frac{v_d^4}{\nu} \\ \Rightarrow l_d &\sim \left( \frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \Rightarrow v_d \sim (l_d \epsilon)^{1/3} \sim \nu^{1/4} \epsilon^{1/4} . \end{aligned} \tag{1034}$$

Konečně, s použitím předpokladu, že  $\epsilon \sim V^3/L$  dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{L}{l_d} &\sim \left( \frac{L^4 \epsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} = \left( \frac{L^3 V^3}{\nu^3} \right)^{1/4} = Re^{3/4} , \\ \frac{V}{v_d} &\sim \left( \frac{V^4}{\epsilon \nu} \right)^{1/4} \sim \left( \frac{VL}{\nu} \right)^{1/4} \sim Re^{1/4} . \end{aligned} \tag{1035}$$

Díky těmto relacím můžeme nyní určit přibližnou formu energetického spektra  $E(k)$ . Z předpokladu máme, že největší viry mají charakteristický rozměr  $L$ , což můžeme interpretovat jako maximální délkovou škálu. Pak je jasné, díky vztahu mezi maximální délkovou škálou a minimálním impulsem, dostaneme, že minimální impuls je roven

$$k_L \sim \frac{1}{L} . \tag{1036}$$

Na druhou stranu, nejmenší viry mají velikost  $d$ , což nám dává maximální impuls roven

$$k_d \sim \frac{1}{l_d} . \tag{1037}$$

Interval impulsů

$$\frac{1}{k_L} \ll k \ll k_d = Re^{3/4} k_L \tag{1038}$$

(kde jsme využili skutečnosti, že  $\frac{1}{l_d} \sim Re^{3/4} \frac{1}{L}$ ) se nazývá vnitřní rozsah. Očekáváme, že v tomto intervalu energetické spektrum závisí pouze na  $\epsilon$  a  $k$ , což nám dává

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3}, k_L \ll k \ll k_d . \tag{1039}$$

jako jedinou možnou formu spektrální funkce. Konstanta  $C$  je bezrozměrné číslo známé jako *Kolmogorova konstanta*.

Je dobré říci, že toto Kolmogorovo spektrum nebylo určeno pomocí rigorózní analýzy. Na druhou stranu bylo ověřeno mnohými experimenty.

## 8 Relativistická hydrodynamika

Hmotné medium je popsáno v relativistické fyzice pomocí tenzoru energie hybnosti, který vystupuje na pravé straně Einsteinových rovnic

$$G_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} , \quad (1040)$$

kde  $G$  je gravitační konstanta a  $c$  je rychlost světla.

Formulace relativistické hydrodynamiky musí splňovat základní předpoklad, že rovnice jsou kovariantní. Jinými slovy řečeno, mají stejný tvar ve všech souřadnicových soustavách. Z toho důvodu musí být formulována pomocí  $(D+1)$ -vektoru rychlosti. Také je velmi dobře známo, že kovariantní veličina, která popisuje dynamiku pole, je *Tensor energie impulsu*  $T_{\mu\nu}$ , který vystupuje na pravé straně rovnice (1040). Nyní odvodíme důležitou rovnici, který musí tento tensor splňovat. Uvažujme Bianchiho identitu pro Riemannův tensor

$$\nabla_\rho R^\lambda_{\sigma\mu\nu} + \nabla_\nu R^\lambda_{\sigma\rho\mu} + \nabla_\mu R^\lambda_{\sigma\nu\rho} = 0 . \quad (1041)$$

Nyní provedeme kontrakci indexů  $\lambda$  a  $\mu$  a z definice  $R^\mu_{\sigma\mu\nu} = R_{\sigma\nu}$  dostaneme identitu

$$\nabla_\rho R_{\sigma\nu} - \nabla_\nu R_{\rho\sigma} + \nabla_\lambda R^\lambda_{\sigma\nu\rho} = 0 . \quad (1042)$$

Následně provedeme kontrakci této rovnice s pomocí  $g^{\rho\sigma}$  a dostaneme

$$0 = \nabla_\rho R^\rho_{\nu} - \nabla_\nu R + \nabla^\lambda R_{\lambda\nu} = 2\nabla^\mu (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = 0 . \quad (1043)$$

Jinými slovy, že kovariantní derivace tenzoru  $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R$  je identicky rovna nule. Pak z rovnice (1040) dostaneme

$$\nabla_\mu T^\mu_{\nu} = 0 . \quad (1044)$$

Poznamenejme, že toto musí platit bez ohledu, zda-li jsou splněny pohybové rovnice pro tekutinu.

Je také možné uvažovat obecnější formu kapaliny, která je charakterizována nejen tensorem energie hybnosti, ale také jinými zachovávajícími se náboji, které v relativistické hydrodynamice jsou definovány 4-vektory toku

$$\nabla_\mu J_I^\mu , I = (1, 2, \dots) , \quad (1045)$$

kde index  $I$  označuje všechny konservativní náboje, které charakterizují daný system.



## 8.1 Konstrukce tensoru energie-hybnosti

V této kapitole nastíníme postup, jak zformulovat tensor energie hybnosti pro ideální tekutinu. Víme, že v nerelativistickém případě máme jasně definovaný časový vývoj, čas má rozdílnou roli než prostorové souřadnice. Samozřejmě, toto je vhodné pro studium časového vývoje systému, na druhou stranu je zřejmé, že daný popis není kovariantní, kde princip kovariance je základním principem všech relativistických teorií. Na druhou stranu je možné ukázat, že i v případě kovariantních teorií je možné studovat časový vývoj systému, kdy zavedeme tzv 3 + 1 formalismus, který spočívá v rozdělení variaty na systém tří rozměrných prostorových podprostorů, každý parametrizovaný skalární funkcí, která také parametrizuje časový vývoj systému.

Nyní přistoupíme podrobněji ke konstrukci tensoru energie hybnosti. Uvažujme pozorovatele, který se pohybuje s časupodobnou čtyřrychlostí  $U^\mu$  (pro pozorovatele v klidu vzhledem k dané soustavě máme  $U^0 = c$

Projekce do prostorupodobného směru kolmého na časupodobný vektor  $U^\mu$  je definována projektorem

$$\perp^\mu{}_\nu = \delta^\mu{}_\nu + \frac{1}{c^2} U^\mu U_\nu , \quad (1046)$$

pro který platí

$$\begin{aligned} \perp^\mu{}_\nu \perp^\nu{}_\rho &= \delta^\mu{}_\rho + \frac{2}{c^2} U^\mu U_\nu + \frac{1}{c^4} U^\mu U_\nu U^\nu U_\rho = \delta^\mu{}_\rho + \frac{1}{c^2} U^\mu U_\rho , \\ \perp^\mu{}_\nu U^\nu &= 0 . \end{aligned} \quad (1047)$$

Vidíme tedy, že můžeme provést projekci ve směru pozorovatele, která je dána kontrakcí příslušné veličiny s vektorem  $U^\mu$ , nebo projekci ve směru kolmém. Pak definujeme hustotu energie, jak je vnímána pozorovatelem, dána výrazem

$$\epsilon = \frac{1}{c^2} T_{\mu\nu} U^\mu U^\nu , \quad (1048)$$

zatím co prostoročasová hustota hybnosti je dána kovariantním výrazem

$$\mathcal{P}_\mu = -\perp_\mu{}^\rho U^\mu T_{\rho\nu} . \quad (1049)$$

Nakonec definujeme prostorupodobný smyk

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \perp_\mu{}^\rho \perp_\nu{}^\sigma T_{\rho\sigma} . \quad (1050)$$

Je zřejmé, že tento tensor má pouze prostorupodobné komponenty, protože jeho kontrakce s časupodobným vektorem  $U^\mu$  je rovno nule. Je zřejmé, že můžeme psát tensor energie hybnosti v následujícím tvaru

$$\begin{aligned}
T_{\mu\nu} &= \delta_\mu^\rho \delta_\nu^\sigma T_{\rho\sigma} = (\perp_\mu^\rho - \frac{1}{c^2} U_\mu U^\rho) (\perp_\nu^\sigma - \frac{1}{c^2} U_\nu U^\sigma) T_{\rho\sigma} = \\
&= \mathcal{S}_{\mu\nu} - \frac{1}{c^2} (\perp_\mu^\rho U_\nu U^\sigma + U_\mu U^\rho \perp_\nu^\sigma) T_{\rho\sigma} + \frac{1}{c^4} U_\mu U_\nu U^\rho U^\sigma T_{\rho\sigma} = \\
&= \frac{1}{c^2} U_\mu U_\nu \epsilon + \mathcal{S}_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} (U_\mu \mathcal{P}_\nu + \mathcal{P}_\mu U_\nu) .
\end{aligned} \tag{1051}$$

Poznamenejme, že nyní  $\rho$  znamená hustotu energii, zatím co nerelativistickém popisu vyhradili symbol  $\rho$  pro hustotu hmoty.

Nyní stručně nastíníme, jak z mikroskopického modelu najdeme stavovou rovnici tekutiny. Ve fyzice mnoha částic je možné konstruovat kvantově mechanický operátor počtu částic  $n_{QM}$ , tensor energie hybnosti  $T_{\mu\nu}^{QM}$  a také operátor toku částic, když vyjdeme z fundamentálního Lagrangiánu. Poté, co jsme daný operátor  $T_{\mu\nu}^{QM}$  našli, můžeme provést střední hodnotu této veličiny, jak kvantově mechanickou tak i statistickou, a pak zadefinujeme hustotu energie jako

$$\epsilon = \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu \langle T_{\mu\nu}^{QM} \rangle , \tag{1052}$$

kde

$$u^\mu = \frac{1}{n} \langle n_{QM}^\mu \rangle , \quad n = \langle n_{QM} \rangle . \tag{1053}$$

Vidíme, že je zde rozdíl mezi  $T_{\mu\nu}^{QM}$  a  $T_{\mu\nu}$ . První popisuje stav systému vzhledem k element tekutiny, zatím co druhý popisuje stav elementů tekutiny vzhledem k systému. Podrobněji, můžeme uvažovat soustavu definovanou vektorem  $u^\mu$ , vzhledem ke které je pozorovatel v klidu, a je tedy možné ztotožnit  $u^\mu = U^\mu$ . Je také jasné, že vzhledem k této soustavě spojené s tekutinou neexistuje tok hybnosti a tedy  $\mathcal{P}_\mu = 0$ .

Prostorový smyk je symetrický tensor, který může být vytvořen z  $u^\mu$  a  $g_{\mu\nu}$ . Protože také musí platit, že  $u^\mu \mathcal{S}_{\mu\nu} = 0$  a tedy najdeme

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{3} \mathcal{S} (g_{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u_\mu u_\nu) . \tag{1054}$$

Jestliže identifikujeme  $p = \mathcal{S}/3$ , dostaneme

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} (e + p) u_\mu u_\nu + p g_{\mu\nu} , \tag{1055}$$

což je konečný tvar tensoru energie hybnosti ideální tekutiny.

Díky stavové rovnici  $p = p(e)$ , dostáváme, že máme 4 nezávislé proměnné pro ideální tekutinu, protože také platí  $u^\mu u_\mu = -c^2$ . Je zřejmé, že ve své lokální klidové soustavě, kdy  $u^i = 0, g_{ij} = \delta_{ij}$ , dostaneme

$$T_{ij} = p\delta_{ij}, i, j = 1, \dots, 3 \dots \quad (1056)$$

Jinými slovy platí lokální Planckův zákon. Dále, protože relativistickou tekutinu popisujeme pomocí tensoru energie hybnosti dostaneme, že její pohybové rovnice jsou dány zákonem zachování energie

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad (1057)$$

Shrňme tedy základní principy pro formulování relativistické hydrodynamiky. Specifikujeme daný systém pomocí tensoru energie hybnosti a možných daných toků pomocí vektoru  $u^\mu$  a potencionálně pomocí dalších veličin. Protože hydrodynamický popis má pouze smysl, když daná mikroskopická teorie je ve stavu lokální termodynamické rovnováhy, je jasné, že abychom plně charakterizovali daný systém, musíme použít lokální termodynamické veličiny. Dále musíme popsat, jak různé části tekutiny, které jsou v lokální termodynamické interakce, spolu vzájemně interagují. Abychom toho dosáhli, uvažujme element tekutiny, který je v lokální termodynamické rovnováze a tudíž je popsán lokálními termodynamickými veličinami. Protože si tento element vyměňuje základní termodynamické veličiny se svým okolím, je zřejmé, že bychom měli s ním spojit vektor  $u^\mu$ , který popisuje tok tekutiny a tudíž i transport různých termodynamických veličin. Ukazuje se, že lokální termodynamické proměnné spolu s rychlostí  $u^\mu$  plně popisují tekutinu.

