(1)

Opakování: vektorový prostor V nad tělesem $\mathbb{K}$

$+ : V \times V \longrightarrow V$ sčítání vektorů

$\cdot : \mathbb{K} \times V \longrightarrow V$ násobení skalárem

$\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$

$(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{z})$

$\exists\, \vec{o} \in V \quad \vec{u} + \vec{o} = \vec{u}$

$\forall \vec{u} \in V \ \exists -\vec{u} \quad \vec{u} + (-\vec{u}) = \vec{o}$

$a, b \in \mathbb{K} \quad \vec{u}, \vec{v} \in V$

$(a+b)\vec{u} = a\vec{u} + b\vec{u}$

$a(\vec{u} + \vec{v}) = a\vec{u} + a\vec{v}$

$a\cdot(b\cdot\vec{u}) = (ab)\cdot\vec{u}$

$1 \cdot \vec{u} = \vec{u}$

Příklady (1) $\mathbb{R}^n$ je vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$

$\vec{o} = (0, 0, \dots, 0) \qquad -(x_1, x_2, \dots, x_n) = (-x_1, -x_2, \dots, -x_n)$

(2)

$$c \cdot (x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

2 $\mathbb{C}^n$ je vekt. prostor nad $\mathbb{C}$

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n)$$

$c \in \mathbb{C}$

$$c(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

3 $\mathrm{Mat}_{n \times k}(\mathbb{K})$ ... matrice tipa $n \times k$ s polji v $\mathbb{K}$ tvori vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

$$(A+B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$(cA)_{ij} = cA_{ij}$$

(4) $Map(M, \mathbb{K})$ zobrazení z množiny M (neprázdné) do množiny $\mathbb{K}$ (3)

$f, g \in Map(M, \mathbb{K})$, $m \in M$

$$(f+g)(m) = f(m) + g(m)$$

$c \in \mathbb{K}$

$$(cf)(m) = c\, f(m)$$

Tyto definice činí z $Map(M, \mathbb{K})$ vektorový prostor nad $\mathbb{K}$.

Předchozí příklady jsou zvláštním případem tohoto příkladu.

(1) a (2) $M = \{1, 2, 3, \dots n\}$

$f \in Map(M, \mathbb{K})$ $\quad f \longleftrightarrow (f(1), f(2), \dots, f(n))$

$(x_1, x_2, \dots, x_n) \longleftrightarrow f(i) = x_i$

4

Příklad 3 dostaneme z příkladu 4 volbou

$$M = \{ (i,j),\ \ 1 \leq i \leq n,\ \ 1 \leq j \leq k \}$$

$$f \in Map(M, \mathbb{K}) \longmapsto A_{ij} = f(i,j)$$

5 $\mathbb{R}_n[x]$ = polynomy s reálnými koeficienty stupně $\leq n$

$$= \{ a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0,\quad a_i \in \mathbb{R} \}$$

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) + (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_0) = (a_n + b_n) x^n + \cancel{(b_{n-1} + b_{n-1})}$$

$$+ (a_{n-1} + b_{n-1}) x^{n-1} + \dots + (a_0 + b_0)$$

$$c(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0) = c a_n x^{n-1} + c a_{n-1} x^{n-1} + \dots + c a_0$$

Jde o vekt. prostor nad $\mathbb{R}$

5

Další vlastnosti operací $+$ a násobení skalárem, které lze odvodit z definice vekt. prostoru. (axiomy vekt. prostoru)

(i) $0 \in \mathbb{K}$ $\vec{v} \in V$ $\qquad 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$

Důkaz: Platí

$$\underline{0 \cdot \vec{v}} = (0+0) \cdot \vec{v} = \underline{0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}} \quad \Big/ + \underbrace{(-0 \cdot \vec{v})}_{\text{opačný vektor}}$$

$$\begin{aligned} 0 \cdot \vec{v} + (-0 \cdot \vec{v}) &= (0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}) + (-0 \vec{v}) \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} + (0 \cdot \vec{v} + (-0 \vec{v})) \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} + \vec{0} \\ \vec{0} &= 0 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

6

(ii) $a \in \mathbb{K}$, $\vec{o} \in V$ $\qquad a \cdot \vec{o} = \vec{o}$

Důkaz analogický, proveďte za DÚ.

