INVERZNÍ MATICE

Nechť A je matice $n \times n$ s prvky v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$.

Matice B se nazývá inverzní k A, jestliže

$$A \cdot B = B \cdot A = E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Inverzní matice k A, existuje-li, je určena jednoznačně.

Nechť B a C jsou dvě inverzní matice

$$B = B \cdot E = B(A \cdot C) = (BA) \cdot C = E \cdot C = C$$

2

Inverzní matici budeme značit A^{-1}.

Zjištění, zda inverzní matice existuje, a její výpočet provádíme pomocí elementárních řádkových operací:

- vynásobení i-tého řádku číslem $c \neq 0$
- výměna i-tého a j-tého řádku
- k i-tému přičteme c-násobek j-tého řádku, $i \neq j$

Provedeme-li element. řádkovou operaci e na matici A, značíme výslednou matici jako $e(A)$.

Realizace elementárních řádkových operací pomocí násobení matic

<u>Věta</u>: Je-li A matice $k \times n$ a e elementární řádková operace, pak

$$e(A) = e(E_k) \cdot A.$$

Matice $e(E_k)$, kde E_k je jednotková matice $k \times k$ a e elementární řádková operace, nazýváme elementární matice.

④

Důkaz věty: Je potřeba projít všechny 3 element. operace

1. vynásobení 2. řádku číslem c

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix} \qquad e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(E_k) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \qquad e(E_k) \cdot A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ ca_{21} & ca_{22} & \dots & ca_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(A) = e(E_k) \cdot A$$

(2) výměna 1. a 2. řádku

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(E_k) \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(A) = e(E_k) \cdot A$$

(6)

(3) K 2. řádku přičteme c-násobek 1. řádku

$$e(A) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ca_{11} & a_{22}+ca_{12} & \cdots & a_{2n}+ca_{1n} \\ a_{31} & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(E_k)\cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ c & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ca_{11}+a_{21} & ca_{12}+a_{22} & \cdots & ca_{1n}+a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \end{pmatrix}$$

$$e(A) = e(E_k)\cdot A$$

Dodatek: Je-li A matice $k \times n$ a e_s elementární sloupcová operace, pak

$$e_s(A) = A \cdot \underbrace{e_s(E_n)}_{\text{opět elementární matice, tentokrát } n \times n}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & & & 0 \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & 1 & & 0 & \\ & & c & & \\ & 0 & & 1 & \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & & & \\ c & 1 & & 0 & \\ & & 1 & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ALGORITMUS NA VÝPOČET INVERZNÍ MATICE

$$n\left\{\underbrace{\left(A \mid E\right)}_{2n}\right. \sim \text{element. řádk. operace} \sim \left(\tilde{A} \mid \tilde{B}\right)$$

matice je ve schodovitém tvaru

Mohou nastat 2 možnosti:

1. V matici $\tilde{A}$ je nulový řádek. Potom A nemá inverzní matici.

Důkaz prozatím odložíme.

2. V matici $\tilde{A}$ není nulový řádek. V tomto případě v každém řádku $\tilde{A}$ je vedoucí koeficient, takže můžeme pomocí element. řádkových operací převést $\tilde{A}$ na jednotkovou matici E.

$$(A|E) \sim \dots \sim (\tilde{A}|\tilde{B}) \underset{\substack{\text{zpětná} \\ \text{Gaussova} \\ \text{eliminace}}}{\sim \dots \sim} (E|B).$$

Závěr: B je inverzní matice k matici A.

Příklad $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -3 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

zpětná Gaussova eliminace

nemá nulový řádek, inverze existuje

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & \underbrace{\begin{matrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{matrix}}_{B = A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

K důkazu algoritmu budeme potřebovat

<u>Lemma:</u> Každá elementární matice má inverzní matici (která je opět elementární)

Důkaz: 1 c - násobek 2. řádku $\quad e_c(E)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{c} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & & & & \end{pmatrix} = E$$

$$E = e_{\frac{1}{c}}\left(e_c(E)\right) \underset{\text{věta}}{=} e_{\frac{1}{c}}(E) \cdot e_c(E)$$

2 výměna 1. a 2. řádku .... e

$$E = e\left(e(E)\right) = e(E) \cdot e(E)$$

Tato elementární matice je sama sobě inverzní.

3 K 2. řádku přičteme c násobek 1. řádku ... e

Od 2. řádku odečteme c-násobek 1. řádku .... e'

$$E = \underbrace{e'\Bigg(\underset{\begin{pmatrix}1&0&0\\c&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{e(E)}\Bigg)}_{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}} \overset{\text{Věta}}{=} \underset{\begin{pmatrix}1&0&0\\-c&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}}{e'(E)} \cdot e(E)$$

Inverze k $e(E)$ je $e'(E)$.

Stejně bychom měli dokazovat rovněž $e(E)\cdot e'(E)=E$.

To se ale provede stejně.

<u>Lemma</u> Jsou-li čtvercové matice A, B typu $n \times n$ obě invertibilní (mají inverzní matici), pak rovněž jejich součin $A \cdot B$ je invertibilní.

Dokážeme, že inverzní matice k $A \cdot B$ je $B^{-1} \cdot A^{-1}$.