Podrobněji, uvažujme tok hybnosti přes plošný element  $d\mathbf{f}$ , což není nic jiného než síla působící na tento element. Jinými slovy  $T^{ij}df_j$  je  $i$ -tá komponenta síly působící na povrchový element. Uvažujme objemový element v souřadnicové soustavě, kde je v klidu, která je známa jako lokální klidová soustava. V této soustavě platí Pascalův zákon, který nám říká že tlak v daném elementu tekutiny je stejný ve všech směrech a síla je kolmá na plochu, na kterou působí. Pak můžeme napsat

$$T^{ij}df_j = pdf^i, \quad (1058)$$

a tedy

$$T^{ij} = p\delta^{ij}. \quad (1059)$$

Je také jasné, že v lokální klidové soustavě jsou komponenty  $T^{0i}$  jsou rovny nule, neboť v této soustavě je hustota hybnosti nulová. Komponenta  $T^{00}$  je vnitřní hustota energie, kterou označíme jako  $e$ . Jinými slovy, v lokální klidové soustavě dostáváme tensor energie hybnosti v případě ideální tekutiny ve tvaru

$$T^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad (1060)$$

Pak je zřejmé, že v libovolné soustavě dostaneme

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(e + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} . \quad (1061)$$

Komponenty tohoto tensoru v třírozměrné formě mají tvar

$$T^{ij} = \frac{1}{c^2}(e + p)\frac{v^i v^j}{1 - v^2/c^2} + p\delta^{ij} ,$$

$$T^{0i} = \frac{1}{c}(e + p)\frac{v_i}{1 - v^2/c^2} , \quad T^{00} = \frac{1}{1 - v^2/c^2}(e + p) - p .$$

(1062)

Nerelativistický případ odpovídá situaci, kdy  $v \ll c$  a malé rychlosti mikroskopického pohybu částic tekutiny. Poznamenejme, že relativistická vnitřní energie  $e$  zahrnuje také klidovou energii  $nmc^2$ , kde  $m$  je klidová hmotnost jedné částice. Dále, hustota částic odpovídá hustotě částic v lokální klidové soustavě. Na druhou stranu v nerelativistickém popisu používáme hustotu energie v laboratorní soustavě, tedy máme  $mn \rightarrow \rho\sqrt{1 - v^2/c^2}\rho v^2/2$  kde  $\rho$  je nerelativistická hustota hmoty. Pak tedy dostaneme  $T_{00} \rightarrow \rho c^2 + \rho e + \frac{1}{2}\rho v^2$ .

## 8.2 Relativistická supertekutina

Uvažujme relativistickou teorii pole se zachovávajícím se  $U(1)$  nábojem s odpovídajícím se tokem  $J^\mu$  a dále s tensorem energie hybnosti  $T^{\mu\nu}$ . Tyto veličiny splňují rovnice

$$\partial_\mu J^\mu = 0 , \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 . \quad (1063)$$

Dále budeme předpokládat, že tento system je studován při konečné teplotě  $T$  a chemickým potenciálem  $\mu$ .

## 9 Relativistická viskozni hydrodynamika

### 9.1 Relativistická Navier-Stokesova rovnice

Ideální tekutina je definována jako tekutina, kde je vliv viskozity zanedbán. Jestliže chceme vzít do úvahy efekt viskozity, musíme modifikovat tensor energie hybnosti následujícím způsobem

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} , \quad (1064)$$

kde  $T_{(0)}^{\mu\nu}$  je tensor energie impulsu, který má tvar tensoru pro ideální tekutinu. Tvar tohoto tensoru můžeme odvodit následujícím způsobem. Tento tensor musí být funkcí hydrodynamických stupňů volnosti, jmenovitě lorenzovských skalárů  $e, p$ , dále čtyřvektoru rychlosti  $u^\mu$  definovaný jako

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} , \quad (1065)$$

kde  $\tau$  je vlastní čas, který je definován z definice invariance čárového elementu

$$-c^2 d\tau^2 = -c^2 dt^2 + dx^i dx_i = -dt^2 \left[ 1 - \frac{1}{c^2} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx_i}{dt} \right] = -dt^2 \left[ 1 - \frac{v^2}{c^2} \right] . \quad (1066)$$

Pak dostaneme

$$u^\mu = \frac{dt}{d\tau} \frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix} = \gamma(v) \begin{pmatrix} c \\ v^i \end{pmatrix} . \quad (1067)$$

V nerelativistické limitě  $v/c \ll 1$  dostaneme  $\gamma \approx 1 + \frac{v^2}{2c^2}$  a tedy  $u^\mu = (c, v^i)$ . Tensor energie impulsu předpokládáme ve tvaru

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = e(c_0 g^{\mu\nu} + c_1 u^\mu u^\nu) + p(c_2 g^{\mu\nu} + c_3 u^\mu u^\nu) . \quad (1068)$$

V klidové souřadnicové soustavě požadujeme, aby  $T_{(0)}^{00}$  odpovídala hustotě energie  $en$ . Dále požadujeme, aby v klidové soustavě byla hybnost nulová  $T_{(0)}^{0i} = 0$  a aby prostorové komponenty tensoru  $T_{(0)}^{ij}$  měly následující tvar  $T_{(0)}^{ij} = p\delta^{ij}$ .

Jestliže použijeme tyto podmínky v případě tensoru (1068) dostaneme ( $u^\mu = (c, 0)$ ,  $g_{rest}^{00} = -1$ ,  $g_{rest}^{ij} = \delta^{ij}$ )

$$\begin{aligned} T_{(0)}^{00}(rest) &= e = -ec_0 + c_1 c^2 e - pc_2 + pc^2 c_3 = e , \\ T_{(0)}^{ij}(rest) &= ec_0 \delta^{ij} + pc_2 \delta^{ij} = p\delta^{ij} . \end{aligned} \quad (1069)$$

Tyto rovnice mají řešení

$$c_0 = 0, c_1 = \frac{1}{c^2}, c_2 = 1, c_3 = \frac{1}{c^2}. \quad (1070)$$

Jinými slovy dostáváme

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} e u^\mu u^\nu + p g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} p u^\mu u^\nu. \quad (1071)$$

Je užitečné zavést tensor

$$\Delta^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu, \quad (1072)$$

$$\Delta^{\nu\mu} u_\mu = (g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu) u_\nu = u^\mu + \frac{1}{c^2} u^\mu (u^\nu u_\nu) = 0. \quad (1073)$$

$$u_\nu \Delta^{\nu\mu} = 0. \quad (1074)$$

$$\begin{aligned} \Delta^{\mu\nu} \Delta_\nu^\alpha &= (g^{\mu\nu} + \frac{1}{c^2} u^\mu u^\nu) g_{\nu\rho} (g^{\rho\alpha} + \frac{1}{c^2} u^\rho u^\alpha) = \\ &= g^{\mu\alpha} + 2 \frac{1}{c^2} u^\mu u_\alpha + \frac{1}{c^4} u^\mu u_\alpha (u_\rho u^\rho) = \Delta^{\mu\alpha} \end{aligned} \quad (1075)$$

Pak dostaneme následující tvar tensoru energie hybnosti pro ideální relativistickou tekutinu

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2} e u^\mu u^\nu + p \Delta^{\mu\nu}. \quad (1076)$$

V případě, že neexistují externí zdroje, pak tensor energie hybnosti se zachovává a tedy dostaneme

$$\partial_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = 0. \quad (1077)$$

Je užitečné provést projekci této rovnice ve směru rovnoběžném a kolmém na rychlost tekutiny. První je definována pomocí následující rovnice

$$\begin{aligned} u_\nu \partial_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} u_\nu \partial_\mu (e u^\mu u^\nu) + u_\nu \partial_\mu (p \Delta^{\mu\nu}) = \\ &= \frac{1}{c^2} u_\nu u^\nu \partial_\mu u^\mu e + \frac{1}{c^2} u_\nu u^\nu u^\mu \partial_\mu e + \frac{1}{c^2} u_\nu u^\mu \partial_\mu u^\nu e + \\ &\quad + u_\nu \Delta^{\nu\mu} \partial_\mu p + u_\nu \partial_\mu \Delta^{\nu\mu} p = \\ &= -\partial_\mu u^\mu e - u^\mu \partial_\mu e - \partial_\mu u^\mu p = 0 \Rightarrow \\ &\quad u^\mu \partial_\mu e + (p + e) \partial_\mu u^\mu = 0, \end{aligned} \quad (1078)$$

kde jsme použili  $u_\mu u^\mu = -c^2$ , což nám dává

$$\partial_\mu u^\nu u_\nu = \frac{1}{2} \partial_\mu (u^\nu u_\nu) = 0 \quad (1079)$$

Také musíme ukázat, že

$$\begin{aligned} \partial_\mu \Delta^{\nu\mu} u_\nu &= \partial_\mu (\Delta^{\nu\mu} u_\nu) - \Delta^{\nu\mu} \partial_\mu u_\nu = \\ &= -\partial_\mu u^\mu - \partial_\mu u_\nu u^\nu u^\mu = -\partial_\mu u^\mu . \end{aligned} \quad (1080)$$

Pro následující projekci dostaneme

$$\begin{aligned} &\Delta^\alpha_\nu \partial_\mu T_{(0)}^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{c^2} (\Delta^\alpha_\nu \partial_\mu e u^\mu u^\nu + \Delta^\alpha_\nu u^\nu \partial_\mu u^\mu e + \Delta^\alpha_\nu e u^\mu \partial_\mu u^\nu) + \\ &\quad + \Delta^\alpha_\nu \partial_\mu p \Delta^{\mu\nu} + \Delta^\alpha_\nu p \partial_\mu \Delta^{\mu\nu} = \\ &= \frac{1}{c^2} (e + p) u^\mu \partial_\mu u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu} \partial_\mu p \Rightarrow \\ &\quad (e + p) u^\mu \partial_\mu u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu} \partial_\mu p = 0 , \end{aligned} \quad (1081)$$

kde jsme použili

$$\begin{aligned} \Delta^\alpha_\nu \partial_\mu \Delta^{\mu\nu} &= (\delta^\alpha_\nu + \frac{1}{c^2} u^\alpha u_\nu) \frac{1}{c^2} (\partial_\mu u^\mu u^\nu + u^\mu \partial_\mu u^\nu) = \frac{1}{c^2} u^\mu \partial_\mu u^\alpha , \\ \Delta^\alpha_\nu u^\mu \partial_\mu u^\nu &= (\delta^\alpha_\nu + u^\alpha u_\nu) u^\mu \partial_\mu u^\nu = u^\mu \partial_\mu u^\alpha . \end{aligned} \quad (1082)$$

Dále zavedeme následující notaci

$$D = u^\mu \partial_\mu , \quad \nabla^\alpha = \Delta^{\alpha\mu} \partial_\mu \quad (1083)$$

a tedy pohybové rovnice mají tvar

$$\begin{aligned} D e + (e + p) \partial_\mu u^\mu &= 0 , \\ (e + p) D u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu} \partial_\mu p &= 0 , \end{aligned} \quad (1084)$$

což jsou fundamentální rovnice relativistické ideální tekutiny. Abychom jim lépe porozumněli, uvažujme nerelativistickou limitu  $v/c \ll 1$  a tedy v prvním

přibližení  $u^0 \sim c, u^i \sim v^i$  kdy dostaneme

$$\begin{aligned} D = u^\mu \partial_\mu &= c \frac{\partial}{c \partial t} + v^i \frac{\partial}{\partial x^i} = \partial_t + v^i \partial_i , \\ \Delta^0 &= \Delta^{0\mu} \partial_\mu \sim \frac{1}{c} (\partial_t + v^i \partial_i) , \\ \Delta^i &\sim \partial_i . \end{aligned} \tag{1085}$$

Dále uvažujeme nerelativistickou limitu, kdy  $p \ll e$  a kdy vnitřní energie je dominována hustotou  $e \simeq \rho$  pak první rovnice dává

$$\partial_t \rho + v^i \partial_i \rho + \rho \partial_i v^i = \partial_t \rho + \partial_i (v^i \rho) = 0 \tag{1086}$$

což je zjevně rovnice spojitosti. Stejným způsobem dostaneme ze druhé rovnice

$$\rho (\partial_t v^i + v^j \partial_j v^i) + \partial_i p = 0 \Rightarrow (\partial_t v^i + v^j \partial_j v^i) = -\frac{1}{\rho} \partial_i p \tag{1087}$$

což je Eulerova rovnice.

Po shrnutí základních pojmů týkající se relativistické formulace ideální tekutiny přejdeme k problému formulace relativistické viskozní hydrodynamiky.

## 9.2 Relativistická viskozní tekutina

V případě, kdy nebudeme zanedbávat efekt viskozity, musíme uvažovat obecnější tvar tensoru energie hybnosti. Uvažujme tedy tensor ve tvaru

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \Pi^{\mu\nu} , \tag{1088}$$

kde  $T_{(0)}^{\mu\nu}$  je tensor energie hybnosti ideální tekutiny a  $\Pi^{\mu\nu}$  je viskozní část, která zahrnuje efekt disipace.