(iii) $a \in \mathbb{K}$, $\vec{u} \in V$ $\qquad a \cdot \vec{u} = \vec{o}$ právě když $a = 0$ nebo $\vec{u} = \vec{o}$

$a = 0 \implies 0 \cdot \vec{u} = \vec{o}$

Předp. že $a \neq 0$.

$$a\vec{u} = \vec{o} \qquad / \; a^{-1} \cdot$$

$$a^{-1}(a\vec{u}) = a^{-1} \cdot \vec{o}$$

$$(a^{-1} \cdot a) \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

$$1 \cdot \vec{u} = \vec{o}$$

$$\vec{u} = \vec{o}$$

7

iv) $(-1)\vec{u} = -\vec{u}$

Dukaz:

$$\underline{(-1)\vec{u} + \vec{u}} = (-1)\vec{u} + 1\cdot\vec{u} = ((-1)+1)\vec{u} = 0\cdot\vec{u} = \underline{\vec{0}} \quad / +$$

$$((-1)\vec{u} + \vec{u}) + (-\vec{u}) = \vec{0} + (-\vec{u})$$

$$(-1)\vec{u} + (\vec{u} + (-\vec{u})) = -\vec{u}$$

$$(-1)\vec{u} + \vec{0} = -\vec{u}$$

$$(-1)\vec{u} = -\vec{u}$$

3

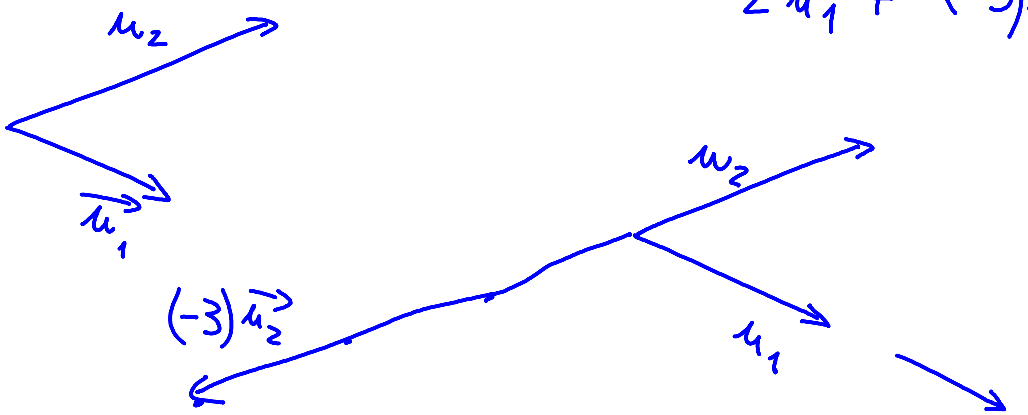
Lineární kombinace vektorů

Nechť $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k \in V$. Jejich lineární kombinací je každý vektor tvaru

$$a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k \in V$$

kde $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.

$$2\vec{u}_1 + (-3)\vec{u}_2$$



9

Vektorový podprostor vektorového prostoru V je neprázdná podmnožina

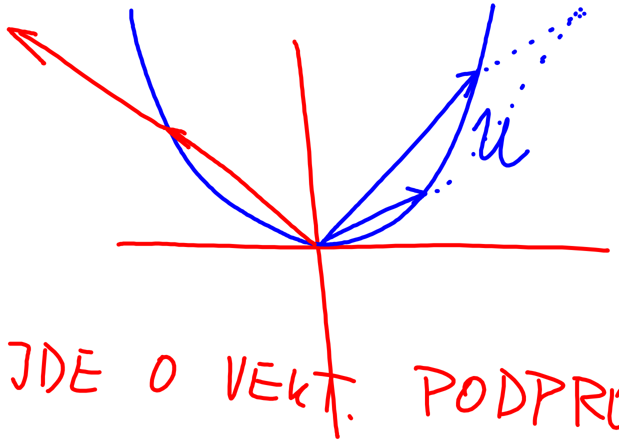
$U \subseteq V$ s těmito vlastnostmi:

