# 1 Operace s maticemi

Obdélníková tabulka s $k$ řádky a $n$ sloupci

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad a_{ij} \in \mathbb{K} \; (= \mathbb{R}, \mathbb{C}$$

$a_{ij}$ je prvek matice v $i$-tém řádku a v $j$-tém sloupci

řádek     sloupec

4

Speciální matice typu

$1 \times n$ $\quad \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \end{pmatrix}$ řádkový vektor

$n \times 1$ $\quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ sloupcový vektor

Všechny matice typu $k \times n$ s prvky v $\mathbb{K}$ značíme

$$\mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K})$$

Operace: (1) sčítání matic stejného typu

(2) násobení matic číslem

(3) násobení matic

3

Sčítání matic je zobrazení : $\quad + : \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{k\times n}(\mathbb{K}) \longrightarrow$

$$(A, B) \longmapsto A+B$$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

Sčítáme po složkách

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 8 & -1 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 8 & 16 & 17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 1 \\ 16 & 15 & 21 \end{pmatrix}$$

Sčítání má stejné vlastnosti jako sčítání reálných nebo kompl. čísel :

komutativní $\quad A+B = B+A$

asociativní $\quad (A+B)+C = A+(B+C)$

$m = r = 1$

Nulová matice $\quad ax = b$

$$\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & & & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

$$A + \mathbf{0} = A$$

Ke každé matici existuje matice opačná $\quad -A = \begin{pmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots \\ -a_{k1} & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$

$$A + (-A) = \mathbf{0}$$

## Násobení číslem (skalárem)

$$\cdot : \mathbb{K} \times Mat_{k \times n}(\mathbb{K}) \to Mat_{k \times n}$$

$$(c, A) \longmapsto c \cdot A$$

$$cA = \begin{pmatrix} cA_{11} & cA_{12} & \cdots & cA_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ cA_{k1} & cA_{k2} & \cdots & cA_{kn} \end{pmatrix}$$

5

**Vlastnosti:**

$$1 \cdot A = A$$

$$(c+d)A = cA + dA$$

$$c(A+B) = cA + cB$$

$$(cd)A = c(dA)$$

$$4\begin{pmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 3 & -4 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 32 \\ 12 & -16 & 40 \end{pmatrix}$$

**Násobení matic** – jako motivace slouží zápis soustavy:

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \dots \\ a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \dots + a_{kn}x_n = b_1 \end{array} \right.$$

6

$n = k = 1$ $\qquad ax = b$

Chceme i pro $n \geq 1$ a $k \geq 1$ zapsat soustavu ve tvaru

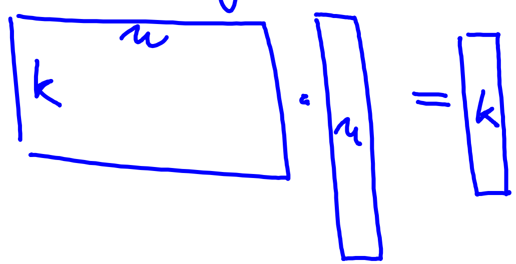
$$A \cdot x = b$$

kde $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$ $\qquad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$

$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Chceme definovat násobení matic tak, aby součin

$$A \cdot x = b$$

dával soustavu lin. rovnic.



7

1 rovnice o n neznámých

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n = b$$

Levou stranu chceme psát jako součin

$$(a_1, a_2 \dots a_n) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \underset{\text{definice}}{=} a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n$$

$$\cdot : Mat_{1\times n}(\mathbb{K}) \times Mat_{n\times 1}(\mathbb{K}) \longrightarrow Mat_{1\times 1}(\mathbb{K})$$

Takto je definován SOUČIN ŘÁDKU A SLOUPCE, které mají stejnou délku.

