Matematika pro chemiky

Nekonečné řady

Eva Dobrovolná, Petr Liška, Šárka Uchytilová

Tento text vznikl v rámci projektu Matematika pro chemiky podpořeného Fondem rozvoje Masarykovy univerzity.

Nekonečné řady

Ve fyzice a chemii existuje mnoho důležitých funkcí, které jsou definovány jakou součty nekonečných řad. Navíc je i obvyklé, že při studiu mnoha reálných problémů se uvažovaná funkce nahradí několika členy nekonečné řady, která danou funkci reprezentuje. Tento trik se také často používá k integrování některých funkcí. V této kapitole se proto seznámíme se základními poznatky o konvergenci posloupností a nekonečných řad, ukážeme si jak sečíst nekonečně mnoho čísel, případně jak funkci nahradit nějakou řadu.

Posloupnosti

Definice 1. *Posloupnost* je funkce definovaná na množině $M \subseteq \mathbb{N}$. Posloupnost označujeme $\{a_n\}$ nebo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, n-tý prvek označujeme $f(n)$, f_n a nejčastěji a_n.

Posloupnost bývá zadána výčtem členů

$$\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \dots\right\},$$

explicitním vzorcem pro n-tý člen

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{3^n}$$

nebo tzv. rekurentním vzorcem

$$a_1 = 1, \qquad a_2 = 1, \qquad a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geq 3\,.$$

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* L, jestliže existuje takové číslo L, ke kterému se můžeme s prvky posloupnosti libovolně málo přiblížit, pokud vezmeme dostatečně velké n. Zapisujeme

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L.$$

Pokud takováto limita existuje říkáme, že posloupnost *konverguje*. Přesnější definici této limity můžeme uvést takto.

Definice 2. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má *limitu* L, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $|a_n - L| < \varepsilon$.

Jestliže se a_n neustále zvětšuje s rostoucím n, používáme zápis $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$. I tuto skutečnost můžeme říct přesněji.

Definice 3. Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}$ má limitu ∞, jestliže ke každému $M \in \mathbb{R}$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro každé $n > n_0$ platí $a_n > M$.

Podobně můžeme definovat $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$. Má-li posloupnost limitu ∞ nebo $-\infty$, říkáme, že *diverguje*. Jestliže posloupnost nekonverguje ani nediverguje, řekneme, že *osciluje*.

Například pro tzv. geometrickou posloupnost $\{q_n\}_{n=1}^{\infty} = \{q, q^2, q^3, \dots\}$, kde $q \in \mathbb{R}$ je kvocient, platí

$$\lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |q| < 1, \\ \infty & \text{je-li } q > 1. \end{cases}$$

Některé další příklady posloupností a jejich limit:

$$
\begin{array}{ll}
\{\frac{1}{n}\}_{n=1}^{\infty} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots\} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 \\
\{\frac{n}{n+1}\}_{n=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4} \dots\} & \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 1 \\
\{(-1)^n\}_{n=1}^{\infty} = \{1, -1, 1, -1, \dots\} & \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n \quad \text{neexistuje}
\end{array}
$$

Poznámka 4. Pro limity posloupností platí všechna pravidla a vlastnosti, které jsme uvedli pro limity funkcí jedné proměnné. Navíc platí: Jestliže $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = L$ a $f(n) = a_n$ pro $n \in \mathbb{N}$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. Tento fakt nám umožňuje použití L'Hospitalova pravidla při počítání limit posloupností.

Číselné řady

Jestliže budeme sčítat členy nekonečné posloupnosti $\{a_n\}$ dostaneme výraz

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots ,$$

který nazýváme nekonečnou řadou. Je ovšem otázkou, zda-li má smysl mluvit o součtu nekonečných řad, tj. jestli takovýto součet vůbec existuje, případně čemu je roven. Odpověďmi na tyto otázky se budeme teď zabývat.

Definice 5. Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je posloupnost reálných čísel. Symbol

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots$$

nazýváme *nekonečnou číselnou řadou.* Posloupnost $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, kde

$$s_1 = a_1, \quad s_2 = a_1 + a_2, \quad \dots \quad s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \quad \dots,$$

nazýváme *posloupnost částečných součtů* této řady.
Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje* a má součet s. Neexistuje-li vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$, řekneme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *diverguje.*

Součet řady je tedy limita posloupnosti částečných součtů této řady. Již přímo z této definice můžeme určit součty některých řad.

Příklad 6. Určete součet geometrické řady

$$a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1}, \qquad \text{kde} \quad a \neq 0, q \neq 0.$$

Řešení. Nechť $|q| \neq 1$. Pak

$$s_n = a + aq + \cdots + aq^{n-1},$$
$$qs_n = aq + aq^2 + \cdots + aq^n.$$

Odečteme-li druhou rovnici od první, dostaneme

$$(1-q)s_n = a - aq^n.$$

Odtud n-tý částečný součet je

$$s_n = a\frac{1-q^n}{1-q}.$$

Je-li $|q| < 1$, pak $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$ a součet

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} a\frac{1-q^n}{1-q} = \frac{a}{1-q}.$$

Pro $q \geq 1$ je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \infty$ a řada diverguje, pro $q \leq -1$ $\lim\limits_{n\to\infty} s_n$ neexistuje.