Dále je nutné uvažovat obecnější tvar čtyřvektoru toku

$$n^\mu = n w^\mu + \nu^\mu , \tag{1089}$$



kde  $T^{\mu\nu}$  a  $n^\mu$  splňují rovnice

$$\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0, \quad \partial_\mu n^\mu = 0. \quad (1090)$$

Nyní je důležité diskutovat význam čtyřrychlosti  $u^\mu$ . V relativistické mechanice tok energie nutně zahrnuje také tok hmoty. Na druhou stranu v případě, že existuje tok tepla, pak definice rychlosti pomocí hustoty toku hmoty není přesný význam. Raději definuje rychlost podmínkou, že v lokální klidové soustavě libovolného elementu tekutiny, je hybnost elementu nulová a energie, vyjádřena pomocí ostatních termodynamických veličin, je vyjádřena stejným způsobem, jako když disipativní procesy nejsou přítomny. Jinými slovy, v lokální klidové soustavě komponenty tenzoru  $\Pi^{00}$  a  $\Pi^{0i}$  jsou rovny nule. Protože v této soustavě platí, že  $u^i = 0$ , dostáváme v libovolné soustavě tensorovou rovnici

$$u_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0. \quad (1091)$$

Podobná podmínka musí platit v případě vektoru  $\nu^\mu$

$$\nu_\mu u^\mu = 0, \quad (1092)$$

protože  $n^0$  komponenta vektoru  $n^\mu$  musí v lokální klidové soustavě být rovna hustotě částic  $n$ . Pomocí těchto argumentů dostaneme

$$u_\mu T^{\mu\nu} = -e u^\nu. \quad (1093)$$

Poznamenejme, že podmínku (1091) je možné chápat jako výběr soustavy pro definici 4– rychlosti tekutiny. Někdy se tato podmínka nazývá Landau-Lifšic soustavou. Tomuto můžeme lépe porozumět, když si uvědomíme, že pro systém se zachovávajícím se nábojem zde existuje odpovídající tok  $n^\mu$ , který může být použit alternativně k definici rychlosti tekutiny, což je tzv. Eckertův systém kdy  $u_\mu n^\mu = n$ . Tyto možnosti odrážejí naší volnost v definování lokální klidové soustavy buď jako soustavy, kde buď hustota energie (Landau-Lifšic) či hustota náboje (Eckart) jsou v klidu. Protože fyzika nesmí záviset na výběru soustavy, je možné ukázat, že difuze náboje v jedné souřadnicové soustavě odpovídá toku tepla v druhé soustavě.

Formu tenzoru  $\Pi^{\mu\nu}$  a vektoru  $\nu^\mu$  je možné určit z požadavku, že každá hydrodynamická teorie musí odrážet zákon růstu entropie, který musí být obsažen v pohybových rovnicích. Vyjdeme z projekcí rovnice  $\partial_\mu T^{\mu\nu}$  defino-

vaných v předchozím výkladu

$$\begin{aligned} u_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= -\partial_\mu u^\mu (e + p) - u^\mu \partial_\mu e + u_\nu \partial_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 , \\ \Delta^\alpha{}_\nu \partial_\mu T^{\mu\nu} &= \frac{1}{c^2} (e + p) u^\mu \partial_\mu u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu} \partial_\mu p + \Delta^\alpha{}_\nu \partial_\mu \Pi^{\mu\nu} = 0 . \end{aligned} \quad (1094)$$

Tuto rovnice je možné dále zjednodušit s pomocí následujícího výrazu

$$u_\nu \partial_\mu \Pi^{\mu\nu} = \partial_\mu (u_\nu \Pi^{\mu\nu}) - \Pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu = -\frac{1}{2} (\Pi^{\mu\nu} \partial_\mu u_\nu + \Pi^{\nu\mu} \partial_\nu u_\mu) = -\Pi^{\mu\nu} \partial_{(\mu} u_{\nu)} \quad (1095)$$

a také s použitím identity

$$\partial_\mu = u_\mu D + \nabla_\mu \quad (1096)$$

Pak tedy dostáváme konečný tvar pohybových rovnic pro relativistickou viskozni tekutinu

$$\begin{aligned} \partial_\mu u^\mu (e + p) + De + \Pi^{\mu\nu} \partial_{(\mu} u_{\nu)} &= 0 , \\ \frac{1}{c^2} (e + p) u^\mu \partial_\mu u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu} \partial_\mu p + \Delta^\alpha{}_\nu \partial_\mu \Pi^{\mu\nu} &= 0 . \end{aligned} \quad (1097)$$

V tomto okamžiku je viskozni tensor energie hybnosti ještě neurčen. Ukazuje se, že obecně tento tensor může mít různý tvar a tím dostáváme různé teorie viskozni hydrodynamiky.

Naším cílem je najít formu tensoru  $\Pi^{\mu\nu}$ . Vyjdeme z druhého termodynamického zákona, který říká, že entropie musí lokálně růst. Z předchozího výkladu známe základní vstahy mezi hustotami vnitřní energie, tlaku v případě absence zachovávajících se nábojů (nulový chemický potenciál)

$$e + p = Ts , Tds = de . \quad (1098)$$

Druhý termodynamický zákon můžeme napsat v kovariantním tvaru

$$\partial_\mu s^\mu \geq 0 , \quad (1099)$$

kde jsme zavedli 4–vektor etropie, který ve stavu lokální teromodynamické rovnováhy má tvar

$$s^\mu = su^\mu . \quad (1100)$$

Pomocí termodynamických relací můžeme přepsat druhý termodynamický zákon do tvaru

$$\begin{aligned}
\partial_\mu s^\mu &= u^\mu \partial_\mu s + s \partial_\mu u^\mu = \\
&= Ds + \frac{e+p}{T} \partial_\mu u^\mu = \\
&= \frac{1}{T} De + \frac{e+p}{T} \partial_\mu u^\mu = -\frac{1}{T} \Pi^{\mu\nu} \partial_{(\mu} u_{\nu)} \geq 0
\end{aligned} \tag{1101}$$

Je vhodné rozdělit  $\Pi^{\mu\nu}$  na dvě části,  $\pi^{\mu\nu}$ , která má nulovou stopu  $\eta_{\mu\nu} \pi^{\nu\mu} = 0$  a zbytek s nenulovou stopou

$$\Pi^{\mu\nu} = \pi^{\mu\nu} + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} \Pi, \quad \Pi = \eta_{\mu\nu} \Pi^{\nu\mu} \tag{1102}$$

protože máme

$$\eta_{\mu\nu} \Pi^{\nu\mu} = \frac{1}{3} \eta_{\mu\nu} \Delta^{\nu\mu} \Pi = (4 + \frac{1}{c^2} u_\mu u^\mu) \Pi = \Pi. \tag{1103}$$

Zavedeme nový výraz pro bezestopou část  $\partial_{(\mu} u_{\nu)}$

$$\Delta_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} = 2\partial_{(\mu} u_{\nu)} - \frac{2}{3} \Delta_{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha \tag{1104}$$

která skutečně splňuje

$$\eta^{\mu\nu} \Delta_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} = 2\partial_\mu u^\mu - 2\partial_\mu u^\mu = 0. \tag{1105}$$

Poznamenejme také, že platí

$$\Pi^{\mu\nu} u_\nu = \pi^{\mu\nu} u_\nu + \frac{1}{3} \Delta^{\mu\nu} u_\nu \Pi = \pi^{\mu\nu} u_\nu \tag{1106}$$

a tedy z podmínky  $\Pi^{\mu\nu} u_\nu = 0$  dostaneme, že

$$\pi^{\mu\nu} u_\nu = 0. \tag{1107}$$

Pak konečně dostaneme

$$\partial_\mu s^\mu = -\frac{1}{2T} \pi^{\mu\nu} \Delta_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} - \frac{1}{3} \Pi \partial_\alpha u^\alpha \geq 0. \tag{1108}$$

Vidíme, že tato podmínka je splněna, jestliže platí

$$\pi^{\mu\nu} = -\eta\nabla^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} , \Pi = -\zeta\partial_\alpha u^\alpha , \eta \geq 0 , \zeta \geq 0 , \quad (1109)$$

protože pak dostáváme

$$\partial_\mu s^\mu = \eta + \zeta \geq 0 . \quad (1110)$$

Je zjevné, že můžeme stotožnit  $\eta$  a  $\zeta$  s koeficientem smykové a objemové viskozity. Ze stejných důvodů můžeme nazývat systém rovnic (1097),(1102) a (1109) jako relativistickou Navier-Stokesovou rovnicí. Ačkoliv je tato rovnice přitažlivě jednoduchá, ukážeme, že se vyznačuje patologickým chováním pro trochu složitější profily toku.

### 9.3 Problem akauzálního chování v relativistické Navier-Stokesově rovnici

Uvažujme malé poruchy hustoty energie a rychlosti tekutiny v systému, který byl na počátku v rovnováze a v klidu

$$e = e_0 + \delta e(t, \mathbf{x}) , \quad u^\mu = (c, \vec{0}) + \delta u^\mu(t, \mathbf{x}) , \quad (1111)$$

kde pro jednoduchost budeme předpokládat, že porucha závisí na jedné souřadnici. Pak relativistická Navier-Stokesova rovnice určuje pohybovou rovnici pro tyto poruchy. Podrobněji se zajímáme o rovnici

$$\frac{1}{c^2}(e + p)u^\mu\partial_\mu u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu}\partial_\mu p + \Delta_\nu^\alpha\partial_\mu\Pi^{\mu\nu} = 0 . \quad (1112)$$

Abychom našli její linearizovanou formu, uvažme, že tensor  $\Pi^{\mu\nu}$  má tvar

$$\begin{aligned} \Pi^{\mu\nu} &= -\eta\Delta^{\langle\mu}u^{\nu\rangle} - \frac{1}{3}\zeta\Delta^{\mu\nu}\partial_\alpha u^\alpha = \\ &= -\eta(2\partial^{(\mu}u^{\nu)} - \frac{2}{3}\Delta^{\mu\nu}\partial_\alpha u^\alpha) - \frac{1}{3}\zeta\Delta^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (1113)$$

and tedy  $xy$  komponenta daného tensoru má tvar

$$\Pi^{xy} = -\eta(\partial^x u^y + \partial^y u^x) - \frac{1}{3}(\zeta - 2\eta)\Delta^{xy}\partial_\alpha u^\alpha = -\eta_0\partial_x\delta u^y \quad (1114)$$

kde jsme zanedbali členy vyšších řádů v  $\delta u$  a kde  $\eta_0$  je hodnota  $\eta$  v základním stavu. Pak dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2}(e+p)u^\mu\partial_\mu u^\alpha + \Delta^{\alpha\mu}\partial_\mu p + \Delta_\nu^\alpha\partial_\mu\Pi^{\mu\nu} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{1}{c^2}(e_0+p_0)\partial_t\delta u^y + \partial_x\Pi^{xy} &\Rightarrow \\ \partial_t\delta u^y - \frac{\eta_0 c^2}{e_0+p_0}\partial_x^2\delta u^y &= 0 . \end{aligned} \tag{1115}$$

Abychom zkoumali individuální mody, uvažujme flukтуаční pole ve tvaru

$$\delta u^y(t, x) = e^{-i\omega t + ikx} f_{\omega, k} . \tag{1116}$$

Vložením tohoto předpokládaného řešení do linearizované rovnice dostaneme

$$\omega = \frac{\eta_0 c^2}{e_0 + p_0} k^2 . \tag{1117}$$

Pomocí této rovnice najdeme grupovou rychlost

$$v_T(k) = \frac{d\omega}{dk} = \frac{2\eta_0 c^2}{e_0 + p_0} k , \tag{1118}$$

a my vidíme, že lineárně závisí na vlnovém čísle a tedy pro větší a větší vlnová čísla grupová rychlost bez omezení roste. Jinými slovy, pro dostatečně velká  $k$  tato grupová rychlost překročí rychlost světla a tedy dojde k porušení kauzality. Jinými slovy, relativistická Navier-Stokesova rovnice není kauzální teorií.

Jinými slovy, relativistická Navier-Stokesova rovnice vykazuje nefyzikální chování pro krátké vlnové délky a tedy dává platný popis pouze v případě dlouhých vlnových délek. Samozřejmě, můžeme říci, že toto není principiální problém, protože když se díváme na hydrodynamiku jako na efektivní teorii pro dlouhé vlnové délky, pak bychom mohli říci, že její platnost je omezená nějakou minimální vlnovou délkou. Na druhou stranu teorie s omezením platnosti se vyznačuje praktickým omezením při výpočtech. Na druhou stranu víme, že mody s velkým vlnovým číslem jsou spojeny s nestabilitami a teorie musí být nějakým způsobem regulována. Dále, uvažujme mód, který v jedné souřadnicové soustavě se pohybuje rychlostí vyšší než je rychlost světla

v jedné souřadnicové soustavě se pohybuje zpět v čase v jiné souřadnicové soustavě. Jak víme, hydrodynamika je teorie, která požaduje dobře definovanou množinu počátečních podmínek. Na druhou stranu zde jsou módy, které se pohybují zpět v čase a tedy počáteční podmínky nemohou být libovolné. Tento fakt má za následek, že není možné řešit N-S rovnici ani numericky.