8

Nechť $A$ je matice o $k$ řádcích $A = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix}$

Definujme součin matice $A$ typu $k \times n$ se sloupcem velikosti $n$ :

$$A \cdot x = \begin{pmatrix} r_1(A) \cdot x \\ r_2(A) \cdot x \\ \vdots \\ r_k(A) \cdot x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} A_{1j} x_j \\ \sum_{j=1}^{n} A_{2j} x_j \\ \\ \\ \end{pmatrix} = \quad A_{11} x_1 + A_{12}$$

- $\mathrm{Mat}_{k \times n}(\mathbb{K}) \times \mathrm{Mat}_{n \times 1}(\mathbb{K}) \longrightarrow \mathrm{Mat}_{k \times 1}(\mathbb{K})$

9

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\cdot 1 + a_{12}\cdot 0 + a_{13}\cdot 0 + \dots + a_{1n}\cdot 0 \\ a_{21}\cdot 1 + a_{22}\cdot 0 + a_{23}\cdot 0 + \dots + a_{2n}\cdot 0 \\ \\ a_{k1}\cdot 1 + a_{k2}\cdot 0 + \dots + a_{kn}\cdot 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \dots & & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & a_{k3} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ \vdots \\ a_{k3} \end{pmatrix}$$

10

## Násobení matic

- $Mat_{k\times m}(\mathbb{K}) \times Mat_{m\times l}(\mathbb{K}) \to Mat_{k\times l}$

$$(A\cdot B)_{ij} = \underset{\text{i-tý řádek}}{r_i(A)} \cdot \underset{\text{j-tý sloupec}}{s_j(B)} = \sum_{p=1}^{m} A_{ip} B_{pj}$$

$$2\left\{\overbrace{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 4 & 5 & 6\end{pmatrix}}^{3}\right. \left.\underbrace{\begin{pmatrix}-1 & 8 & -1 & 4\\ 2 & 1 & -2 & 5\\ 3 & 2 & 3 & 6\end{pmatrix}}_{4}\right\}3 = \begin{pmatrix}12 & 16 & 4 & 32\\ 24 & 49 & 4 & 77\end{pmatrix}$$

(11)

<u>Příklady.</u>

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1y_1 & x_1y_2 & \cdots & x_1y_n \\ x_2y_1 & x_2y_2 & \cdots & x_2y_n \\ \cdots & & & \cdots \\ x_ny_1 & \cdots & \cdots & x_ny_n \end{pmatrix}$$

$n \times 1 \qquad 1 \times n$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots & 0 \end{pmatrix}}_{k} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & & & \\ a_{k1} & \cdots & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \end{pmatrix}$$

$$= r_2(A)$$

12

Jednotková matice $E_n$ je matice typu $n \times n$

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & & \\ 0 & 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & 0 & & & 1 \end{pmatrix}$$

$A$ matice $k \times n$

$$A \cdot E_n = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & & & \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & & 0 \\ 0 & 1 & & 0 \\ 0 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} = s_1(A) \dots = A$$

$$\boxed{A \cdot E_n = A}$$

13

$E_k \ldots k \times k \quad A \ldots k \times n$

$$E_k \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & & & \ldots \\ a_{k1} & a_{k2} & \ldots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_1(A) \\ r_2(A) \\ \vdots \\ r_k(A) \end{pmatrix}$$

$$\boxed{E_k \cdot A = A}$$

VLASTNOSTI NÁSOBENÍ:

(1) NENÍ KOMUTATIVNÍ

$\underset{k \times n}{A} \quad \underset{n \times l}{B} \quad A \cdot B \; k \times l$, ale $B . A$ není definována pro $k \neq l$

14

Mějme matici $A$ $k \times n$, $B$ $n \times k$

$A \cdot B$ má rozměry $k \times k$

$B \times A$ má rozměry $n \times n$

Pro $k \neq n$ nemůže být

$A B = B \cdot A$ jde o matice různých typů

$A, B$ typu $n \times n$ (čtvercové matice)