Geometrická řada je konvergentní pro $|q| < 1$ a má součet

$$\sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = a + aq + \cdots + aq^n + \cdots = \frac{a}{1-q}.$$

Příklad 7. Určete součet řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Řešení. Určíme n-tý částečný součet řady

$$s_n = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)}.$$

Na základě rozkladu výrazu pro člen a_n na parciální zlomky

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

můžeme předchozí částečný součet s_n přepsat ve tvaru

$$s_n = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Jelikož pro součet s řady platí

$$s = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1,$$

dostáváme

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1.$$

Obecně je obtížné určit součet nekonečné řady a proto se často orientujeme na to, zda řada konverguje či diverguje, aniž bychom určovali její součet. K tomu slouží zejména tzv. *kritéria konvergence.*

Kritéria konvergence

Nejzákladnější informaci o konvergenci (tedy spíše divergenci) řády nám poskytuje tzv. *nutná podmínka konvergence.*

Věta 8. *Nechť* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, potom* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0.$

Zdůrazněme, že obrácené tvrzení neplatí (jak ukážeme na následujícím příkladě), tj. že z rovnosti $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ neplyne konvergence příslušné řady. Můžeme ale říci, že jestliže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ neexistuje nebo $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, potom $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverguje.

Příklad 9. Ukažte, že tzv. *harmonická řada*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

diverguje.

Řešení. Jelikož platí $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ je splněna nutná podmínka konvergence a momentálně nám nezbývá nic jiného než zkusit ukázat divergenci dané řady přímo podle definice. Uvažme tedy částečné součty této řady a vyberme si součty s_2, s_4, s_8, ..., máme tak

$$\begin{aligned}
s_2 &= 1 + \frac{1}{2} \\
s_4 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) = 1 + \frac{2}{2} \\
s_8 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
&> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) \\
&= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 + \frac{3}{2}\,.
\end{aligned}$$

Podobně dostaneme, že $s_{16} > 1 + \frac{4}{2}$, $s_{32} > 1 + \frac{5}{2}$ a obecně

$$s_{2n} > 1 + \frac{n}{2}\,.$$

Ukázali jsme, že $s_{2n} \to \infty$ pro $n \to \infty$, proto $\{s_n\}$ diverguje a tedy diverguje i daná řada.

Následující kritéria udávají postačující podmínky pro konvergenci řad s nezápornými, případně kladnými, členy, tj. takovými, že platí $a_n \geq 0$, případně $a_n > 0$. Posloupnost částečných součtů těchto řad je určitě neklesající a tak tyto řad buď konvergují nebo divergují k ∞.

Věta 10 (Limitní podílové kritérium)**.** *Nechť* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *je řada s kladnými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = q.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$, *pak řada* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *diverguje.*

Případ $q = 1$ nelze tímto kritériem rozhodnout a je třeba použít jiné kritérium.

Příklad 11. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n!} \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$$

Řešení. a) Podle limitního podílového kritéria dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^2}{(n+1)!}}{\frac{n^2}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^2 n!}{n^2(n+1)n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n} = 0 < 1$$

a daná řada konverguje.

b) Opět užitím limitního podílového kritéria

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{n^n}{n!}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+1)^n n!}{(n+1)n^n n!} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = e > 1,$$

a proto daná řada diverguje.

Typickým příkladem na použití limitního podílového kritéria jsou posloupnosti, které obsahují faktoriál, pro posloupnosti, které obsahují mocninu, se zase hodí limitní odmocninové kritérium.

Věta 12 (Limitní odmocninové kritérium)**.** *Nechť* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *je řada s nezápornými členy a nechť existuje*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = q, \qquad \textit{kde} \quad q \in \mathbb{R}^\star.$$

Je-li $q < 1$, *pak* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *konverguje a je-li* $q > 1$, *pak řada* $\sum\limits_{n\to\infty} a_n$ *diverguje.*

Případ $q = 1$ nelze tímto kritériem rozhodnout a je třeba použít jiné kritérium. Dá se navíc ukázat, že nelze-li rozhodnout limitním odmocninovým kritériem, nelze rozhodnout ani limitním podílovým kritériem.

Příklad 13. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a}{\operatorname{arctg} n} \right)^n \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

Řešení. a) Podle limitního odmocninového kritéria dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{a}{\operatorname{arctg} n} \right)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a}{\operatorname{arctg} n} = \frac{a}{\frac{\pi}{2}} = a\frac{2}{\pi}$$

a daná řada tedy konverguje pro $0 < a < \frac{\pi}{2}$ a diverguje pro $a > \frac{\pi}{2}$. Pro $a = \frac{\pi}{2}$ neumíme dle kritéria rozhodnout, ale jelikož $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\frac{\pi}{2}}{\operatorname{arctg} n} \right)^n > 0$ není splněna nutná podmínka konvergence a daná řada tedy diverguje i pro $a = \frac{\pi}{2}$.

b) Podle limitního odmocninového kritéria dostáváme

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{\left(2 + \frac{1}{n}\right)^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

a řada tedy konverguje. V předchozím jsme použili, že $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$, což můžeme určit pomocí L'Hospitalova pravidla

$$\lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{n}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n}} = \mathrm{e}^{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}} = 1.$$

Důležitým kritériem je integrální kritérium, které navíc také ukazuje souvislost mezi nekonečnými řadami a nevlastními integrály.