$(+)$: $\vec{u} \in U$, $\vec{v} \in U$, pak $\vec{u} + \vec{v} \in U$

$(\cdot)$: $a \in \mathbb{K}$, $\vec{u} \in U$, pak $a\vec{u} \in U$

Příklady

$V = \mathbb{R}^2$ vekt. prostor



$U = \{ (x, x^2) \in \mathbb{R}^2 ; x$

(1) není splněna pro nějaký dvojice

(2) není splněna

NEJDE O VEKT. PODPROSTOR

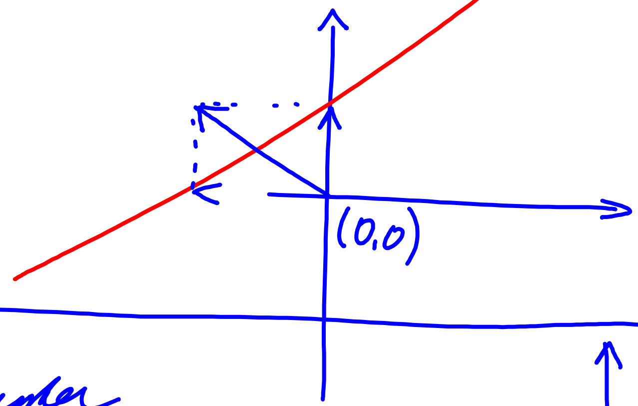
10

$V = \mathbb{R}^2$ vekt priestor

U

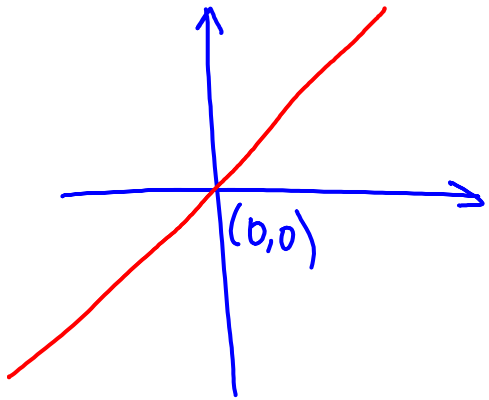
nejde o vekt podpriestor

(nesplnuje 1) ani 2))



$V = \mathbb{R}^2$ vekt priestor

Toto je vekt podpriestor



$U = \{ (ap, bp),$ a, b p… reálna $a^2 + b^2 =$ … $p \in \mathbb{R} \}$

$(ap_1, bp_1) + (ap_2, bp_2 \ldots$

$= (a(p_1 + p_2), b(p_1 + p_2 \ldots$

V vekt. prostor nad $\mathbb{K}$

potom tzv. minimální podprostory jsou

V

$\{\vec{o}\}$

<u>jiný příklad</u>

$V = \mathbb{R}^3 \qquad U = \{ (s+t,\ s-t,\ t) \in \mathbb{R}^3,\ s, t \in \mathbb{R} \}$

$$(s+t, s-t, t) + (\bar{s}+\bar{t}, \bar{s}-\bar{t}, \bar{t}) = \left((s+\bar{s}) + (t+\bar{t}),\ (s+\bar{s}) - (t+\bar{t}),\ t+\bar{t} \right)$$

$$\left(\bar{\bar{s}} + \bar{\bar{t}},\ \bar{\bar{s}} - \bar{\bar{t}},\ \bar{\bar{t}} \right)$$

je to vekt. podprostor

12

Příklad $V = \mathbb{R}^n$, A matice $k \times n$

DŮLEŽITÝ

$$U = \{ x \in \mathbb{R}^n, \quad A \cdot x = 0 \}$$

$$a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0$$
$$- \; - \; - \; - \; - \; - \; - \; -$$
$$a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n = 0$$

U je vekt. podprostor

U je neprázdný, neboť $(0, 0, \dots 0) \in U$

x, y jsou dvě řešení

$$A(x+y) = Ax + Ay = 0 + 0 = 0$$

Tedy $x+y$ je rovněž řešení

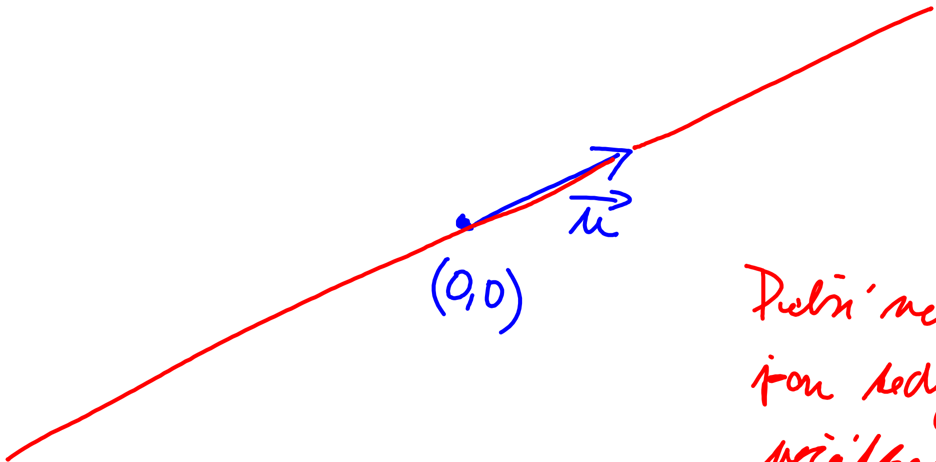
x je řešení $cx = (cx_1, \dots cx_n)$ je rovněž řešení