## 9.4 Müller-Israel-Stewart theory

V předchozí části jsmem odvodili relativistickou NS rovnici z druhého termodynamického zákona  $\partial_\mu s^\mu \geq 0$ , kdy jsme implicitně použili formu rovnovážného toku entropie  $s^\mu = su^\mu$ . Na druhou stranu obecně neplatí, že tok entropie musí mít tvar odpovídající rovnovážnému tvaru v případě disipativního toku, který je mimo termodynamickou rovnováhu. Jestliže opustíme tento předpoklad, pak můžeme připustit, že nerovnovážený entropický tok má příspěvek z viskozního tensoru. Tento model se také někdy nazývá jako rozšířená nevratná termodynamika. Jestliže tedy budeme předpokládat, že odklon od termodynamické rovnováhy není velký a tedy korekce vyšších řádů mohou být zanedbány, pak můžeme psát

$$s^\mu = su^\mu - \frac{\beta_0}{2T} u^\mu \Pi^2 - \frac{\beta_2}{2T} u^\mu \pi_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} , \quad (1119)$$

kde  $\beta_0, \beta_2$  jsou koeficienty. Poté dostaneme

$$\begin{aligned} \partial_\mu s^\mu &= \partial_\mu su^\mu + s \partial_\mu u^\mu - \partial_\mu \left( \frac{\beta_0}{2T} \right) u^\mu \Pi^2 - \frac{\beta_0}{2T} \partial_\mu u^\mu \Pi^2 - \frac{\beta_0}{T} u^\mu \partial_\mu \Pi \Pi - \\ &\quad - \partial_\mu \left( \frac{\beta_2}{2T} \right) u^\mu \pi_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} - \frac{\beta_2}{2T} \partial_\mu u^\mu \pi_{\alpha\beta} \pi^{\alpha\beta} - \frac{\beta_2}{T} u^\mu \partial_\mu \pi^{\alpha\beta} \pi_{\alpha\beta} = \\ &= -\frac{1}{2T} \pi^{\mu\nu} \left( \nabla_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} + \pi_{\alpha\beta} T D \left( \frac{\beta_2}{T} \right) + 2\beta_2 D \pi_{\mu\nu} + \beta_2 \pi_{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha \right) - \\ &\quad - \frac{\Pi}{T} \left( \partial_\alpha u^\alpha + \frac{1}{2} \Pi T D \left( \frac{\beta_0}{T} \right) + \beta_0 D \Pi + \frac{1}{2} \beta_0 \Pi \partial_\alpha u^\alpha \right) \geq 0 . \end{aligned} \quad (1120)$$

kde jsme opět použili

$$\partial_\mu su^\mu + s \partial_\mu u^\mu = -\frac{1}{T} \Pi^{\mu\nu} \partial_{(\mu} u_{\nu)} . \quad (1121)$$

Vidíme tedy, že tato nerovnost je splněna, když bude platit

$$\begin{aligned}\pi_{\mu\nu} &= -\eta \left( \nabla_{\langle\mu} u_{\nu\rangle} + \pi_{\mu\nu} T D \left( \frac{\beta_2}{T} \right) + 2\beta_2 D \pi_{\mu\nu} + \beta_2 \pi_{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha \right), \\ \Pi &= \zeta \left( \partial_\alpha u^\alpha + \frac{1}{2} \Pi T D \left( \frac{\beta_0}{T} \right) + \beta_0 D \Pi + \frac{1}{2} \beta_0 \Pi \partial_\alpha u^\alpha \right),\end{aligned}\tag{1122}$$

kde tyto vztahy souhlasí s Navier-Stokesovou rovnicí v limitě  $\beta_0, \beta_2 \rightarrow 0$ . Tyto rovnice definují tzv. Muller-Israel-Stewart teorii.

Je možné studovat dynamiku poruch okolo rovnovážného stavu stejně jako v předchozím případě. Ukazuje se, že v dané teorii se neobjevuje problém kauzality, za předpokladu, kdy  $\beta_0, \beta_2$  nejsou příliš malé. Na druhou stranu i tento formalismus není zcela uspokojivý, neboť neznáme původ  $\beta_0, \beta_2$  a také, zda-li předpoklad, že entropický tok je kvadratickou funkcí hydrodynamických stupňů volnosti je správný. Je zřejmé, že je žádoucí mít fundamentálnější způsob, jak obdržet relativistickou viskozni hydrodynamiku.

## 9.5 Relativistická viskozni hydrodynamika z kinetické teorie

Víme, že relativistická rozdělovací funkce splňuje rovnici

$$p^\mu \partial_\mu f = \mathcal{C}[f], \quad p^\mu p_\mu = -m^2 c^2\tag{1123}$$

kde  $\mathcal{C}$  je srážkový člen, jenž je funkcí  $f$  a závisí na interakci mezi částicemi. Pro systém v globální rovnováze  $f(\mathbf{p}, \mathbf{x}, t) = f_{(0)}(\mathbf{p})$  a tedy Boltzmannova rovnice dává

$$p^\mu \partial_\mu f_{(0)} = 0 = \mathcal{C}[f_{(0)}]\tag{1124}$$

což nám opět říká, že srážkový člen je roven nule v případě globální rovnováhy. Na druhou stranu rovnice  $p^\mu \partial_\mu f = 0$  může platit pro dva rozdílné oblasti platnosti: První, kdy můžeme ignorovat srážky, kdy je systém typicky daleko od rovnovážného stavu, a za druhé, kdy jsou srážky tak silné, že je systém v rovnováze a tedy srážkový člen je roven nule. První případ se typicky projevuje v situacích, kdy časová škála spojená s časovým vývojem systému je tak krátká, že efekt částicových interakcí může být zanedbán. Ovšem, koneckonců, srážky částic později se začnou projevovat a jejich efekt vede k tomu, že se systém začne blížit termální rovnováze. Právě tento případ,

který je také někdy definován jako limita velkých vlnových délek a malých frekvencí, který odpovídá hydrodynamickému popisu.

Pomocí jednočásticové distribuční funkce definujeme tensor energie hybnosti jako

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} p^\mu p^\nu \delta(p^\mu p_\mu + m^2 c^2) 2\theta(p^0) f(p, x) \equiv T^{\mu\nu} . \quad (1125)$$

## 9.6 Relativistická ideální tekutina z kinetické teorie

Pro jednoduchost budeme uvažovat ultrarelativistický případ, kdy můžeme zanedbat klidovou hmotnost částice. Pak z předchozí rovnice dostaneme

$$\int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} p^2 \delta(p^2) 2\theta(p^0) f(p, x) = 0 \Rightarrow T_\mu^\mu = 0 . \quad (1126)$$

Pro další účely zavedeme konvenci

$$\int d\xi = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^3} \delta(p^\mu p_\mu) 2\theta(p^0) . \quad (1127)$$

Jestliže nyní vezmeme první moment Boltzmanovy rovnice, dostaneme

$$\int d\xi p^\nu p^\mu \partial_\mu f(p, x) = - \int d\xi p^\nu \mathcal{C}[f] = \partial_\mu \int d\xi p^\nu p^\mu f(p, x) = \partial_\mu T^{\mu\nu} . \quad (1128)$$

Jak víme, pro interakce, při kterých se zachovává energie a hybnost, integrál přes srážkový člen je roven nule

$$\int d\xi p^\nu \mathcal{C}[f] = 0 . \quad (1129)$$

Pak tedy dostáváme, že první moment Boltzmanovy rovnice vede k základní rovnici relativistické hydrodynamiky ve tvaru  $\partial_\nu T^{\nu\mu} = 0$ .

Uvažujme rovnovážnou distribuční funkci

$$f_{eq}(x, p, t) = f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) , \quad (1130)$$

kde  $u^\mu$  je 4–vektor, který se redukuje do tvaru  $u^\mu \rightarrow (c, 0)$  v klidové soustavě teplotního rezervoaru o teplotě  $T$ . Pak dostaneme

$$T_{(0)}^{\mu\nu} = \int d\xi p^\mu p^\nu f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) = a_{20} u^\mu u^\nu + a_{21} \Delta^{\mu\nu} , \quad (1131)$$



kde koeficienty  $a_{20}$  a  $a_{21}$  závisí pouze na teplotě a jejich hodnotu získáme, když provedeme kontrakci předchozí rovnice s  $u^\mu u^\nu$  a  $\Delta^{\mu\nu}$

$$\begin{aligned} \int d\xi (p^\mu u_\mu)^2 f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) &= c^4 a_{20} , \\ \int d\xi p^\mu p^\nu \Delta_{\mu\nu} f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) &= 3a_{21} \Rightarrow \\ a_{21} &= \frac{1}{3} \int d\xi (p^\mu p_\mu + \frac{1}{c^2} (p^\mu u_\mu)(p^\nu u_\nu)) f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) , \end{aligned} \quad (1132)$$

V případě, kdy  $u^\mu$  souhlasí s vektorem čtyřrychlosti tekutiny, pak dostáváme, že  $T_{(0)}^{\mu\nu}$  má tvar tensoru energie hybnosti ideální tekutiny, kde  $a_{20} = \frac{e}{c^2}$  a  $a_{21} = p$ . Poznamenejme, že v případě nehmotných částic, dostaneme  $a_{21} = \frac{1}{3}a_{20}$ , což dává  $p = \frac{1}{3}e$ .

Abychom vypočítali koeficienty  $a_{20}, a_{21}$ , musíme konkrétně specifikovat rovnovážnou distribuční funkci  $f_{eq}$ . Uvažujme případ Boltzmannovy rozdělovací funkce, kdy

$$f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) = \exp \left[ - \frac{(p^\mu u_\mu)}{k_B T} \right] . \quad (1133)$$

V tomto případě můžeme  $a_{20}$  vypočítat v soustavě, kdy  $u^\mu = (c, 0)$ , kdy dostaneme

$$a_{20} = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^3} (p^0)^2 \delta(p^i p_i - (p^0)^2) 2\theta(p^0) e^{-\frac{p^0 c}{k_B T}} = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^\infty dp p^3 e^{-pc/k_B T} = \frac{3k_B^4}{c^4 \pi^2} T^4 . \quad (1134)$$

## 9.7 Nerovnovážný stav

Z předchozí diskuze je zřejmé, že v případě, kdy distribuční funkce závisí pouze na kombinaci  $p^\mu u_\mu$ , pak tensor energie hybnosti definovaném pomocí kinetické teorie je stejný, jako v případě ideální relativistické tekutiny. Jestliže systém je *lokálně* v termodynamické rovnováze, pak  $f_{eq}$  je kompletně charakterizována vektorovou funkcí, která specifikuje lokální klidovou soustavu termálního rezervoaru  $u(x)$  a lokální teplotou. Jinými slovy, systém, který je v lokální termodynamické rovnováze, je popsán s pomocí relativistické ideální tekutiny. Odklon od termodynamické rovnováhy vede k odklonu od

ideální relativistické tekutiny a tedy se dostáváme k viskozní relativistické teorii. Uvažujme tedy následující tvar rozdělovací funkce

$$f(p, x) = f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{k_B T} \right) [1 + \delta f(p, x)] , \quad (1135)$$

kde  $\delta f(p, x) \ll 1$ . Pak dostaneme

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \int d\xi p^\mu p^\nu f_{eq} \delta f \equiv T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} , \quad (1136)$$

kde uvažujeme ultrarelativistický limit. Korekční člen můžeme vzít jako Taylorův rozvoj

$$\delta f(p, x) = c + p^\mu c_\mu + p^\mu p^\nu c_{\mu\nu} , \quad (1137)$$

Když bychom nyní použili tento rozvoj ve výrazu

$$\pi^{\mu\nu} = \int d\xi p^\mu p^\nu f_{eq} \delta f \quad (1138)$$

dostali bychom výrazy pro koeficienty  $c, c_\alpha, c_{\alpha\beta}$ . Na druhou stranu víme, že  $\delta f$  musí být algebraickou funkcí hydrodynamických stupňů volnosti  $e, p, u^\mu, g^{\mu\nu}, \pi^{\mu\nu}$ . Poté požadavek, že  $\delta f$  musí být roven nule pro rovnovážnou konfiguraci dává, že  $c = 0, c_\alpha = 0$ , neboť jediné v tomto případě je člen lineární  $p^\alpha$  nulový pro rovnovážnou konfiguraci. V případě kvadratického členu můžeme předpokládat, že  $c_{\alpha\beta}$  má tvar  $c_{\alpha\beta} = c_2 \pi_{\alpha\beta}$ , protože  $\pi_{\alpha\beta}$  je roven nule pro rovnovážnou konfiguraci a kde  $c_2$  je funkci hydrodynamických proměnných  $e, p$ . Pak tedy dostáváme

$$\pi^{\mu\nu} = \pi_{\alpha\beta} c_2 I^{\mu\nu\alpha\beta} , \quad (1139)$$

kde  $I^{\mu\nu\alpha\beta}$  odpovídá případu  $n = 4$  integrální definice

$$I^{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \int d\chi p^{\mu_1} p^{\mu_2} \dots p^{\mu_n} f_{eq} . \quad (1140)$$

Jestliže nyní provedeme kontrakci rovnice (1139) dostaneme  $c_2 = \frac{1}{2a_{42}}$ , kde koeficient  $a_{42}$  může být počítán stejným způsobem jako koeficienty  $a_{20}, a_{21}$  v předchozí kapitole za předpokladu znalosti funkce  $f_{eq}$ . Například v případě Boltzmanova plynu dostaneme

$$a_{42} = (e + p) T^2 . \quad (1141)$$

S použitím těchto výrazů dostáváme konečný tvar slabě nerovnovážné distribuční funkce

$$f(p, x) = f_{rov} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{T} \right) \left[ 1 + \frac{1}{2a_{42}} p^\alpha p^\beta \pi_{\alpha\beta} \right]. \quad (1142)$$