Věta 14 (Integrální kritérium)**.** *Nechť funkce f je kladná a klesající na intervalu $[1, \infty)$. Nechť $a_n = f(n)$. Pak $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje právě tehdy, když konverguje integrál $\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.*

Příklad 15. Rozhodněte o konvergenci řady:

$$\text{a)} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}, \qquad\qquad \text{b)} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \ln n}.$$

Řešení. a) Užijeme integrálního kritéria. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ je na intervalu $[1, \infty)$ nezáporná. První derivace $f'(x) = -\frac{1}{x^2} \le 0$ pro každé $x \in [1, \infty)$ a proto je daná funkce nerostoucí na tomto intervalu. Zbývá tedy vyšetřit integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$. Platí

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_1^t \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} [\ln x]_1^t = \lim_{t\to\infty} \ln t - \ln 1 = \infty.$$

Jelikož integrál diverguje, diverguje i daná řada.

b) Funkce $f(x) = \frac{1}{x \cdot \ln x}$ je pro všechna $x \in [2, \infty)$ nezáporná. Platí $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(x \cdot \ln x)^2} \le 0$ pro všechna $x \in [2, \infty)$ a proto je daná funkce nerostoucí. Můžeme tedy užít integrálního kritéria a vyšetřit integrál $\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x$. Platí

$$\int_2^{\infty} \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_2^t \frac{1}{x \cdot \ln x}\,\mathrm{d}x = \lim_{t\to\infty} \int_{\ln 2}^{\ln t} \frac{1}{s}\,\mathrm{d}s = \lim_{t\to\infty} [\ln s]_{\ln 2}^{\ln t} = \lim_{t\to\infty} \ln \ln t - \ln \ln 2 = \infty,$$

proto daná řada diverguje. Při výpočtu jsme užili substituce $s = \ln x$.

Poznámka 16. Podobně jako v první části předchozího příkladu bychom mohli vyšetřit i konvergenci řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$. Tato řada konverguje pro $a > 1$ a diverguje pro $0 < a \le 1$.

Poznamenejme, že existují i další a obecnější kritéria, která se dají použít i v případě, kdy výše uvedená kritéria nefungují.

Alternující řady

V této části se budeme věnovat řadám, které nemají všechny členy nezáporné a zavedeme i nový a silnější typ konvergence, tzv. absolutní konvergenci.

Definice 17. Nekonečná řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se nazývá *alternující*, právě když platí

$$\operatorname{sgn} a_{n+1} = -\operatorname{sgn} a_n$$

pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Vyloučíme-li případ řady, jejíž všechny členy jsou nulové, můžeme každou alternující řadu psát ve tvaru

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n \qquad \text{nebo} \qquad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}a_n,$$

kde $a_n > 0$ pro všechna $n \in \mathbb{N}$.

Pro alternující řady máme následující kritérium konvergence, které vlastně říká, že nutná podmínka konvergence je i dostatečná.

Věta 18 (Leibnitzovo kritérium)**.** *Nechť a_n je nerostoucí posloupnost kladných čísel. Pak alternující řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ konverguje právě tehdy, když platí $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.*

Podle Leibnitzova kritéria konverguje například řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ nebo řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n-\ln n}$.

Platí, že konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$, pak konverguje i řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, přičemž obrácené tvrzení neplatí (např. řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje, ale $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ diverguje). Má tedy smysl pro řady s obecnými členy zavést silnější vlastnost než konvergence.

Definice 19. Řekneme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *konverguje absolutně*, jestliže konverguje řada $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$. Jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ konverguje a $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ diverguje, říkáme, že řada $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ *konverguje neabsolutně.*

Tedy například řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ konverguje neabsolutně a řada $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$ konverguje absolutně.

Pravidla pro počítání s číselnými řadami

Zdrojem mnoha omylů je skutečnost, že s nekonečnými řadami nelze libovolně zacházet jako s normálními konečnými součty. Jedním z nejznámějších historických příkladů je tzv. *Grandiho řada*

$$1 + (-1) + 1 + (-1) + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n.$$

Tato řada zřejmě diverguje, jelikož její posloupnost částečných součtů nemá limitu. Řadu můžeme ovšem uzávorkovat dvojím způsobem a dostaneme následující řady. Řada $1 + [(-1) + 1] + [(-1) + 1] + \cdots$ konverguje a její součet je 1 a řada $[1+(-1)]+[1+(-1)]+\cdots$ konverguje a její součet je 0. Navíc pokud provedeme následující výpočet, dostaneme poněkud zneklidňující výsledek.

$$\begin{aligned}0 =& 0+0+0+0+\cdots = (1-1)+(1-1)+(1-1)+(1-1)\cdots = \\ =& 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-\cdots = 1-0-0-0-\cdots = \\ =& 1\end{aligned}$$

Zřejmě tedy takovýto výpočet musí chybný, jmenovitě nemůžeme použít asociativní zákon. V následujícím tedy uvedeme, jak s nekonečnými řadami můžeme zacházet. Nejjednodušší operací je součet dvou řad.

Věta 20. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ *jsou konvergentní řady a nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = u$ *a* $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = v$. *Pak je konvergentní i řada* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n)$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + b_n) = u + v$.

Následující věta je analogie distributivního zákona.

Věta 21. *Jestliže řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje, pak pro libovolné* $k \in \mathbb{R}$ *konverguje též řada* $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$ *a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n = k \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Naopak konverguje-li řada $\sum_{n=1}^{\infty} k \cdot a_n$, *kde* $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, *konverguje i řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Uvedená pravidla nám umožňují například určit součet řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2^n}{6^n}.$$

Jelikož obě řady $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n$, $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{6^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$ konvergují můžeme podle předchozího psát

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2^n}{6^n} = 3 \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

a protože

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3, \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$$

dostáváme

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3 \cdot 4^n - 2^n}{6^n} = \frac{15}{2}.$$

Následující věta má poněkud obtížnější formulaci, ale ve své podstatě jen analogií asociativního zákona, tj. uvádí, kdy můžeme členy nekonečné řady libovolně sdružovat.