13

Příklad všechny podprostory ve vekt. prostoru $\mathbb{R}^2$ (rovina s počátkem)

Množina $\{(0,0)\}$ je vekt. podprostor

Nechť U je vekt. podprostor obsahující nenulový vektor $\vec{u}$



S vektorem $\vec{u}$ leží v U rovněž přímka procházející počátkem se směrnicí $\vec{u}$

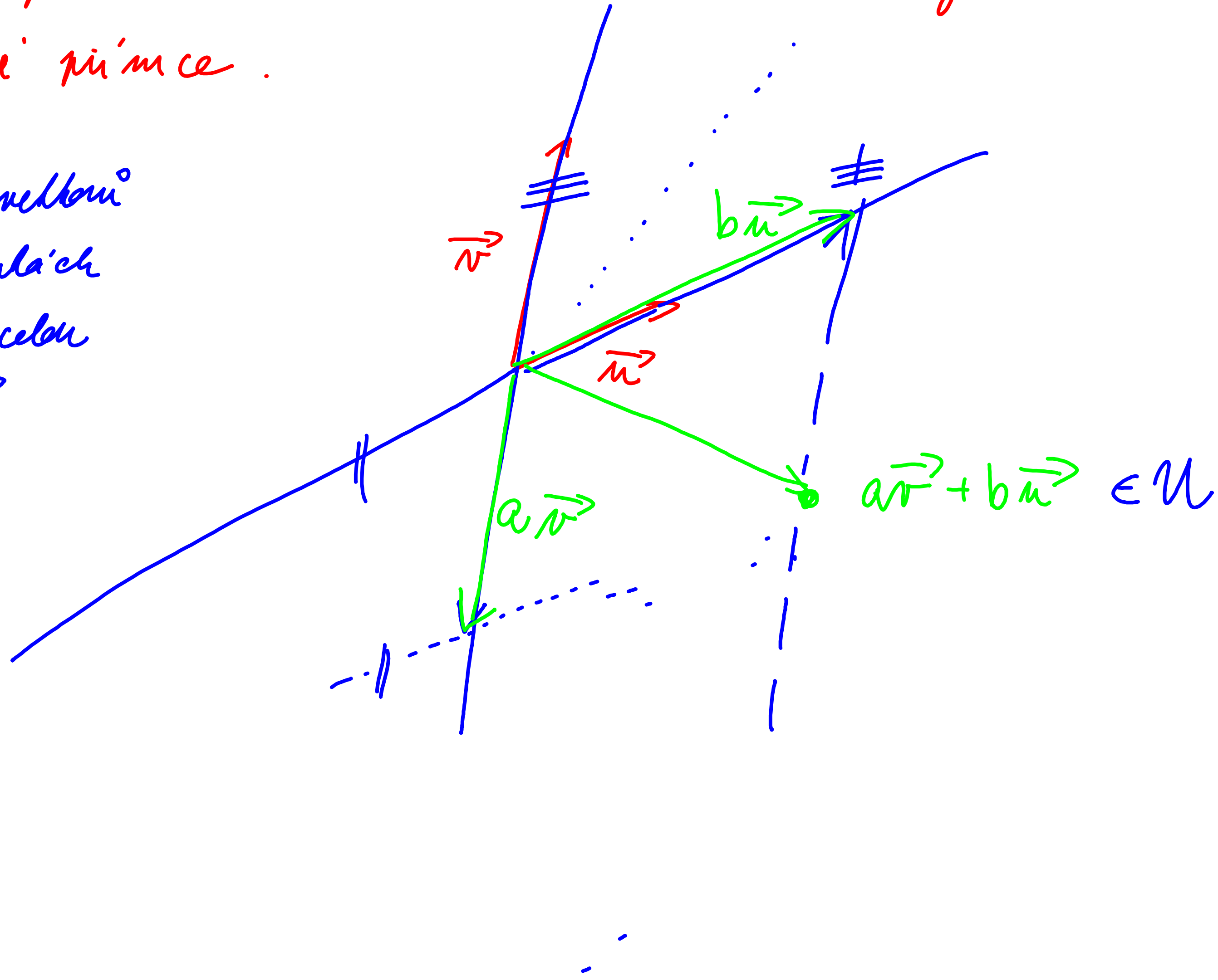
Dalšími vekt. podprostory v $\mathbb{R}^2$ jsou tedy přímky procházející počátkem