Na druhou stranu je nutné zdůraznit, že stále není zřejmý vztah mezi Boltzmanovou rovnicí a viskozí hydrodynamikou, neboť jsme ještě nespecifikovali srážkový člen, který má samozřejmě komplikovanou formu závislou na konkrétní formě interakce mezi částicemi. Na druhou stranu forma tohoto srážkového členu může být zjednodušena pomocí předpokladu malého odklonu od termodynamické rovnováhy. Toho můžeme dosáhnout následujícím způsobem. Budeme předpokládat, že velikost  $\delta f$  souvisí s gradientem hydrodynamických proměnných. Pak můžeme určit  $\mathcal{C}[f]$  do nejnižšího řádu tak, že vložíme  $f = f_{eq}[1 + \delta f]$  do Boltzmanovy rovnice

$$\mathcal{C}[f] = p^\mu \partial_\mu [f_{eq}(1 + \delta f)] = p^\mu \partial_\mu f_{eq} + O(\delta^2), \quad (1143)$$

kde zanedbáme členy druhého řádu, které vyplývají z toho, že samotná funkce  $\delta f$  je členem prvního řádu v opravě, zatím co derivace dodává další řád v  $\delta$ . Například v případě Boltzmanovy distribuční funkce  $f_{eq} = e^{-x}$  dostaneme

$$\begin{aligned} p^\mu \partial_\mu f_{eq} \left( \frac{p^\mu u_\mu}{T} \right) &= -p^\mu p^\nu \partial_\mu \left( \frac{u_\nu}{T} \right) f_{eq} = \\ &= -p^\mu p^\nu \left( \nabla_\mu - \frac{1}{c^2} u_\mu D \right) \frac{u_\nu}{T} f_{eq} = \\ &= -\frac{p^\mu p^\nu}{T} f_{eq} \left( \nabla_\mu u_\nu - u_\nu \frac{1}{T} \nabla_\mu T + \frac{1}{c^2} u_\mu u_\nu u^\rho \frac{\partial_\rho T}{T} - \frac{1}{c^2} u_\mu u^\rho \partial_\rho u_\nu \right) = \\ &= -\frac{p^\mu p^\nu}{T} f_{eq} \left( \nabla_\mu u_\nu + \frac{1}{2} (u_\mu \nabla_\nu \ln T - u_\nu \nabla_\mu \ln T) + \frac{1}{3c^2} u_\mu u_\nu \nabla_\alpha u^\alpha \right) + O(\delta^2), \end{aligned} \quad (1144)$$

s použitím identity

$$\partial_\mu = \delta_\nu^\mu \partial_\nu = \left( \Delta_\mu^\nu \partial_\nu - \frac{1}{c^2} u_\mu u^\nu \partial_\nu \right) = \Delta_\mu - \frac{1}{c^2} u_\mu D \quad (1145)$$

a s použitím základních hydrodynamických rovnic. Nyní využijeme faktu, že  $p^\mu p^\nu$  je symetrický výraz a dále kontrakce  $p^\mu p^\nu$  s  $g_{\mu\nu}$  dává nulu pro nehmotný případ. Pak tedy dostaneme

$$\mathcal{C}[f] = -\frac{p^\mu p^\nu}{2T} \nabla_{\langle \mu} u_{\nu \rangle} f_{eq} = \frac{p^\mu p^\nu}{2T\eta} \pi_{\mu\nu} f_{eq} \quad (1146)$$

s použitím toho, že Navier-Stokesova rovnice je platná v prvním přiblížení. Jinými slovy předchozí výraz dává vztah mezi srážkovým členem a viskozni hydrodynamikou do prvního přiblížení.

S pomocí takto formulované kinetické teorie se můžeme podívat na Muller-Israel-Stewart teorii z nového pohledu. Jako první krok poznamenejme, že v případě zachovávajících se srážek máme  $\int d\chi \mathcal{C} = 0$  a tedy nulový moment Boltzmanovy rovnice dává

$$\int d\chi p^\mu \partial_\mu f = \partial_\mu \int d\chi p^\mu f = \partial_\mu n^\mu = 0 , \quad (1147)$$

což je zákon zachování toku. Stejným způsobem první moment Boltzmanovy rovnice dává zákon zachování tensoru energie hybnosti, jak vyplývá ze vztahu  $\int d\chi p^\alpha \mathcal{C} = 0$ . Konečně druhý moment Boltzmanovy rovnice dává informaci ohledně nerovnovážné hydrodynamiky systému. Tyto komplikované výpočty vedou k rovnici

$$\pi^{\mu\nu} + \frac{a_{52} T \eta}{a_{42}^2} [\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu D \pi^{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta}^{\mu\nu} \pi^{\rho\beta} \nabla_\rho u^\alpha + \pi^{\mu\nu} \partial_\alpha u^\alpha + \pi^{\mu\nu} D \ln T] = \eta \nabla^{<\mu} u^{\nu>} , \quad (1148)$$

kde

$$P_{\alpha\beta}^{\mu\nu} = \Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu + \Delta_\beta^\mu \Delta_\alpha^\nu - \frac{2}{3} \Delta^{\mu\nu} \Delta_{\alpha\beta} . \quad (1149)$$

Vidíme tedy, že  $\pi^{\mu\nu}$  splňuje komplikovanou rovnici obsahující gradienty čtyřrychlosti. Obecně máme následující pohled na relativistickou hydrodynamiku jako teorii v mocninách gradientů. Podrobněji, tensor energie hybnosti má tvar

$$T^{\mu\nu} = T_{(0)}^{\mu\nu} + \pi^{\mu\nu} , \quad (1150)$$

kde v případě ideální tekutiny  $\pi^{\mu\nu}$  neobsahuje žádné gradienty (nulový řád) a tedy

$$\pi^{\mu\nu} = 0 . \quad (1151)$$

Navier-Stokesova rovnice obsahuje gradienty prvního řádu

$$\pi^{\mu\nu} = \eta \nabla^{<\mu} u^{\nu>} . \quad (1152)$$

Konečně Muller-Israel-Stewart teorie obsahuje gradienty druhého řádu

$$\pi^{\mu\nu} = \eta \nabla^{<\mu} u^{\nu>} + \tau_\pi [\Delta_\alpha^\mu \Delta_\beta^\nu D \pi^{\alpha\beta} + \dots] \quad (1153)$$

## 10 Relativistká hydrodynamika, kvark gluonov plazma a AdS

Relativistické srážky těžkých iontů, t.j. nukleonů, jejichž atomová váha je větší než uhlík. Parametr, který charakterizuje srážky těžkých iontů, je srážková energie v soustavě spojené s hmotným středem na každý nukleonový pár  $\sqrt{s}$  a geometrie srážejících se jader, protože například jádra zlata jsou typicky větší než jádra mědi. Říkáme, že srážky jsou relativistické, jestliže  $\sqrt{s}/2$  je větší než hmotnost jádra. Pro Lorentzův faktor tedy dostáváme

$$\gamma = \frac{m\gamma c^2}{mc^2} = \frac{E^{celk}}{m} \simeq \frac{\sqrt{s}}{2GeV}, \quad (1154)$$

a tedy typicky platí  $\gamma > 1$ . Experimenty v Národní laboratoři v Brookhavenu (AGS, RHIC) a v CERNU (SPS) poskytly množství dat pro  $Au + Au$  srážky (AGS, RHIC) a  $Pb + Pb$  srážky (SPS), které probíhaly na intervalech energií  $\sqrt{s} \sim 2.5 - 4.3 GeV$  v AGS a  $\sqrt{s} \sim 8 - 17.5 GeV$  v SPS a konečně  $\sqrt{s} \sim 130 - 200 GeV$  v RHIC. Bylo zjištěno, že hustota částic, které jsou produkovány v těchto srážkách, roste významně s  $\sqrt{s}$ , což dále vede k vyšším hustotám energie, což nám dovoluje studovat atomovou hmotu za mezí deconfimentu.

Pro  $Au+Au$  srážky v RHIC, dva svazky jader zlata byly urychleny v opačných směrech a pak dojde k jejich srážkám, jakmile každý svazek dosáhne předepsané energie. Poté těsně po srážce vývoj ve směru kolmém na počáteční směr paprsku (transversální směry) mohou být považován jako statický, zatím co dynamika je dominována lingituální expansi systému.

Podrobněji, můžeme rozdělit vývoj do čtyř fází vlastního času. Ve **fázi I**, která následuje těsně po srážce, je před rovnovážná fáze charakterizovaná silnými gradienty a velkými kalibračními poli, kdy hydrodynamický popis není možný. Doba trvání tohoto procesu je neznámá, neboť nerozumíme procesu, kdy se kvantová hydrodynamika pro konečné hodnoty vazebné konstanty blíží rovnovážnému stavu. **Fáze II** je fáze blízko rovnovážnému stavu, který je charakterizován malými gradienty, kdy je možný hydrodynamický popis, jestliže lokální teplota je nad teplotou deconfimentu. Tato fáze trvá asi  $5 - 10 fm/c$ ,  $5 - 10((5 - 10) \times 10^{-15} m / (3 \times 10^8 ms^{-1}))$ , dokud systém nebude natolik zředěný, kdy vstoupí do fáze **Fáze III**, která se nazývá fází hadronového plynu. Hadronový plyn je charakterizován velkým koeficientem viskozity, což vede k tomu, že hydrodynamický popis není možný, na druhou

stranu je dobře popsateľný kinetickou teorií. Tato fáze skončí, jakmile účinný průřez rozptylu hadronů bude tak malý, že částice přestanou vzájemně interagovat. Konečně ve **Fázi IV** hadrony se pohybují po rovných čarách, dokud nedoputují do detektoru.

Jestliže tedy budeme předpokládat, že systém, který je vytvořen relativistickými srážkami dvou inotů dosáhne téměř rovnovážného stavu v časovém okamžiku  $\tau = \tau_0$  měřeném ve vlastním čase, pak odpovídající dynamika ve **fázi II** by měla být popsateľná pomocí hydrodynamických rovnic. Abychom tohoto byli schopni, je nutné specifikovat hodnoty hydrodynamických stupňů volnosti  $e, p, u^\mu, \pi^{\mu\nu}$  v čase  $\tau = \tau_0$ , stavovou rovnicí  $p = p(e)$ , transportní koeficienty a současně také proceduru, kdy fáze II přechází do fáze III. Bohužel žádný z těchto údajů není znám z prvních principů, proto je nutné se omezit na některé modely.

## 10.1 Bjorkenův tok

Fyzika relativistických srážek těžkých iontů je založena na Bjorkenově předpokladku, že v longituální vzdálenosti  $z$  od bodu (a po čase  $t$ ) od srážky, hmota by se měla pohybovat s rychlostí  $v_z = \frac{z}{t}$ . Jako první krok zanedbáme dynamiku ve směrech kolmých na srážky  $v_x = v_y = 0$ . Uvažujeme velmi energetické nukleony, které se k sobě blíží blízko hranic světelného kuželu směřujícího do minulosti, a které se srazí v čase  $t = 0$  v bodě  $z = 0$ . Definujme vlastní čas jako

$$\tau = \sqrt{t^2 - z^2} . \quad (1155)$$

Oblast prostoročasu, pro který  $\tau^2 = t^2 - z^2 > 0$  je nazývána časupodobná oblast, zatím co  $\tau^2 = t^2 - z^2 < 0$  se nazývá prostorupodobná oblast. Prostorupodobná oblast není dostupná pro fyzikální částici, zatím co pro hmotnou částici je dostupná pouze časupodobná oblast.

Uvažujme nyní Lorentzovu transformaci do soustavy souřadnic pohybující se rychlostí  $V$ . Tato transformace má tvar

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma \\ -\beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix} \quad (1156)$$

kde  $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$  je Lorentzův faktor.