Věta 22. *Nechť* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *je konvergentní řada a nechť* $\{n_k\}$ *je rostoucí posloupnost přirozených čísel. Položme* $n_0 = 0$ *a pro* $k \in \mathbb{N}$ *označme*

$$b_k = a_{n_{k-1}+1} + a_{n_{k-1}+2} + \cdot a_{n_k}.$$

Pak řada $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ *konverguje a platí*

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Všechna uvedená pravidla se tedy dají aplikovat na konvergentní řady, odtud tedy pochází i zdůvodnění proč operace na úvodním příkladu Grandiho řady nebyly korektní. Chybí ještě analogie komutativního zákonu, která vyžaduje absolutní konvergenci řad, jak uvádí následující věta.

Věta 23. *Nechť řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konverguje absolutně. Pak konverguje absolutně také každá řada* $\sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$ *vzniklá přerovnáním řady* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *a platí* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{k_n}$.

Mocninné řady

Kromě číselných řad hrají v matematice a jejích aplikacích důležitou roli i řady, jejichž členy jsou funkce $f_n(x)$. Mluvíme pak o řadě funkcí $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$. Součtem takové řady je zase nějaká funkce $f(x)$. Pro takovéto řady se dají zavést pojmy *bodová a stejnoměrná konvergence* a jejich kritéria konvergence.

My se v této části ovšem budeme zabývat jen speciálním případem, kdy funkce $f_n(x)$ jsou mocninné funkce, tj. $f_n(x) = a_n x^n$. Tyto řady se často používají k aproximaci funkce v bodě $x = 0$.

Definice 24. Buď $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ posloupnost reálných čísel a x_0 libovolné reálné číslo. *Mocninnou řadou* se středem v bodě x_0 a koeficienty a_n rozumíme řadu funkcí tvaru

$$a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n.$$

Bez újmy na obecnosti můžeme uvažovat, že středem mocninné řady je číslo $x_0 = 0$, jelikož pomocí substituce $x - x_0 = y$ můžeme převést řadu se středem v libovolném bodě x_0 na řadu se středem v bodě 0.

Podobně jako u číselných řad je důležitá otázka pro která x mocninná řada konverguje. To určíme pomocí tzv. *poloměr konvergence* r, který můžeme spočítat podle vzorce

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|. \tag{1}$$

Celkem mohou nastat tři možnosti:

1. Je-li $0 < r < \infty$, pak řada konverguje pro $x \in (-r, r)$ a diverguje pro $|x| > r$. Pro hodnoty $x = \pm r$ musíme rozhodnout zvlášť pomocí některého z kritérií konvergence z předchozí části.
2. Je-li $r = \infty$, pak řada konverguje pro všechna x.
3. Je-li $r = 0$, pak řada diverguje pro všechna $x \neq 0$ a říkáme, že řada vždy diverguje.

Příklad 25. Určete poloměr konvergence pro řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots$$

Řešení. Dosazením do vzorce (1) dostáváme

$$r = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{(-1)^n}{(-1)^{n+1}} \right| = 1,$$

tedy poloměr konvergence je 1 a řada určitě konverguje pro $|x| < 1$. V takovémto případě můžeme dokonce určit součet této řady jako součet geometrické řady, kde $a = 1$ a $q = -x$, tj.

$$1 - x + x^2 - x^3 + \cdots = \frac{1}{1 + x}.$$

Tři základní otázky o mocninných řadách (a celkově o funkčních řadách) jsou:

1. Je součtem řady spojitých funkcí na intervalu I, také funkce spojitá na intervalu I?
2. Pro která x můžeme mocninou řadu derivovat člen po členu?
3. Pro která x můžeme mocninou řadu integrovat člen po členu?

Klíčovou roli v odpovědích na tyto otázky hraje poloměr konvergence.

Věta 26. *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$. *Pak součet této řady je spojitá funkce na intervalu* $(-r, r)$.

Věta 27. *Nechť mocninná řada* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ *má poloměr konvergence* $r > 0$*. Pak pro všechna* $x \in (-r, r)$ *platí*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots)' = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \cdots ,$$

$$\int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right) \mathrm{d}x = \int_0^x (a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \cdots) \, \mathrm{d}t = a_0 x + \frac{a_1 x^2}{2} + \frac{a_2 x^3}{3} + \cdots .$$

Přitom výrazy na pravé straně mají stejný poloměr konvergence.

Integrace a derivace řady prakticky využíváme při rozvoji funkcí do řad a při hledání součtů řad.

Příklad 28. Vyjádřete funkci $\ln(1 + x)$ mocninou řadou.

Řešení. Podle předchozího příkladu platí pro $x \in (-1, 1)$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots ,$$

a dále víme, že

$$\int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \ln(1 + x),$$

dohromady tak dostáváme, že pro $x \in (-1, 1)$ platí

$$\begin{aligned}\ln(1 + x) \, \mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{1+t} = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \cdots) \, \mathrm{d}t = \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}.\end{aligned}$$

Příklad 29. Určete interval konvergence a součet mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = 1 - x^3 + x^6 - x^9 \cdots$

b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots$

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1} = (x - 1) + \frac{(x-1)^3}{3} + \frac{(x-1)^5}{5} + \cdots$

d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$

e) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(-1)^{n-1} x^{3n-1} = x^2 - 2x^5 + 3x^8 - 4x^{11} + \cdots$

f) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n x^n = x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + \cdots$