Nyní má smysl uvažovat, zda

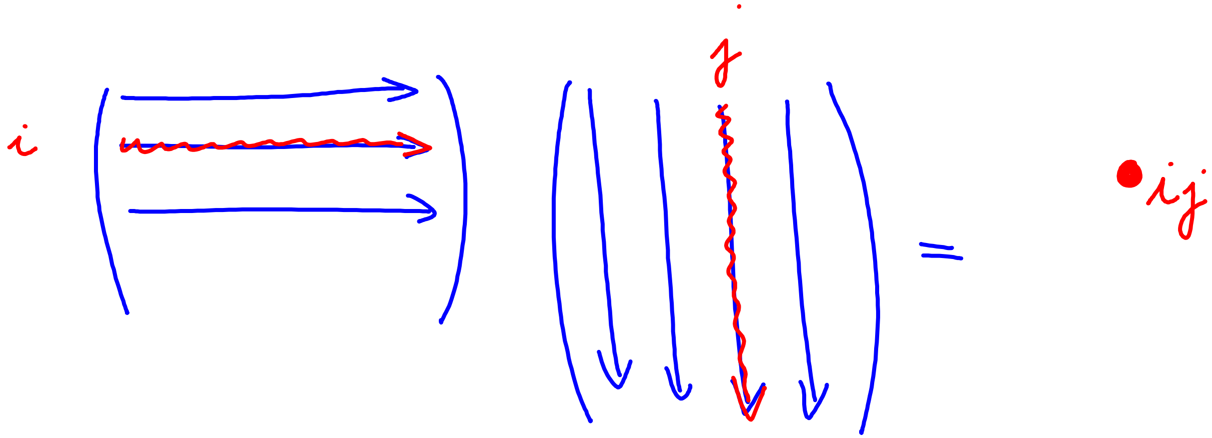
$A \cdot B = B \cdot A$.

To obecně NEPLATÍ!

15

$$\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}$$



16

**Množenje je asociativno** $n \times k \quad k \times l \quad l \times p$

Kadarkoli lahko matrike A, B, C množimo tako.

$$\underbrace{\underbrace{(A \cdot B)}_{n \times l} \cdot \underbrace{C}_{l \times p}}_{n \times p} = \underbrace{\underbrace{A}_{n \times k} \cdot \underbrace{(B \cdot C)}_{k \times p}}_{n \times p}$$

$$(A \cdot B) \cdot C_{io} = \sum_{m=1}^{l} \left( \sum_{j=1}^{k} A_{ij} B_{jm} \right) \cdot C_{mo}$$

17

Násobení je distributivní vzhledem ke sčítání

$A, B \quad k \times n$

$C \quad n \times l$

$$(A+B)\cdot C = (A\cdot C) + (B\cdot C) = AC + $$

$$F\cdot(C+D) = FC + FD$$

Jednotková matice

$A$ typu $k \times n$

$$A \cdot E_n = A$$

typu $n \times n$

$$E_k \cdot A = A$$

typu $k \times k$

18

## Inverzní matice ke čtvercové matici

$A$ matice $n \times n$

Matice $B$ typu $n \times n$ se nazývá inverzní k $A$, jestliže

$$A \cdot B = E_n = B \cdot A$$

**Věta** K dané čtvercové matici existuje nejvýše jedna inverzní matice.

**Důkaz:** Nechť $B$ i $C$ mají vlastnost inverzní matice k $A$. Dokážeme, že se pak musejí rovnat.

$$\underline{\underline{B}} = B \cdot E_n = B \cdot (A \cdot C) = (B \cdot A) \cdot C = E_n \cdot C = \underline{\underline{C}}$$

19

Pro inversní matici k A budeme značit $A^{-1}$ (pokud existuje)

K matici $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$

neexistuje inversní matice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}+b_{21} & b_{12}+b_{22} \\ 2b_{11}+2b_{21} & 2b_{12}+2b_{22} \end{pmatrix}$$

2. řádek je 2-násobek 1. řádku tedy taková matice NEMUŽE

20

IS odpovědník k 2. přednášce (násobení matic)

<u>Transponovaná matice</u> k matici $A$ typu $k\times n$ je matice $A^T$ typu $n\times k$

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \qquad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad 6 = (A^T)_{32} = A_{23}$$