Uvažujme nyní proměnnou  $y$ , známou jako uhlovou rychlost, definovanou

jako

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{c^{-1}E + p_z}{c^{-1}E - p_z} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + cp_z/E}{1 - cp_z/E} = \tanh^{-1} \left( \frac{cp_z}{E} \right) = \tanh^{-1} c\beta_L, \quad (1157)$$

kde

$$c \frac{p_z}{E} = \frac{c \frac{mv}{\sqrt{1-\beta^2}}}{\frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}}} = \frac{v}{c} = \beta. \quad (1158)$$

Úhlová rychlost má výhodu, že je aditivní při longituálním boostu. Jinými slovy částice, které uhlovou rychlost  $y$  v jedné souřadnicové soustavě, má uhlovou rychlost  $y + dy$  v druhé souřadnicové soustavě, která se pohybuje relativně k první souřadnicové soustavě s rychlostí  $-dy$  ve směru osy  $z$ . Toto je možné lehce vidět z výrazu pro relativistické skládání rychlostí

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}, \quad (1159)$$

kde  $v_1, v_2$  jsou rychlosti ve směru osy  $z$ . Alternativně můžeme psát

$$\beta = \frac{\beta_1 + \beta_2}{1 + \beta_1 \beta_2}, \beta = \frac{v}{c}. \quad (1160)$$

Uvažujme nyní vztah pro hyperbolický tangens

$$\tanh(\alpha + \gamma) = \frac{\tanh(\alpha) + \tanh(\gamma)}{1 + \tanh(\alpha) \tanh(\gamma)}. \quad (1161)$$

Pak je zřejmé, že aditivní zákon má tvar zákona pro skládání hyperbolických tangensů, jestliže zavedeme rychlost  $y$  jako

$$y = \tanh^{-1}(\beta). \quad (1162)$$

Jinými slovy, při Lorentzových transformacích dostáváme, že uhly rychlosti se jednoduše sčítají. Alternativně, je možné ukázat, že Lorentzova transformace odpovídá hyperbolické rotaci v Minkowském prostoročasu. Pomoci úhlu rychlosti můžeme psát

$$\beta = \tanh y, \gamma = \sqrt{1 - \beta^2} = \frac{1}{\cosh y}. \quad (1163)$$

a tedy rovnice pro transformaci souřadnic může být napsána jako

$$\begin{pmatrix} t' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cosh y & -\sinh y \\ -\sinh y & \cosh y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t \\ z \end{pmatrix}. \quad (1164)$$

Je také dobré vědět, že úhlová rychlost je analogie nerelativistické rychlosti. Podrobněji, v nerelativistické limitě, kdy  $p \ll mc$  dostáváme

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{p^2 + m^2 c^2} + p_z}{\sqrt{p^2 + m^2 c^2} - p_z} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{mc + p_z}{mc - p_z} \sim \frac{1}{2} \ln \left( 1 + 2 \frac{p_z}{mc} \right) \approx \frac{p_z}{mc} = \frac{v_z}{c}. \end{aligned} \quad (1165)$$

Jako poslední zdefinujeme tzv pseudo-úhel rychlosti. Uvažujme částice, která je emitována pod úhlem  $\theta$  vzhledem k ose dané nalétávajícím svazkém částic. Pak úhlová rychlost této částice má tvar

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{2} \ln \frac{c^{-1} E + p_z}{c^{-1} E - p_z} = \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{c^{-1} \sqrt{m^2 c^2 + p^2} + p \cos \theta}{c^{-1} \sqrt{m^2 c^2 + p^2} - p \cos \theta} \end{aligned} \quad (1166)$$

Pro velmi velké energie  $p \gg mc$  můžeme zanedbat hmotnost  $m$  a pak dostáváme

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{p + p \cos \theta}{p - p \cos \theta} = -\ln \tan \frac{\theta}{2} \equiv \eta \quad (1167)$$

kde  $\eta$  se nazývá pseudoúhel rychlosti. Toto je vhodný parametr pro experimenty, kdy detaily částice, jako hmotnost, hybnost, jsou neznámé, pouze známe úhel rozptylu.

Za velice krátký okamžik po srážce, excitované stupně volnosti slabě interagují, ale jejich distribuce není termální, a tedy se pohybují volně s rychlostí  $v_z$  od centra srážky, což se označuje jako před rovnovážná fáze. Tyto trajektorie odpovídají rovným čarám s rychlostmi  $z/t$ . Poté, za čas  $\tau_0 \sim 3.3 \times 10^{-24} s$  interakce budou dostatečně silné, aby dokázaly obnovit lokální termodynamickou rovnováhu a kdy hmota v čase  $\tau$  je ve formě termální směsi kvarků,



antikvarků a gluonů. Právě tato fáze může být popsána v jazyku hydrodynamiky, kde máme pět zachovávajících se rovnic

$$\begin{aligned}\partial_\mu N^\mu &= 0 , \\ \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0 .\end{aligned}\tag{1168}$$

Jestliže tedy známe počáteční stav tekutiny a stavovou rovnici  $p = p(e)$ , můžeme v principu řešit tyto rovnice numericky a tím obdržet prostoročasovou evoluci tekutiny.

V hydrodynamickém popisu srážek těžkých iontů je vhodné použít souřadnice  $(\tau, x, y, \eta)$  místo  $(t, x, y, z)$

$$\begin{aligned}x^\mu &= (ct, x, y, z) \rightarrow x^m = (\tau, x, y, \eta) , \\ t &= \tau \cosh \eta, \tau = \sqrt{c^2 t^2 - z^2} , \\ z &= \tau \sinh \eta , \eta = \frac{1}{2} \ln \frac{ct + z}{ct - z}\end{aligned}\tag{1169}$$

V těchto souřadnicích  $(\tau, x, y, \eta)$  dostaneme metriku

$$\begin{aligned}ds^2 &= -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 = \\ &= -d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + \tau^2 d\eta^2 .\end{aligned}\tag{1170}$$

Nyní má tedy metrika tvar  $\text{diag}(-1, 1, 1, \frac{1}{\tau^2})$ . Poznamenejme, že nyní máme nenulové Christoffelovy symboly

$$\Gamma_{jk}^i = \frac{1}{2} g^{im} \left( \frac{\partial g_{mj}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{mk}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{jk}}{\partial x^m} \right)\tag{1171}$$

kde v souřadnicích  $(\tau, x, y, \eta)$  máme tyto nenulové symboly

$$\Gamma_{\eta\tau}^\tau = \tau , \Gamma_{\tau\eta}^\eta = \frac{1}{\tau} .\tag{1172}$$

Poznamenejme, že kovariantní derivace mají tvar

$$\begin{aligned}\nabla_i A^j &= \partial_i A^j + \Gamma_{jk}^i A^k , \\ \partial_i A^{jk} &= \partial_A^{jk} + \Gamma_{im}^j T^{mk} + \Gamma_{im}^k T^{mj} .\end{aligned}\tag{1173}$$

Pak dostáváme následující rovnice

$$\begin{aligned}
\partial_\mu N^\mu &= \partial_\tau N^\tau + \partial_x N^x + \partial_y N^y + \partial_\eta N^\eta + \frac{1}{\tau} N^\tau , \\
\partial_\mu T^{\mu\tau} &= \partial_\tau T^{\tau\tau} + \partial_x T^{\tau x} + \partial_y T^{\tau y} + \partial_\eta T^{\tau\eta} + \tau T^{\eta\eta} + \frac{1}{\tau} T^{\tau\tau} , \\
\partial_\mu T^{\mu x} &= \partial_\tau T^{\tau y} + \partial_x T^{xy} + \partial_y T^{yy} + \partial_\eta T^{y\eta} + \frac{1}{\tau} T^{\tau x} , \\
\partial_\mu T^{\mu y} &= \partial_\tau T^{\tau y} + \partial_x T^{xy} + \partial_y T^{yy} + \partial_\eta T^{y\eta} + \frac{1}{\tau} T^{\tau y} , \\
\partial_\mu T^{\mu\eta} &= \partial_\tau T^{\tau\eta} + \partial_x T^{x\eta} + \partial_y T^{y\eta} + \partial_\eta T^{\eta\eta} + \frac{3}{\tau} T^{\eta\tau} .
\end{aligned} \tag{1174}$$

V principu je možné řešit tyto rovnice numericky. My se ale omezíme na jednodimensionální Bjorkenův tok, kdy čtyřrychlost má tvar  $u^\mu = (1, 0, 0, 0)$  a odpovídající komponenty tenzoru energie hybnosti mají tvar

$$T^{\tau\tau} = e , T^{xx} = p , T^{yy} = p , T^{\eta\eta} = \frac{p}{\tau^2} . \tag{1175}$$

Kde jsme použili

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(e + p)u^\mu u^\nu + pg^{\mu\nu} \tag{1176}$$

a tedy

$$\begin{aligned}
T^{\tau\tau} &= \frac{1}{c^2}(e + p)c^2 - p = e , \\
T^{\eta\eta} &= pg^{\tau\tau} = \frac{1}{\tau^2}p ,
\end{aligned} \tag{1177}$$

Pak tedy dostáváme

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu T^{\mu\tau} &= \partial_\tau T^{\tau\tau} + \tau T^{\eta\eta} + \frac{1}{\tau} T^{\tau\tau} = \\
&= \frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{e + p}{\tau} = 0 .
\end{aligned} \tag{1178}$$

Jestliže nyní budeme konstantní rychlost zvuku  $c_s$ , kdy  $p = c_s e$ , pak dostaneme analytický výsledek

$$\frac{\partial e}{\partial \tau} + \frac{(1 + c_s^2)e}{\tau} = 0 \Rightarrow e(\tau) = e(\tau_0) \left(\frac{\tau_0}{\tau}\right)^{1+c_s^2} . \tag{1179}$$

Vidíme tedy, že hustota energie klesá od své počáteční hodnoty s exponentem, který závisí na hodnotě rychlosti zvuku. Pro ideální plyn relativistických částic máme  $c_s^2 = \frac{1}{3}$ , což nám pak dává

$$e \sim \tau^{-4/3} . \quad (1180)$$

Ke stejnému závěru můžeme dospět, když vezmeme do úvahy, že kvark gluonové plazma může mít nulovou stopu tensoru energie hybnosti, a což nám dává

$$T^{\mu\nu} g_{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(e + p)(u^\mu u_\mu) + 4p = -e + 3p = 0 \quad (1181)$$

a tedy máme stavovou rovnici ve tvaru  $p = \frac{1}{3}e$  a opět dostáváme Bjorkenův zákon

$$e \sim \frac{const}{\tau^{4/3}} . \quad (1182)$$

Je zřejmé, že dalšího zpřesnění daného výsledku může být dosaženo zahrnutím efektů viskozity, kdy obecně dostaneme  $e = e(\tau)$ . Je zjevné, že hydrodynamický popis je velmi užitečný i v této, na první pohled velmi vzdálené oblasti teoretické fyziky. Daleko pozoruhodnější je skutečnost, že tento hydrodynamický popis může mít duální podobu pomocí slavné AdS/CFT korespondence.

## 11 Nelineární dynamika tekutin z gravitace

Dá se ukázat, že každá hydrodynamická teorie je charakterizována konečným počtem transportních koeficientů, které mohou být určeny pomocí mikroskopické teorie, alespoň z principu. Na druhou stranu, jestliže máme systémy, které z principu jsou silně interagující, je velmi obtížné získat tyto hodnoty pomocí mikroskopické teorie a proto hledáme jiné metody, jak tyto koeficienty určit. Jednou z těchto možností je hypotetický vztah mezi strunovou teorií na Anti-deSitterově prostoru a konformní teorií na jeho hranici.

Uvažujme  $d$ -dimensionální teorii pole na variatě  $\mathcal{B}_d$ , která je holograficky duální strunové teorii na pozadí, jenž asymptoticky se blíží  $AdS_{d+1}$ . Klasickým příkladem je dualita mezi Type IIB strunovou teorií na  $AdS_5 \times S^5$  a dynamickou  $N = 4$  SYM na hranici.

$N = 4$  SYM má dva bezrozměrné parametry, 'tHooft vazební konstantu  $\lambda = g_{YM}^2 N$  a dimenzi kalibrační grupy  $N$ . Předpokládá se, že v limitě velkého  $N$  a velkého  $\lambda$  je dynamika této teorie popsána klasickou gravitací na  $AdS_5$ ,

protože duální teorie má slabou vazebnou konstantu a dále máme makroskopicky velký  $AdS_5$ . Jinými slovy máme popis pomocí gravitace vázané na hmotná pole na asymptoticky  $AdS_5$  pozadí. Pro jednoduchost se omezíme na dynamiku gravitačního pole, což má za následek, že v duální teorii pole budeme studovat pouze dynamiku tensoru energie hybnosti.

Začneme tedy se strunovým pozadím ve formě  $AdS_{d+1} \times X$ , kde  $X$  je kompaktní vnitřní varieta, která zajišťuje, že máme konsistentní strunový základní stav. Zajímáme se tedy o dynamiku Einsteinovy gravitace se zápornou kosmologickou konstantou

$$S_{bulk} = \frac{1}{16\pi G_N^{d+1}} \int d^{d+1}x \sqrt{-G} (R - 2\Lambda) , \quad (1183)$$

kde používáme konvenci, kde  $(M, N, \dots)$  označují vnitřní souřadnice, zatímco  $(\mu, \nu, \dots)$  odpovídají souřadnicím v teorii pole či na hranici. Konečně,  $(i, j, \dots)$  označuje prostorové souřadnice na hranici. Nyní z akce (1183) dostaneme Einsteinovy rovnice

$$R_{MN} - \frac{1}{2} G_{MN} R + \Lambda G_{MN} = 0 . \quad (1184)$$

Provedeme-li kontrakci této rovnice s  $g^{MN}$  dostaneme

$$R = \frac{2(d+1)}{d-1} \Lambda \quad (1185)$$

a tedy když zvolíme  $\Lambda = -\frac{d(d-1)}{2\alpha^2}$  dostaneme, že řešením Einsteinovy rovnice je Anti-deSitterův prostor s křivostí

$$R = -\frac{d(d+1)}{\alpha^2} . \quad (1186)$$

Jinými slovy  $AdS_{d+1}$  je řešením Einsteinových rovnice a je interpretován jako základní stav v duální teorii pole. Poznamenejme, že globální  $AdS_{d+1}$  má hranici Einsteinův statický vesmír  $R \times S^{d-1}$ . Na druhou stranu rozdílne hranice dostaneme, když budeme uvažovat různé souřadnice popisující  $AdS_{d+1}$ . Například, při použití Poincarého suřadnic, které samozřejmě nepokrývají  $AdS_{d+1}$  kompletně, dostaneme hranici ve formě Minkowského prostoročasu  $R^{d-1,1}$  a tedy můžeme uvažovat duální teorii definovanou na tomto prostoročase. Uvažujme tedy, že máme metriku  $g$  na hranici  $\mathcal{B}_d$ . Pak vnitřní geometrie má metriku (v nultém přiblížení Fefferman-Grahamově rozvoji)

$$ds^2 = \frac{1}{z^2} (dz^2 + g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu) . \quad (1187)$$

Prostoročasy, s touto metrikou, se označují jako asymptotické  $AdS_{d+1}$  prostoročasy.