14

Každý podprostor $\mathcal{U}$ v $\mathbb{R}^2$ obsahující 2 nenulové vektory, které nejsou v jedné přímce.

Součty vektorů na přímkách vyplní celou rovinu!

$\mathcal{U} = \mathbb{R}^2$



15

Závěr. Podprostory v rovině jsou:

- počátek
- přímky procházející počátkem
- celá rovina

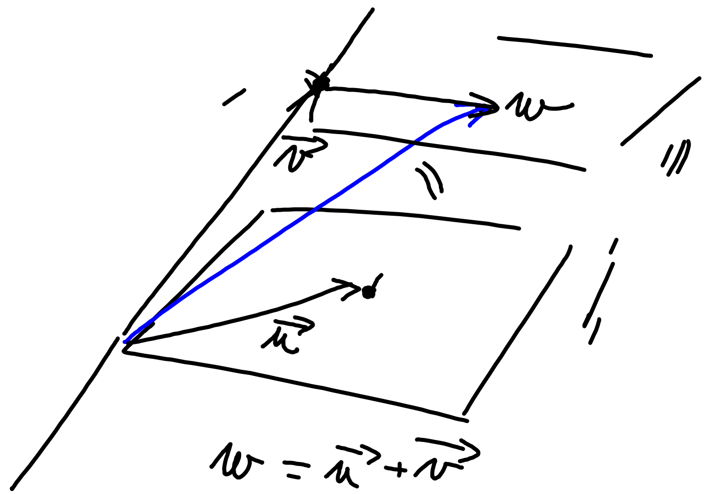
Podprostory v $\mathbb{R}^3$

$\{\vec{0}\}$ je podprostor

přímky procházející počátkem

roviny procházející počátkem

$\mathbb{R}^3$



16

Vlastnosti vekt. podprostorů $\qquad$ U je vekt. podprostor ve V

(1) $\vec{o} \in U$

<u>Důkaz:</u> U je neprázdná podmnožina, obsahuje tedy nějaký vektor $\vec{u}$ a platí, že

$$0 \cdot \vec{u} \in U$$

$$\vec{o} \in U$$

(2) Jestliže $a, b \in \mathbb{K}$, $\vec{u}, \vec{v} \in U$, pak lineární kombinace

$$a\vec{u} + b\vec{v} \in U$$

$$\vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow a\vec{u}, b\vec{v} \in U_{3} \Rightarrow a\vec{u} + b\vec{v} \in U$$

17

(3) Jestliže $u_1, u_2, \ldots, u_k \in U$, pak každá jejich lin. kombinace leží v U.

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \ldots + a_k u_k \in U$$

Dokážeme z (2) indukcí

(4) Průnik vekt. podprostorů je vekt. podprostor

Důkaz z definice:

U_1, U_2 jsou podprostory ve V

$$\vec{u}, \vec{v} \in U_1 \cap U_2 \Rightarrow \left.\begin{array}{l} \vec{u}, \vec{v} \in U_1 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U_1 \\ \vec{u}, \vec{v} \in U_2 \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U_1 \cap U_2$$

18

Lineární obal konečné množiny vektorů

Lineárním obalem množiny vektorů $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots \vec{u}_k \in V$ je množina