Řešení. a) Jedná se vlastně o geometrickou řadu s kvocientem $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = -x^3$. Jelikož geometrická řada konverguje pro $|q| < 1$, proto $| - x^3| < 1$ a daná řada konverguje pro $x \in (-1, 1)$. Pro součet geometrické řady platí

$$s(x) = \frac{a_1}{1-q} = \frac{1}{1+x^3}.$$

Proto platí

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{3n} = \frac{1}{1+x^3} \quad \text{pro} \quad x \in (-1, 1).$$

b) Pro interval konvergence platí

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{\left|\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right|}{\left|\frac{(-1)^{n+2}}{n+1}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

a tedy řada konverguje pro $x\in(-1,1)$. V tomto intervalu tedy existuje součet řady a řadu lze člen po členu derivovat

$$s'(x)=\left(\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left((-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}x^{n-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots.$$

Po derivaci dostáváme geometrickou řadu s kvocientem $q=-x$, jejíž součet je roven $\frac{1}{1+x}$. Proto pro součet $s(x)$ původní řady platí

$$s'(x)=\frac{1}{1+x}\quad\text{pro}\quad x\in(-1,1).$$

Odtud integrováním dostáváme

$$s(x)=\int\frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x=\ln(1+x)+c.$$

Konstantu c určíme dosazením konkrétního čísla z konvergenčního intervalu, např. $x=0$

$$s(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{0^n}{n}=0\quad\Rightarrow\quad 0=\ln(1+0)+c\quad\Rightarrow\quad c=0.$$

Součet řady je roven

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}=\ln(1+x)\quad\text{pro}\quad x\in(-1,1).$$

c) Využijme toho, že řada a řada z ní vzniklá derivováním, případně integrováním, mají stejný poloměr konvergence. Derivujme danou řadu člen po členu

$$s'(x)=\left(\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}\right)'=\sum_{n=1}^{\infty}(x-1)^{2n}=1+(x-1)^2+(x-1)^4+\cdots$$

Po derivaci dostáváme geometrickou řadu s kvocientem $q=(x-1)^2$, jejíž součet je roven

$$\frac{1}{1-(x-1)^2}=\frac{1}{2x-x^2}.$$

Geometrická řada konverguje pro

$$|q|<1\quad\Rightarrow\quad|(x-1)^2|<1\quad\Rightarrow\quad x\in(0,2).$$

Pro součet původní řady platí

$$s'(x)=\frac{1}{2x-x^2}$$

a odtud integrováním

$$s(x)=\int\frac{1}{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{2}\ln(x-2)+c=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)^2+c.$$

Konstantu c určíme dosazením čísla např. $x=1\in(0,2)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1-1)^{2n+1}}{2n+1}=0\Rightarrow 0=\ln\left(\frac{1}{1-2}\right)^2+c\Rightarrow c=0.$$

Součet řady je roven

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n+1}}{2n+1}=\ln\left(\frac{x}{x-2}\right)^2\quad\text{pro}\quad x\in(0,2).$$

d) Určeme poloměr konvergence

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

Proto pro $x\in(-1,1)$ můžeme danou řadu integrovat člen po členu

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int nx^{n-1}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}x^n+c.$$

Dostáváme tak geometrickou řadu s kvocientem $q=x$ a součtem $\frac{x}{1-x}$. Proto platí

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x=\frac{x}{1-x}+c$$

a odtud derivováním

$$s(x)=\left(\frac{x}{1-x}+c\right)'=\frac{1}{(x-1)^2}.$$

Dostáváme tak

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(x-1)^2}\quad\text{pro}\quad x\in(-1,1).$$

e) Pro poloměr konvergence platí

$$r=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{|(-1)^{n+1}n|}{|(-1)^{n+2}(n+1)|}=1.$$

Pro $x\in(-1,1)$ můžeme danou řadu integrovat člen po členu

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x=\int\left(\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}x^{3n-1}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int n(-1)^{n-1}x^{3n-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{3n}+c.$$

Dostáváme tak geometrickou řadu se součtem $\frac{x^3}{1+x^3}$. Platí

$$\int s(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\frac{x^3}{1+x^3}+c$$

a odtud derivováním

$$s(x)=\left(\frac{1}{3}\frac{x^3}{1+x^3}+c\right)'=\frac{x^2}{(1+x^3)^2}.$$

Proto pro součet řady platí

$$\sum_{n=1}^{\infty}n(-1)^{n-1}x^{3n-1}=\frac{x^2}{(1+x^3)^2}\quad\text{pro}\quad x\in(-1,1).$$

f) Obdobně jako v předchozích příkladech určíme interval konvergence $x\in(-1,1)$. Upravme n-tý člen tak, abychom jej mohli vyjádřit pomocí derivace

$$(x^n)'=nx^{n-1},\text{pak}\quad nx^n=x\cdot(x^n)'.$$

Nyní dosaďme do řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=\sum_{n=1}^{\infty}x\cdot(x^n)'=x\cdot\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\cdot\left(\sum_{n=1}^{\infty}x^n\right)'.$$

Přičemž $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x^n$ je geometrická řada se součtem $\frac{x}{1-x}$ a proto

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\cdot\left(\frac{x}{1-x}\right)'=\frac{x}{(x-1)^2}\quad\text{pro}\quad x\in(-1,1).$$

Poznámka 30. Je-li dána funkce f, která má v bodě x_0 derivace všech řádů, pak řadu

$$f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

nazýváme *Maclaurinovou řadou* funkce f. Není úplně snadné říci, kdy platí rovnost

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n,$$

tj. kdy můžeme nahradit funkci v okolí nuly její Maclaurinovou řadou, ale například pro všechny níže uvedené elementární funkce jsou tyto rovnosti korektní.