Zajímá nás popis teorie pole, kdy je daná teorie popsána pomocí kanonického ansámblu, přesněji, kdy je daná teorie pole v lokální termodynamické rovnováze. Na druhou stranu se ukazuje, že fázová struktura teorie pole na hraniční varietě je  $\mathcal{B}_d$  je velmi zajímavá, což může být vysvětleno pomocí skutečnosti, že je možné mít bezrozměrné podíly, které charakterizují netriviální geometrii pozadí. Klasickým příkladem je hraniční varieta  $\mathcal{B}_d = R \times S^{d-1}$ , kde nízko teplotní fáze je popsána jako vazebná fáze s volnou energií řádu  $O(1)$ , zatím co vysoce teplotní fáze odpovídá bezvazebné situace, kdy volná energie je řádově  $O(N^2)$ . První fáze je duální termálnímu plynu v  $AdS_{d+1}$ , zatím co druhá má geometrický popis pomocí Schwarzschildovy černé díry v  $AdS_{d+1}$ .

Hydrodynamický popis je možný v případě velkých vlnových délek, což je možné pouze v odvázané fázi, která může nastat pouze za vysokých teplot. Toto je možné vidět ze skutečnosti, že fázová struktura konformní teorie pole je určena bezrozměrným podílem následujících délkových škál: Jestliže  $\mathcal{B}_d$  má křivost  $R_c$  a zajímá nás situace v kanonickém ansamblu o teplotě  $T$ , pak fázová struktura závisí na  $R_c T$ . Na druhou stranu střední volná dráha systému je  $l_{mfp} \sim 1/T$  vidíme, že Taylorův rozvoj v gradientu bude dobře definován, když  $R_c T \gg 1$ , což může být ekvivalentně vyjádřeno jako požadavek, aby variace v křivosti pozadí byly malé v jednotkách lokální teploty, což nám také říká, že můžeme aproximovat hraniční metriku metrikou, která je lokálně rovná. Tato analýza je v souladu se skutečností, že pro CFT na Minkowského prostoročase, kde neexistuje žádná délková charakteristická škála, dostáváme triviální fázovou strukturu. Teorie je vždy odvázaná na  $R^{d-1,1}$ .

Jinými slovy, abychom konstruovali teorii duální hydrodynamice na hraniční varietě  $\mathcal{B}_d$ , můžeme uvažovat jako počáteční bod hranici s rovnou metrikou a zahrnou členy obsahující křivost, když provedeme expanzi v gradientech. Ukazuje se, že viskozní hydrodynamika v prvním přiblížení nezávisí na křivosti hranice, která se objeví až v druhém přiblížení.

## 11.1 Schwarzschildova černá díra v $AdS_{d+1}$

Uvažujme geometrii, která je duální termální teorii pole na Minkowského prostoročase. Tato teorie je Schwarzschildova- $AdS_{d+1}$  černá díra, jejíž délkový

element má tvar

$$ds^2 = -r^2 f(br) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(br)} + r^2 \delta_{ij} dx^i dx^j, f(r) = 1 - \frac{1}{r^d}. \quad (1188)$$

Toto je jednoparametrické řešení, jehož horizont událostí má velikost  $r_+$ , který také určuje teplotu černé díry

$$T = \frac{d}{4\pi b}. \quad (1189)$$

Nyní můžeme generovat  $d$ -parametrickou skupinu řešení tím, že provedeme Lorentzovu transformaci podél translačně invariantních souřadnic  $x^i$ , čímž dostaneme řešení

$$ds^2 = \frac{dr^2}{r^2 f(br)} + r^2 (-f(br) u_\mu u_\nu + P_{\mu\nu}) dx^\mu dx^\nu, \quad (1190)$$

kde

$$u^0 = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}, u^i = \frac{\beta_i}{\sqrt{1 - \beta^2}}, \quad (1191)$$

kde teplota  $T$  a rychlosti  $\beta_i$  jsou konstanty s  $\beta^2 = \beta_i \beta^i$  a  $P^{\mu\nu} = u^\mu u^\nu + \eta^{\mu\nu}$ . Tyto řešení jsou generovány souřadnicovou transformací s následující fyzikální interpretací. Grupa isometrií  $AdS_{d+1}$  prostoru je  $SO(d, 2)$ , kde Poincarre algebra spolu s dilatací tvoří význačnou podalgebru této grupy. Rotace  $SO(d)$  a translace  $R^{1,d-1}$ , které patří do této podalgebry, jasně zachovávají formu metriky danou v rovnici (1188). Na druhou stranu, další symetrie této grupy, kterými jsou Lorentzovy rotace a dilatace, působí netriviálně na dané řešení a generují  $d$  parametrickou množinu řešení. Tyto parametry, které charakterizují řešení uvnitř  $AdS$ , jsou přesně hydrodynamické stupně volnosti, to jest teplota a rychlost.

Řešení (1190) je asymptoticky  $AdS_{d+1}$ , které má holografický tensor energie hybnosti na hranici. Protože řešení (1190) obsahuje konstantní parametry, odpovídá situaci, kdy na hranici máme teorii v globálním termální rovnováze. Abychom dostali plný hydrodynamický popis, musíme porušit teorii z dané globální rovnováhy, což se dá provést, když budeme předpokládat, že termodynamické proměnné závisí na souřadnicích  $x^\mu$ , které parametrizují hranici, kdy můžeme předpokládat, že i metrika na hranici je funkcí souřadnic, abychom vzali do úvahy vazby s křivostí. Jestliže budeme předpokládat, že tyto změny jsou velmi pomalé, můžeme konstruovat řešení jako poruchový rozvoj v derivacích vzhledem k souřadnicím, které parametrizují hranici.

Nyní je nutné zdůraznit jeden důležitý bod. Zatím co je zjevné, že je celkem jednoduché provést zobecnění, kdy  $b$  a  $\beta_i$  jsou funkcemi  $t, x^i$ , je zde ale problém s regularitou Schwarzschildových souřadnic, které nejdou regulární na horizontu událostí. Je zjevné, že daleko vhodnější by bylo pracovat se souřadnicemi, které jsou regulární kdekoliv mimo bod  $r = 0$ . Ve skutečnosti se dá ukázat, že tensor energie hybnosti tekutiny generují regulární prostoročasy odpovídající černé díře v asymptotickém  $AdS_{d+1}$ .

Podrobněji, uvažujme opět Fefferman-Grahamovu podobou  $AdS_{d+1}$  metriky

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dz^2 + g_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu) . \quad (1192)$$

Abychom našli asymptotický  $AdS_{d+1}$  prostoročas s danou hranicí  $\mathcal{B}_d$ , je nutné předepsat jak metriku  $g_{\mu\nu}$  na hranici  $\mathcal{B}_d$ , tak i hraniční tensor energie hybnosti  $T_{\mu\nu}$ . Pomocí těchto veličin můžeme konstruovat vnitřní řešení jako poruchový rozvoj v Feffermann-Graham radiální proměnné  $z$ . Řešení v prvním přiblížení má tvar

$$ds^2 = \frac{1}{z^2}(dz^2 + (g_{\mu\nu} + az^d T_{\mu\nu})dx^\mu dx^\nu) . \quad (1193)$$

Toto schéma pro konstrukci vnitřního prostoročasu s pomocí dat na hranici je velmi dobře vyvinuto ve formalismu známém jako holografická renormalizace. Na druhou stranu tento postup ne vždy generuje regulární vnitřní prostoročasy. Abychom tomu porozumněli, uvažujme jednotlivé stupně volnosti. Bezestopý, symetrický tensor na  $\mathcal{B}_d$  má  $\frac{d(d+1)}{2} - 1$  stupňů volnosti. Na druhou stranu dynamické pohybové rovnice jsou  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ , kterých je  $d$ , z čehož vyplývá že máme neurčený systém pro  $d > 2$ , jak vyplývá z jednoduchých počtů

$$\frac{d(d+1)}{2} - 1 - d = \frac{(d+1)}{2}(d-2) \quad (1194)$$

Na druhou stranu tensor energie hybnosti pro tekutinu je popsán  $d$  stupni volnosti, teplotou a rychlostí.

Abychom dostali regulární řešení, ukážeme, jak konstruovat gravitační řešení duální libovolnému toku tekutiny pomocí souřadnic, které jsou regulární na horizontu událostí. Uvažujme tedy Lorentzovsky transformované Schwarzschild- $AdS_{d+1}$  řešení

$$ds^2 = -2u_\mu dx^\mu dr - r^2 f(br)u_\mu u_\nu dx^\mu dx^\nu + r^2 P_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu , \quad (1195)$$

kde jsme použili Eddington-Finkelstein souřadnice.

## 12 Konformní hydrodynamika

V této kapitole se zaměříme na jednu z moderních oblastí současné hydrodynamiky, kterou je studium konformní tekutiny. Jako první krok začneme s Weylovými transformacemi různých veličin, které definují tekutinu. Poznamenejme, že Weylova transformace je transformace metriky ve tvaru

$$g_{\mu\nu}(x) = e^{2\phi(x)}\tilde{g}_{\mu\nu}(x) , \quad g^{\mu\nu}(x) = e^{-2\phi(x)}\tilde{g}^{\mu\nu}(x) , \quad (1196)$$

kde  $g_{\mu\nu}$  je původní metrika, zatímco  $\tilde{g}_{\mu\nu}$  je nová metrika. Začneme s Christofferym symbolem

$$\Gamma^\mu_{\nu\rho} = \frac{1}{2}g^{\mu\sigma}(\partial_\nu g_{\sigma\rho} + \partial_\rho g_{\sigma\nu} - \partial_\sigma g_{\nu\rho}) \quad (1197)$$

Pak máme následující vztah mezi  $\Gamma^\mu_{\nu\rho}$  a  $\tilde{\Gamma}^\mu_{\nu\rho}$

$$\begin{aligned} \Gamma^\mu_{\nu\rho} &= \frac{1}{2}e^{-2\phi}\tilde{g}^{\mu\sigma}(\partial_\nu(e^{2\phi}\tilde{g}_{\sigma\rho}) + \partial_\rho(e^{2\phi}\tilde{g}_{\sigma\nu}) - \partial_\sigma(e^{2\phi}\tilde{g}_{\nu\rho})) = \\ &= \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \delta^\mu_\rho\partial_\nu\phi + \delta^\mu_\nu\partial_\rho\phi - \tilde{g}^{\mu\sigma}\partial_\sigma\phi\tilde{g}_{\nu\rho} \end{aligned} \quad (1198)$$

Nechť  $u^\mu$  je 4- rychlost popisující pohyb tekutiny. Protože platí

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 = \tilde{g}_{\mu\nu}\tilde{u}^\mu\tilde{u}^\nu = -1 \quad (1199)$$

dostáváme

$$u^\mu = e^{-\phi}\tilde{u}^\mu . \quad (1200)$$

Pak dostaneme, že projektor  $P^{\mu\nu}$  jak

$$P^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} + u^\mu u^\nu = e^{-2\phi}(\tilde{g}^{\mu\nu} + \tilde{u}^\mu\tilde{u}^\nu) = e^{-2\phi}\tilde{P}^{\mu\nu} . \quad (1201)$$

Transformace kovariantní derivace má tvar

$$\begin{aligned} \nabla_\mu u^\nu &= \partial_\mu u^\nu + \Gamma^\nu_{\mu\sigma}u^\sigma = \\ &= e^{-\phi}[\tilde{\nabla}_\mu\tilde{u}^\nu + \delta^\mu_\nu\partial_\sigma\phi - \tilde{g}_{\mu\lambda}\tilde{u}^\lambda\tilde{g}^{\nu\sigma}\partial_\sigma\phi] \end{aligned} \quad (1202)$$



S pomocí této rovnice dostaneme transformační vstahy pro další důležité hydrodynamické veličiny

$$\begin{aligned}
\vartheta &\equiv \nabla_\mu u^\mu = e^{-\phi}[\tilde{\vartheta} + d\tilde{u}^\sigma \partial_\sigma \phi - \tilde{u}^\sigma \partial_\sigma \phi] , \\
a^\nu &\equiv u^\mu \nabla_\mu u^\nu = e^{-2\phi}[\tilde{a}^\nu + \tilde{u}^\mu \delta_\mu^\nu \tilde{u}^\sigma \partial_\sigma \phi - \tilde{u}^\mu \tilde{g}_{\mu\lambda} \tilde{u}^\lambda \tilde{g}^{\nu\sigma} \partial_\sigma \phi] = \\
&= e^{-2\phi}[\tilde{a}^\nu + \tilde{P}^{\nu\sigma} \partial_\sigma \phi] \\
\mathcal{A}_\nu &\equiv a_\nu - \frac{\vartheta}{d-1} u_\nu = \mathcal{A}_\nu + \partial_\nu \phi .
\end{aligned} \tag{1203}$$

Definujem Weylovu kovariantní derivaci  $\mathcal{D}$  následujícím způsobem. Necht  $Q_{\nu\dots}^{\mu\dots}$  je tensorová veličina, která se při Weylově transformaci chová jako

$$Q_{\nu\dots}^{\mu\dots} = e^{-w\phi} \tilde{Q}_{\nu\dots}^{\mu\dots} \tag{1204}$$