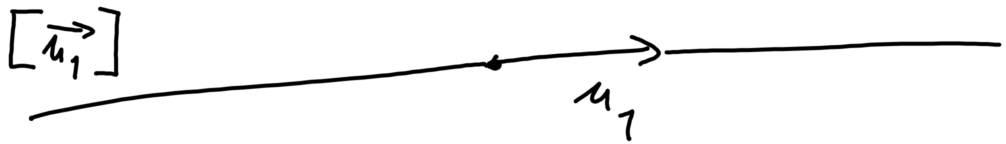
$$[\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_k] = \{a_1\vec{u}_1 + a_2\vec{u}_2 + \dots + a_k\vec{u}_k \in V, \; a_1, a_2, \dots a_k \in \mathbb{K}\}$$

$$[\emptyset] = \{\vec{0}\}$$

$\vec{u}_1 = \vec{0}$ $\quad [\vec{0}] = \{\vec{0}\}$

Příklady $\quad [\vec{u}_1] = \{a\vec{u}_1, \; a \in \mathbb{K}\}$

$\vec{u}_1 \neq 0$ $\quad [\vec{u}_1]$ ... přímka u
vektorem $\vec{u}$



19

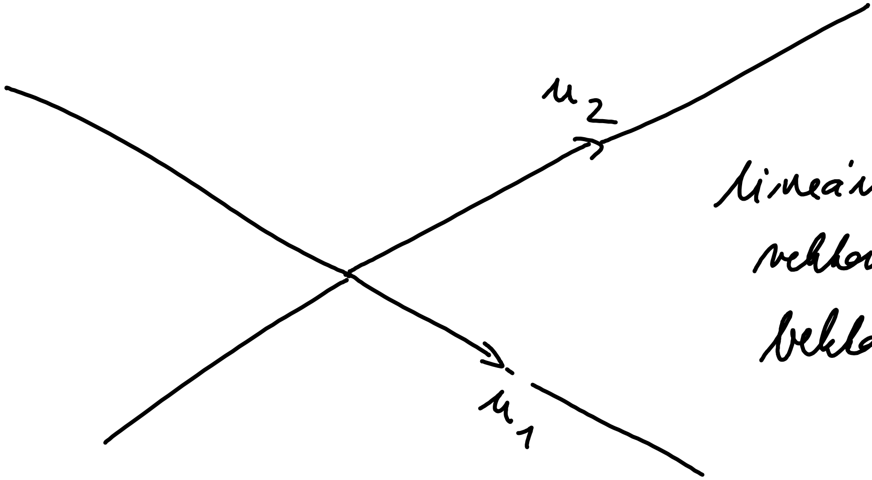
$[\vec{u}_1, \vec{u}_2]$ — $\vec{u}_1 = \vec{u}_2 = \vec{o}$ $\quad [\vec{o}, \vec{o}] = \{\vec{o}\}$

— $\vec{u}_1 \neq \vec{o}$ $\quad [\vec{u}_1, \vec{o}] = \{a\vec{u}_1 + b\vec{o}\} = \{a\vec{u}_1\} = [u_1$

$u_2 = \vec{o}$

přím

$\vec{u}_1, \vec{u}_2$ neleží v jedné přímce



lineární kombinace těchto dvou vektorů vyplní celou rovinu vektory určenou

20

$[u_1, u_2, u_3]$ vektory u_1, u_2, u_3 neleží v jedné rovině

$[u_1, u_2, u_3] = $ 3-rozměrný prostor

<u>Věta</u>: Lineární obal $[u_1, u_2, \dots u_k]$ je vektorový podprostor

<u>Dk</u>. $v, w \in [u_1, u_2, \dots, u_k]$, pak

$$v = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k$$
$$w = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_k u_k$$
$$v + w = (a_1 + b_1) u_1 + (a_2 + b_2) u_2 + \dots + (a_k + b_k) u_k \in [u_1, u_2, \dots, u_k]$$

21

Kdy je daný vektor prvkem lineárního obalu?

V vekt. prostor, lin. obal $[u_1, u_2, \dots, u_k]$, vektor $v \in V$

Jak zjistíme, že $v \in V$? Řešíme rovnici

$$a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_k u_k = v$$

s neznámými $a_1, a_2, \dots, a_k \in \mathbb{K}$.

Příklad $V = Mat_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

Leží $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ v $\left[\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right]$?

22

$$a_1\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix} + a_2\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

Porovnáme jednotlivé složky

(11) $\quad a_1 + 0\,a_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 1$

(12) $\quad 2a_1 + 2\,a_2 = 2 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 0$

(21) $\quad 0\cdot a_1 + a_2 = 3$ není splněna pro $a_1 = 1$ a $a_2 = 0$

(22) $\quad a_1 + a_2 = 4$ Soustava nemá řešení.

Matice $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ neleží v $\left[\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 1\end{pmatrix}\right]$.