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^x &= 1 + \tfrac{x}{1!} + \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + \tfrac{x^n}{n!} + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{x^n}{n!} \\
\sin x &= x - \tfrac{x^3}{3!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \\
\cos x &= 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \cdots + (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \tfrac{x^{2n}}{(2n)!} \\
\ln(1+x) &= x - \tfrac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n+1} \tfrac{x^n}{n} + \cdots = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \tfrac{x^n}{n}
\end{aligned}$$

Pomocí předchozích vztahů můžeme dokázat například tzv. *Eulerův vztah*

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \cos x + \mathrm{i}\sin x,$$

který hraje svoji roli mimo jiné při řešení lineárních diferenciálních rovnic druhé řádu. Platí

$$\begin{aligned}
\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} &= 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} + \frac{(\mathrm{i}x)^2}{2!} + \cdots = 1 + \frac{\mathrm{i}x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{\mathrm{i}x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \\
&= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + \mathrm{i}\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \cdots\right) = \cos x + \mathrm{i}\sin x.
\end{aligned}$$

Fourierovy řady

V této části se budeme zabývat dalším speciálním případem funkčních řad a to tzv. *Fourierovými řadami*. Jedná se o funkční řady složené se základních goniometrických funkcí $\sin nx$ a $\cos nx$. Setkáváme se s nimi v různých přírodních i technických aplikací, kde se používají pro aproximaci různých periodických funkcí.

Definice 31. Nechť funkce $f(x)$ je integrovatelná na $[-\pi, \pi]$. Pak nekonečnou řadu

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

kde pro a_n a b_n platí

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x, \qquad n \in \mathbb{N},$$

nazýváme *Fourierovou řadou funkce* f v intervalu $[-\pi, \pi]$ a koeficienty a_n, b_n se nazývají *Fourierovy koeficienty* funkce f.

Poznámka 32. 1. Je-li f sudá funkce, má její Fourierova řada tvar

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \quad \text{kde} \quad a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}).$$

2. Je-li f lichá, má její Fourierova řada tvar

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx, \quad \text{kde} \quad b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Předchozí definice tedy funkci formálně přiřazuje jakousi řadu, zbývá ještě velmi důležitá otázka, kdy je součtem Fourierovy řady funkce f právě tato funkce, tj. kdy můžeme korektně psát rovnost

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

Odpověď na tuto otázku dá následující věta. Pro úplnost uveďme, že funkci f nazveme *po částech spojitou* na intervalu $[a, b]$, jestliže na tomto intervalu existuje pouze konečný počet bodů, ve kterých je nespojitá a navíc v každém z těchto bodů obě jednostranné limity a jsou vlastní. Navíc funkci f nazveme *po částech monotonní*, jestliže existuje konečný počet bodů, které dělí interval $[a, b]$ na kratší intervaly takové, že v každém z nich je daná funkce monotonní.

Věta 33. *Nechť f je po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi, \pi]$. Pak její Fourierova řada konverguje na $[-\pi, \pi]$ a její součet je roven:*

1. $f(x_0)$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f spojitá,

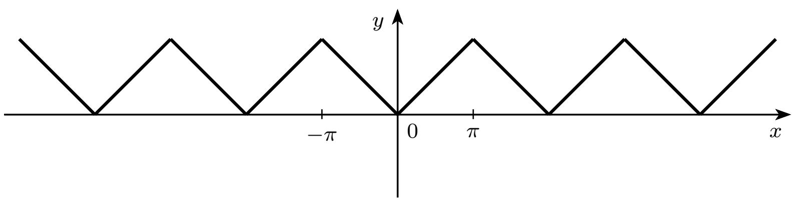
2. $\frac{1}{2}[f(x_0^-) + f(x_0^+)]$ v každém bodě $x_0 \in (-\pi, \pi)$, v němž je f nespojitá,

3. $\frac{1}{2}[f(-\pi^+) + f(\pi^-)]$ v krajních bodech intervalu $[-\pi, \pi]$,

kde výrazem $f(x_0^-)$, resp. $f(x_0^+)$, rozumíme číslo $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$, resp. $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$, pokud tyto limity existují.

Poznámka 34. Můžeme si všimnout, že pokud Fourierova řada konverguje k funkci f na intervalu $[-\pi, \pi]$, pak konverguje i na intervalu $(-\infty, \infty)$ a to k tzv. 2π-periodickému rozšíření funkce f.

Příklad 35. Funkci $f(x) = x$ rozviňte na intervalu $[0, \pi]$ do kosinové řady.



Obrázek 1: Sudé periodické rozšíření funkce x, $x \in (0, \pi)$

Řešení. Jelikož máme najít řadu, která má obsahovat jen funkci kosinus, hledáme tedy rozvoj sudé funkce, zkonstruujme tedy sudé periodické rozšíření funkce (viz obrázek). Jelikož máme sudou funkci, platí $b_n = 0$ a

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\pi} = \pi$$

a pro koeficienty a_n, $n = 1, 2 \ldots$ máme

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Pomocí metody per-partes spočteme

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n\pi}[x\sin nx]_0^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{n^2\pi}[(-1)^n - 1].$$

Tedy pro $x \in [0, \pi]$ platí

$$x = \frac{\pi}{2} + \frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n - 1}{n^2}\cos nx = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$$

Příklad 36. Najděte Fourierovu řadu funkce $f(x) = x^2$ na intervalu $[-\pi, \pi]$ a pomocí získaného výsledku určete součet číselné řady

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Řešení. Funkce $f(x)$ je sudá, tedy $b_n = 0$ a

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2\,\mathrm{d}x = \frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x.$$