Poté

$$\mathcal{D}_\lambda Q_{\nu\dots}^{\mu\dots} = e^{-w\phi} \tilde{\mathcal{D}}_\lambda \tilde{Q}_{\nu\dots}^{\mu\dots} \tag{1205}$$

kde

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\lambda Q_{\nu\dots}^{\mu\dots} &= \nabla_\lambda Q_{\nu\dots}^{\mu\dots} + w\mathcal{A}_\lambda Q_{\nu\dots}^{\mu\dots} + \\
&+ [g_{\lambda\alpha} \mathcal{A}^\mu - \delta_\lambda^\mu \mathcal{A}_\alpha - \delta_\alpha^\mu \mathcal{A}_\lambda] Q_{\nu\dots}^{\alpha\dots} + \dots \\
&- [g_{\alpha\nu} \mathcal{A}^\alpha - \delta_\lambda^\alpha \mathcal{A}_\nu - \delta_\nu^\alpha \mathcal{A}_\lambda] Q_{\alpha\dots}^{\mu\dots} - \dots
\end{aligned} \tag{1206}$$

Dá se ukázat, že tato kovariantní derivace je kompatibilní s metrikou  $\mathcal{D}_\lambda g_{\mu\nu} = 0$ . S pomocí této kovariantní derivace můžeme přepsat konformní hydrodynamiku do konformně invariantního tvaru. Explicitně, máme

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}_\mu u^\nu &= \nabla_\mu u^\nu + \mathcal{A}_\mu u^\nu - [g_{\mu\alpha} \mathcal{A}^\nu - \delta_\mu^\nu \mathcal{A}_\alpha - \delta_\alpha^\nu \mathcal{A}_\mu] u^\alpha = \\
&= \nabla_\mu u^\nu + u_\mu a^\nu - \frac{\vartheta}{d-1} P_\mu^\nu = \sigma_\mu^\nu + \omega_\mu^\nu = e^{-\phi} \tilde{\mathcal{D}}_\mu \tilde{u}^\nu
\end{aligned} \tag{1207}$$

kde jsme zdefinovali

$$\begin{aligned}
\sigma^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(P^{\mu\lambda} \nabla_\lambda u^\nu + P^{\nu\lambda} \nabla_\lambda u^\mu) - \frac{1}{d-1} \vartheta P^{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^\mu u^\nu + \mathcal{D}^\nu u^\mu) = e^{-3\phi} \tilde{\sigma}^{\mu\nu} , \\
\omega^{\mu\nu} &= \frac{1}{2}(P^{\mu\lambda} \nabla_\lambda u^\nu - P^{\nu\lambda} \nabla_\lambda u^\mu) = \frac{1}{2}(\mathcal{D}^\mu u^\nu - \mathcal{D}^\nu u^\mu) = e^{-3\phi} \tilde{\omega}^{\mu\nu} .
\end{aligned} \tag{1208}$$

Konformní tekutina je charakterizována čtyřrychlostí  $u^\mu$  a teplotou  $\mathcal{T}$  a různými chemickými potenciály  $\mu_i$ , které odpovídají různým zachovávajícím se veličinám. Tyto veličiny se transformují při Weylově transformaci jako

$$\mathcal{T} = e^{-\phi}\tilde{\mathcal{T}}, \quad \mu_i = e^{-\phi}\tilde{\mu}_i. \quad (1209)$$

Dále definujeme  $\nu_i = \frac{\mu_i}{\mathcal{T}} = \tilde{\nu}_i$ . Pak dostaneme

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu \nu_i &= \nabla_\mu \nu_i = \tilde{\mathcal{D}}_\mu \tilde{\nu}_i, \\ \mathcal{D}_\mu \mathcal{T} &= (\nabla_\mu + \mathcal{A}_\mu)\mathcal{T} = \partial_\mu(e^{-\phi}\tilde{\mathcal{T}}) + (\tilde{\mathcal{A}}_\mu + \partial_\mu\phi)\mathcal{T} = e^{-\phi}\tilde{\mathcal{D}}_\mu \tilde{\mathcal{T}}. \end{aligned} \quad (1210)$$

Dále dostaneme

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\sigma \nu_i = \mathcal{D}_\lambda(\nabla_\sigma \nu_i) = \nabla_\lambda \nabla_\sigma \nu_i - g_{\lambda\sigma} \mathcal{A}^\alpha \nabla_\alpha \nu_i + \mathcal{A}_\sigma \nabla_\lambda \nu_i + \mathcal{A}_\lambda \nabla_\sigma \nu_i = \tilde{\mathcal{D}}_\lambda \tilde{\mathcal{D}}_\sigma \tilde{\nu}_i \quad (1211)$$

a také

$$\mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\sigma \mathcal{T} = e^{-\phi} \tilde{\mathcal{D}}_\lambda \tilde{\mathcal{D}}_\sigma \tilde{\mathcal{T}}. \quad (1212)$$

Je důležité poznamenat, že nyní všechny pozorovatelné veličiny v konformní hydrodynamice je možné formulovat pomocí následujících veličin

$$\begin{aligned} \nu_i, \mathcal{T}, u^\mu, g_{\mu\nu}, \epsilon^{\mu\nu\dots\sigma}, \\ \mathcal{D}_\mu \nu_i, \mathcal{D}_\mu \mathcal{T}, \sigma_{\mu\nu}, \omega_{\mu\nu}, \\ \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\sigma \nu_i, \mathcal{D}_\lambda \mathcal{D}_\sigma \mathcal{T}, \mathcal{F}_{\mu\nu} = \nabla_\mu \mathcal{A}_\nu - \nabla_\nu \mathcal{A}_\mu, \mathcal{D}_\lambda \sigma_{\mu\nu}, \mathcal{D}_\lambda \omega_{\mu\nu}, \\ \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha, \end{aligned} \quad (1213)$$

where  $\mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha$  je tensor křivosti asociovaný s Weylovou kovariantní derivací  $\mathcal{D}_\lambda$ . Můžeme definovat tento tensor jako komutátor dvou kovariantních derivací  $\mathcal{D}$ . Pro kovariantní vektorové pole  $V_\mu = e^{-w\phi}\tilde{V}_\mu$  dostaneme

$$\begin{aligned} [\mathcal{D}_\mu, \mathcal{D}_\nu]V_\lambda &= w\mathcal{F}_{\mu\nu}V_\lambda - \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha V_\alpha, \\ \mathcal{F}_{\mu\nu} &= \nabla_\mu \mathcal{A}_\nu - \nabla_\nu \mathcal{A}_\mu, \\ \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha &= R_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha + \nabla_\mu [g_{\lambda\nu} \mathcal{A}^\alpha - \delta_\lambda^\alpha \mathcal{A}_\nu - \delta_\nu^\alpha \mathcal{A}_\lambda] - \nabla_\lambda [g_{\lambda\mu} \mathcal{A}^\alpha - \delta_\lambda^\alpha \mathcal{A}_\mu - \delta_\mu^\alpha \mathcal{A}_\lambda] + \\ &+ [g_{\lambda\nu} \mathcal{A}^\beta - \delta_\lambda^\beta \mathcal{A}_\nu - \delta_\nu^\beta \mathcal{A}_\lambda] [g_{\beta\mu} \mathcal{A}^\alpha - \delta_\beta^\alpha \mathcal{A}_\mu - \delta_\mu^\alpha \mathcal{A}_\beta] - \\ &- [g_{\lambda\mu} \mathcal{A}^\beta - \delta_\lambda^\beta \mathcal{A}_\mu - \delta_\mu^\beta \mathcal{A}_\lambda] [g_{\beta\nu} \mathcal{A}^\alpha - \delta_\beta^\alpha \mathcal{A}_\nu - \delta_\nu^\alpha \mathcal{A}_\beta] \end{aligned} \quad (1214)$$

kde jsme zavedli dva nové Weyl-invariantní tenzory

$$\mathcal{F}_{\mu\nu} = \tilde{\mathcal{F}}_{\mu\nu} , \quad \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha = \tilde{\mathcal{R}}_{\mu\nu\lambda}{}^\alpha . \quad (1215)$$

Jako další veličinu zavedeme konformní tenzory, což jsou Weyl-kovariantní tenzory, které nezávisí na rychlosti tekutiny, kde poznamenejme rychlost tekutiny je obsažena v definici  $\mathcal{A}_\mu$ . Například definujeme Weylovu křivost  $C_{\mu\nu\lambda\sigma}$

$$C_{\mu\nu\lambda\sigma} \equiv \mathcal{R}_{\mu\nu\lambda\sigma} + \delta_{[\mu}^\alpha g_{\nu][\lambda} \delta_{\sigma]}^\beta \mathcal{S}_{\alpha\beta} = C_{\mu\nu\lambda\sigma} - \mathcal{F}_{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} = e^{2\phi} \tilde{C}_{\mu\nu\lambda\sigma} , \quad (1216)$$

kde Schoutenův tensor je definován následujícím způsobem

$$\mathcal{S}_{\mu\nu} = \frac{1}{d-2} \left( \mathcal{R}_{\mu\nu} - \frac{\mathcal{R} g_{\mu\nu}}{2(d-1)} \right) = S_{\mu\nu} - (\nabla_\mu \mathcal{A}_\nu + \mathcal{A}_\mu \mathcal{A}_\nu - \frac{\mathcal{A}^2}{2} g_{\mu\nu}) - \frac{\mathcal{F}_{\mu\nu}}{d-2} = \tilde{\mathcal{S}}_{\mu\nu} . \quad (1217)$$

Nyní přejdeme k vlastní formulaci konformní hydrodynamiky. Poznamenejme, že základní hydrodynamické rovnice mají tvar

$$\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0 , \quad \nabla_\mu J^\mu = 0 . \quad (1218)$$

nejdou kovariantní vzhledem k Weylově transformaci. Poznamenejme, že vzhledem k Weylovým transformacím tensor energie a hybnosti a tok transformují následujícím způsobem

$$T^{\mu\nu} = e^{-(d+2)\phi} \tilde{T}^{\mu\nu} + \dots , \quad J^\mu = e^{-w\phi} \tilde{J}^\mu . \quad (1219)$$

kde  $\dots$  znamená příspěvek odpovídající Weylově anomálii  $T^\mu{}_\mu = \mathcal{W}$ . První klasický příspěvek v transformačním předpisu pro tensor energie a hybnosti plyne přímo z definice

$$T^{\mu\nu} = -\frac{2}{\sqrt{\det g}} \frac{\delta S}{\delta g_{\mu\nu}} = e^{-(d+2)\phi} \frac{2}{\sqrt{\tilde{g}}} \frac{\delta S}{\delta \tilde{g}_{\mu\nu}} = e^{-(d+2)\phi} \tilde{T}^{\mu\nu} . \quad (1220)$$

Konformní anomálie znamená, že teorie, která je klasicky invariantní vůči Weylově transformaci, nemusí být invariantní na kvantově mechanické úrovni. Poznamenejme, že pro  $T^{\mu\nu}$  a  $J^\mu$  máme následující kovariantní derivace

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_\mu T^{\rho\sigma} &= \nabla_\mu T^{\rho\sigma} + (d+2)\mathcal{A}_\mu T^{\rho\sigma} + \\ &\quad + [g_{\mu\alpha} \mathcal{A}^\rho - \delta_\mu^\rho \mathcal{A}_\alpha - \delta_\alpha^\rho \mathcal{A}_\mu] T^{\alpha\sigma} + \\ &\quad + [g_{\mu\alpha} \mathcal{A}^\sigma - \delta_\mu^\sigma \mathcal{A}_\alpha - \delta_\alpha^\sigma \mathcal{A}_\mu] T^{\rho\alpha} \Rightarrow \\ \mathcal{D}_\mu T^{\mu\sigma} &= \nabla_\mu T^{\mu\sigma} + (d+2)\mathcal{A}_\mu T^{\mu\sigma} - d\mathcal{A}_\mu T^{\mu\sigma} - 2\mathcal{A}_\mu T^{\mu\sigma} + \mathcal{A}^\sigma T^\nu{}_\nu = \\ &= \nabla_\mu T^{\mu\sigma} + \mathcal{A}^\sigma T^\nu{}_\nu \end{aligned} \quad (1221)$$

Jestliže ale vezmeme do úvahy Weylovou anomálii, je přirozené ji zahrnout do předchozí kovariantní derivace a tedy dostaneme kovariantní tvar zákona zachování

$$\mathcal{D}_\mu T^{\mu\nu} + \mathcal{A}^\nu (T^\mu{}_\mu - \mathcal{W}) = 0 . \quad (1222)$$

která obsahuje jak zákon zachování tak i anomální příspěvek. V případě toku  $J^\mu$  můžeme postupovat stejným způsobem a dostaneme

$$\mathcal{D}_\mu J^\mu = \nabla_\mu J^\mu + (w - d)\mathcal{A}_\mu J^\mu = 0 , \quad (1223)$$

která nám říká, že konformní váha  $w$  zachovávaného se toku musí být rovna počtu prostoročasových dimensí. Příkladem takového toku může být tok entropie  $J_S^\mu$ , který má konformní váhu rovnou počtu prostoročasových dimensí. Pak můžeme napsat druhý termodynamický zákon konformně invariantním způsobem

$$\mathcal{D}_\mu J_S^\mu = \nabla_\mu J_S^\mu \geq 0 . \quad (1224)$$

## Reference