<u>Věta:</u> $A$ typu $k\times n$, $B$ typu $n\times l$

$$(A\cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

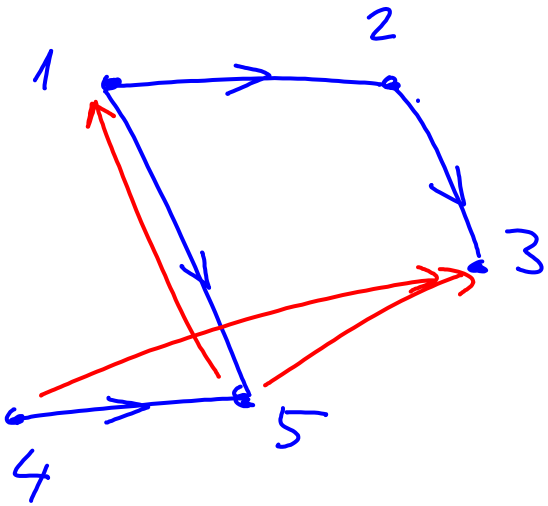
Důkaz samostatně zkuste za [illegible]

# Aplikace

## Orientovaný graf

$U$ ... množina uzlů

$H$ .... $\subseteq U \times U$ množina orient. hran




Každému orientovanému grafu s konečnou množinou $U$ můžeme přiřadit čtvercovou matici $A$

$$A_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{z } i \text{ do } j \text{ nevede hrana} \\ 1 & \text{z } i \text{ do } j \text{ vede hrana} \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \overset{22}{B} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A = A^2 \qquad B \cdot B = B^2$$

Jaký význam má matice $A^2$ ?

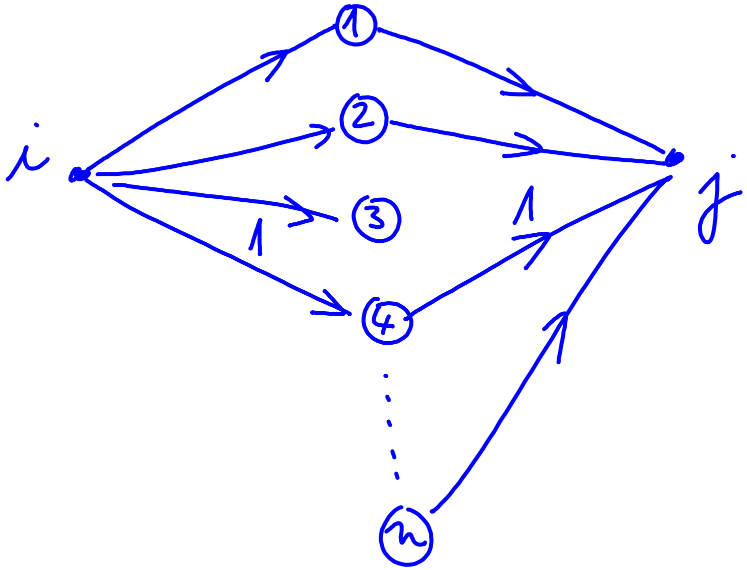
$(A \cdot A)_{ij}$ = počet cest délky 2 z vrcholu i do vrcholu j

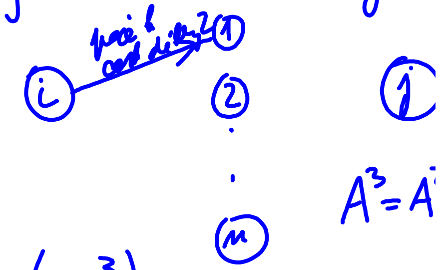
$$(A \cdot A)_{13} = 1 \qquad (B \cdot B)_{13} = 2$$

23

$$\begin{matrix} & & 1\cdot 1 & 1\cdot 1 & 1\cdot 0 & 1\cdot 1 & & 0\cdot 1 \end{matrix}$$

$$(A\cdot A)_{ij} = A_{i1}A_{1j} + A_{i2}\cdot A_{2j} + A_{i3}\cdot A_{3j} + A_{i4}\cdot A_{4j} \dots + A_{in}\cdot A_{nj}$$






Obecně:

$$A\cdot A\cdot A = A^3 \qquad (A^3)_{ij} = \text{počet cest délky 3 z } i \text{ do } j$$

$A^3 = A$

$$(A^n)_{ij} = \text{počet cest délky } n \text{ z } i \text{ d}$$