Dvojím užitím metody per-partes dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} x^2 \cos nx\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{n} \left[x^2 \sin nx\right]_0^{\pi} - \frac{2}{n} \int_0^{\pi} x \sin nx\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{n}\pi^2 \sin n\pi - \frac{2}{n} \left(-\frac{1}{n} \left[x \cos nx\right]_0^{\pi} + \frac{1}{k} \int_0^{\pi} \cos kx\,\mathrm{d}x \right) \\ &= \frac{1}{n}\pi^2 \sin n\pi + \frac{2}{n^2}\pi \cos n\pi - \frac{2}{n^3} \sin n\pi. \end{aligned}$$

Jelikož $\sin n\pi = 0$ a $\cos n\pi = (-1)^n$ pro $n \in \mathbb{Z}$ dostáváme

$$a_n = \frac{2}{\pi} \frac{2}{n^2} \pi (-1)^n = \frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

Pro $x \in [-\pi, \pi]$ tedy platí

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos nx.$$

Dosadíme-li za $x = \pi$, obdržíme

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

a odtud

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Poznámka 37. Ukažme, jak lze odvozených výsledků využít k nalezení Fourierových řad periodických funkcí s periodou $p \neq 2\pi$. Označme kvůli jednoduchosti $p = 2h$ a předpokládejme, že f je integrovatelná funkce na intervalu $[-h, h]$. Pak funkce

$$g(t) = f\left(\frac{h}{\pi} t\right)$$

je periodická s periodou 2π, je-li přitom f po částech spojitá a po částech monotonní na $[-h, h]$, zřejmě je také funkce g po částech spojitá a po částech monotonní na $[-\pi, \pi]$. Proto lze funkci g rozvinout do Fourierovy řady na $[-\pi, \pi]$, odkud zpětnou transformací $t\frac{\pi}{h}x$ obdržíme Fourierovu řadu funkce f na $[-h, h]$ ve tvaru

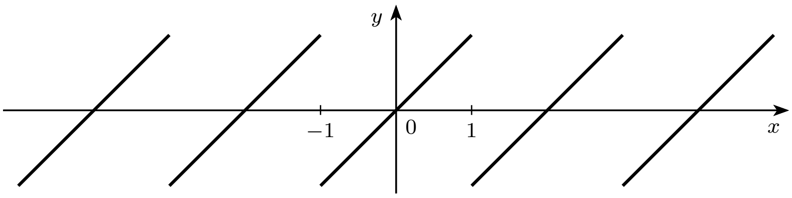
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{h} x + b_n \sin \frac{n\pi}{h} x \right),$$

kde Fourierovy koeficienty jsou dány vzorci

$$a_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \cos \frac{n\pi}{h} x\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N} \cup \{0\}),$$

$$b_n = \frac{1}{h} \int_{-h}^{h} f(x) \sin \frac{n\pi}{h} x\,\mathrm{d}x \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Příklad 38. Najděte Fourierův rozvoj funkce $f(x) = x$ na intervalu $[-1, 1]$.



Obrázek 2: Periodické rozšíření funkce x, $x \in (-1, 1)$

Řešení. V tomto případě je $h = 1$, dále je f lichá, a proto $a_n = 0 pro n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ a

$$\begin{aligned} b_n &= 2 \int_0^1 x \sin n\pi x \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{n\pi} [x \cos n\pi x]_0^1 + \frac{2}{n\pi} \int_0^1 \cos n\pi x \, \mathrm{d}x = \\ &= -\frac{2}{n\pi} \cos n\pi + \frac{2}{n^2\pi^2} [\sin n\pi x]_0^1 = \frac{2}{n\pi} (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

Tedy

$$x = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \sin n\pi x \qquad \text{pro} \quad x \in (-1, 1).$$

Poznámka 39. Animace zobrazující Fourierovy řady je možno nalézt na

`https://www.math.muni.cz/~plch/nkpm/html/index.htm`.

Některé aplikace nekonečných řad

Příklad 40. Pacientovy je denně podáváno 150 mg léku a každý den 70 % množství tohoto léku z krve absorbováno. Určete dlouhodobé maximální a minimální množství léku v krvi.

Řešení. Jeden den po podání léku je 70 % dávky vstřebáno a zůstává tak 30 %, po dvou dnech zůstane 30 % z těchto 30 % atd. Maximální množství M látky bude ihned po podání poslední dávky léku a dá se vyjádřit nekonečnou geometrickou řadou

$$\begin{aligned} M &= 150 + 150 \cdot 0.3 + 150 \cdot (0.3)^2 + 150 \cdot (0.3)^3 + \cdots = \\ &= \frac{150}{1 - 0.3} \approx 214 \, \mathrm{mg}. \end{aligned}$$

Tedy maximální dlouhodobé množství léku v krvi je rovno 214 mg a nastane po podání dávky. Nejmenší dlouhodobé množství m léku v krvi bude před podáním dávky a je rovno 30 % maxima (70 % je absorbováno), tj.

$$m = 0.3 \cdot 214 \approx 64 \, \mathrm{mg}.$$

Příklad 41. Normální rozdělení pravděpodobnosti se používá při předpovídání chování mnoha jevů, například náhodných chyb měření. Tímto rozdělením se také řídí mnoho technických a fyzikálních veličin. Křivka tohoto rozdělení je dána rovnicí

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

Tedy obsah pod touto křivkou od čísla nula po nějaké číslo x (vyjadřující pravděpodobnost nějakého jevu) je dán integrálem

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}} \, \mathrm{d}t.$$

Vypočtěte tento integrál.