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot E \cdot A^{-1} =$$

$$= A \cdot A^{-1} = E.$$

Důkaz algoritmu

$$(A \mid E) \sim \text{provádíme elem. řádk. operace} \sim (\underbrace{P_q \dots P_2 P_1 A}_{\text{je ve schod. tvaru}} \mid P_q \dots P_2 P_1)$$

$P_1, P_2, \dots P_q$ jsou element. matice.

Když $P_q P_{q-1} \dots P_2 P_1 A$ má nulový řádek, pak nemůže mít inverzi.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \; \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \neq E$$

A protože $P_q, P_{q-1}, \dots P_2, P_1$ mají inverze, tak A inverzi mít nemůže.

Kdyby zde A inverzi měla, pak má inverzi i

$$P_q \dots P_2 P_1 A,$$

což není pravda, když má nulový řádek.

Jestliže $P_q \dots P_2 P_1 A$ ve schod. tvaru nemá nulový řádek, lze ji pomocí element. řádk. operací převést na jednotkovou matici pomocí zpětné Gaussovy eliminace.

$$(A|E) \sim \dots \sim (P_q \dots P_2 P_1 A \mid P_q \dots P_2 P_1 A) \sim \dots \sim (\underbrace{P_r \dots P_q \dots P_2 P_1 A}_{E} \mid P_r \dots P_2 P_1)$$

Položme $B = P_r P_{r-1} \dots P_2 P_1$.

Vidíme, že $B \cdot A = P_r \dots P_1 A = E$.

Ješte mnoime dokazat, če $A \cdot B = E$.

Pokaže

$$P_n \cdots P_2 P_1 A = E$$

množime tule enačbo postupno sleva zaporedoma z matricami $P_n^{-1}, P_{n-1}^{-1}, \ldots, P_2^{-1}, P_1^{-1}$

$$P_{n-1} \cdots P_2 P_1 A = P_n^{-1}$$

$$P_{n-2} \cdots P_2 P_1 A = P_{n-1}^{-1} \cdot P_n^{-1}$$

$$\cdots$$

$$A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_{n-1}^{-1} \cdot P_n^{-1}$$

$$A \cdot B = (P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_n^{-1})(P_n P_{n-1} \cdots P_2 P_1) = E$$

Násobení matic a Markovovy procesy

Markovův proces je děj, který má n možných stavů. Je popsán maticí $P = (P_{ij})$ typu $n \times n$, kde

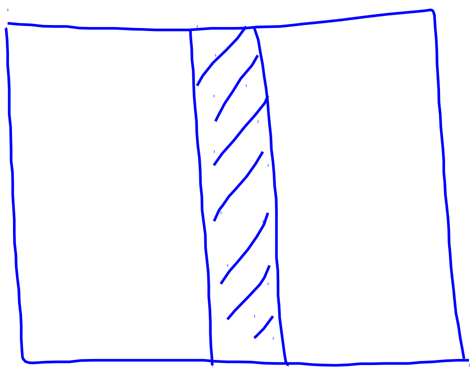
P_{ij} = pravděpodobnost, že se ze stavu j dostaneme do stavu i za nějakou časovou jednotku.

Jestliže v čase t jsme v j-tém stavu s pravděpodobností $x_j(t)$, pak v čase $t+1$ jsme v i-tém stavu s pravděpodobností

$$x_i(t+1) = P_{i1}x_1(t) + P_{i2}x_2(t) + \dots + P_{in}x_n(t).$$

Tedy lze zapsat pomocí násobení matic

$$x(t+1) = \begin{pmatrix} x_1(t+1) \\ x_2(t+1) \\ \vdots \\ x_n(t+1) \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} = P\,x(t)$$

$P =$ 

součet sloupců je 1

Postupné násobení

$$x(0) \qquad x(1) = P\,x(0) \qquad x(2) = P\,x(1) = P \cdot P \cdot x(0)$$

$$x(n) = P\,x(n-1) = \underbrace{P \cdot P \cdot \ldots \cdot P}_{P^n}\, x(0)$$

Úloha o mlsném hazardérovi

Házíme mincí, hazardér má 3 koruny, když padne lev dostane jednu korunu, když padne druhá strana vezmeme mu jednu korunu. Hra končí v okamžiku kdy má 5 korun nebo žádnou. Jaká je pravděpodobnost, že hra končí během 4 kol.

Na toto zadání se můžeme dívat jako na Markovův proces. Stavy jsou

0
1
2 koruny
3
4
5

Co je matice P tvaru 6×6 $\qquad P_{ij}, \quad i,j = 0,1,2,\ldots 5$

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

Počáteční stav je (hazardér má 3 koruny)

$$x(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nás zajímá stav v čase 4 (po 4 kolech)

$$x(4) = P\,x(3) = P \cdot P\,x(2) = P \cdot P \cdot P \cdot P\,x(0) =$$

$$= P^4 x(0) = \begin{pmatrix} 1/8 \\ 3/16 \\ 0 \\ 5/16 \\ 0 \\ 3/8 \end{pmatrix}$$

Pravděpodobnost, že hra skončí je $1/8 + 3/8 = \frac{1}{2}$.