Řešení. Tento integrál není možné přímo vypočítat. Primitivní funkce sice existuje, ale nelze ji vyjádřit pomocí elementárních funkcí. Použijeme proto Maclaurinův rozvoj funkce e^x, tj.

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots .$$

Dosazením za $x = -\frac{t^2}{2}$ dostáváme

$$e^{-\frac{t^2}{2}} = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2^2 2!}t^4 - \frac{1}{2^3 3!}t^6 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{2^n n!}.$$

Danou řadu můžeme integrovat člen po členu a dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}\,dt &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(x - \frac{1}{3\cdot 2}x^3 + \frac{1}{5\cdot 2^2 \cdot 2!}x^5 \right) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)2^n n!}. \end{aligned}$$

Příklad 42. Pozitivní impuls nějakému systému, například skokový nárůst počtu narozených jedinců, tzv. „baby boom“, je obvykle následován malými fluktuacemi ve vývoji (tzv. ozvěnou). Tyto fluktuace mohou být poměrně dobře modelovány například funkcí

$$f(t) = \frac{\sin x}{x}.$$

Během prvních t jednotek času je tak přínos takového impulzu roven

$$\int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx.$$

Určete Maclaurinův rozvoj této řady a pomocí prvních čtyř členů tohoto rozvoje určete přírůstek k danému systému za dvě jednotky času.

Řešení. Pro výpočet daného integrálu musíme opravdu použít Maclaurinův rozvoj, jelikož neexistuje žádná elementární funkce, která by byla primitivní funkcí k $\frac{\sin x}{x}$.

K nalezení rozvoje dané funkce použijeme známý rozvoj funkce $\sin x$

$$\begin{aligned} \frac{\sin x}{x} &= \frac{1}{x}\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots \right) \\ &= 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \end{aligned}$$

Danou řadu můžeme integrovat člen po členu a dostaneme tak

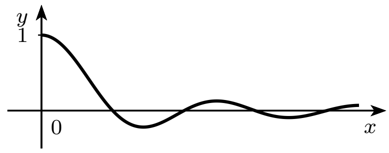
$$\begin{aligned} \int_0^t \frac{\sin x}{x}\,dx &= \int_0^t \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \cdots \right) dx = \\ &= \left[x - \frac{1}{3!}\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5!}\frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{7!}\frac{1}{7}x^7 + \cdots \right]_0^t = \\ &= t - \frac{t^3}{3\cdot 3!} + \frac{t^5}{5\cdot 5!} - \frac{t^7}{7\cdot 7!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\cdot(2n-1)!} \end{aligned}$$

Tato nekonečná řada udává přesnou hodnotu daného integrálu, dosazením $t = 2$ do prvních čtyř členů dostaneme přibližnou hodnotu přírůstku

$$2 - \frac{2^3}{3\cdot 3!} + \frac{2^5}{5\cdot 5!} - \frac{2^7}{7\cdot 7!} \approx 1.605$$

Příklad 43. Vypočtěte

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dx\,dy}{1 - xy}.$$



Obrázek 3: Graf funkce $f(x) = \frac{\sin x}{x}$

Řešení. Jelikož víme, že platí

$$1 + a + a^2 + \cdots = \frac{1}{1-a},$$

můžeme daný integrál přepsat jako uvedenou geometrickou řadu

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{1-xy} &= \int_0^1 \int_0^1 (1 + xy + x^2y^2 + \cdots)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\
&= \int_0^1 \left[x + \frac{1}{2}x^2y + \frac{1}{3}x^3y^2 + \cdots \right]_0^1 \mathrm{d}y = \\
&= \int_0^1 \left(1 + \frac{y}{2} + \frac{y^2}{3} + \cdots \right) \mathrm{d}y = \\
&= \left[y + \frac{y^2}{2^2} + \frac{y^3}{3^2} + \cdots \right]_0^1 = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots .
\end{aligned}$$

Pomocí výsledku příkladu 36 tak dostáváme

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{1-xy} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Pokud bychom chtěli počítat tento integrál přímo, museli bychom daný integrál transformovat (otočit souřadný systém kolem počátku) a i po této transformaci by byl výpočet nepříjemný.

Cvičení

1. Určete poloměr konvergence a součet mocninných řad:

a) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{4n-1}}{4n-1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n$,

c) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, d) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)}$.

2. Rozviňte funkci do mocninné řady:

a) $y = \operatorname{arctg} x$, b) $y = \ln(1-x)$.

3. Nalezněte Fourierovu řadu funkce $f(x) = \operatorname{sgn}(x)$ na intervalu $[-\pi, \pi]$

$$\operatorname{sgn}(x) = \begin{cases} -1, & x \in [-\pi, 0), \\ 0, & x = 0, \\ 1, & x \in (0, \pi]. \end{cases}$$

4. Rozložte ve Fourierovu řadu funkci $f(x) = |x|$ na intervalu $(-l, l)$.

Výsledky:

1. a) $\frac{1}{4} \ln \left| \frac{1+x}{1-x} \right|$, $|x| < 1$, b) $\frac{2x}{(1-x)^2}$, $|x| < 1$,
c) $\operatorname{arctg} x$, $|x| < 1$, d) $(x+1)\ln(1+x) - x$, $|x| < 1$.

2. a) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $x \in (-1, 1)$, b) $-\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$, $x \in (-1, 1)$.

3. $\operatorname{sgn}(x) = \frac{4}{\pi} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}$,

4. $|x| = \frac{l}{2} - \frac{4l}{\pi^2} \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} \cos \frac{(2n-1)\pi x}{l}$.